ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-343-350

# Об одном уравнении типа Брио—Буке[1]

В. А. Горелов, К. И. Орлов, П. Е. Волков

**Горелов Василий Александрович** — доктор физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
*e-mail: gorelov.va@mail.ru*
**Орлов Константин Игоревич** — Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
*e-mail: OrlovKI@mpei.ru*
**Волков Павел Евгеньевич** — Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).
*e-mail: VolkovPY@mpei.ru*

**Аннотация**

Данная статья посвящена задаче изучения мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений, являющейся традиционной для теории дифференциальных уравнений. К настоящему времени достаточно хорошо исследован случай линейных уравнений. Что касается нелинейных уравнений, то здесь результатов, относящихся к более или менее общим классам уравнений, сравнительно немного. Одним из классов алгебраических дифференциальных уравнений, где получен ряд общих результатов, являются так называемые уравнения типа Брио-Буке. Это уравнения вида $P(y, y^{(n)}) = 0$, где $P$ — многочлен с комплексными коэффициентами, $n \in \mathbb{N}$. Исследование мероморфных решений уравнений такого типа начато в работах Ш. Брио, Ж. К. Буке и Ш. Эрмита, которые описали все возможные решения уравнений вида $P(y, y') = 0$, показав, что все они лежат в классе $W$, состоящем из рациональных функций, рациональных функций от некоторой экспоненциальной функции и эллиптических функций. Далее была опубликована работа Э. Пикара, который доказал, что все решения уравнений вида $P(y, y'') = 0$ также лежат в $W$.

В дальнейшем возникла гипотеза о том, что у любого уравнения вида $P(y, y^{(n)}) = 0$ (при некоторых ограничениях на многочлен $P$) все мероморфные решения лежат в $W$. Над доказательством этой гипотезы работали Э. Хилле, Р. Кауфман, С. Бэнк, А. Ерёменко, Л. Лиао, Т. Нг, А. Янченко и другие математики. К настоящему времени справедливость гипотезы установлена во многих случаях. Остается, однако, ряд случаев, в которых гипотеза не доказана и не опровергнута.

В данной работе рассмотрен один такой случай, а именно уравнения $y^{(n)} = y^m$, где $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Найдено необходимое и достаточное условие существования ненулевых мероморфных решений указанных уравнений и сами эти решения.

*Ключевые слова:* алгебраические дифференциальные уравнения, мероморфные решения.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**
Горелов, В. А., Орлов, К. И., Волков, П. Е. Об одном уравнении типа Брио—Буке // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 343–350.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-21-00196).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.925 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-343-350

# About one Briot–Bouqet equation

V. A. Gorelov, K. I. Orlov, P. E. Volkov

**Gorelov Vasily Alexandrovich** — doctor of physical and mathematical sciences, National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
*e-mail: GorelovVA@mpei.ru*
**Orlov Konstantin Igorevich** — National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
*e-mail: OrlovKI@mpei.ru*
**Volkov Pavel Evgenievich** — National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
*e-mail: VolkovPY@mpei.ru*

**Abstract**

This article is devoted to the problem of studying meromorphic solutions of algebraic differential equations, which is traditional for the theory of differential equations. At the present, the case of the linear equations is quite well explored. Speaking of the nonlinear equations, there are relatively few results related to more or less common equation classes. There is one class of equations, where a number of results have been obtained. They are called Briot–Bouquet equations. These are the equations of the form $P(y, y^{(n)}) = 0$, where $P$ is a complex polynomial, $n \in \mathbb{N}$. The research of the meromorphic solutions of this type of equations was started by Ch. Briot, J. C. Bouqet and Ch. Hermit, who described all possible solutions of the equations of the form $P(y, y') = 0$ by showing that they are all included in class $W$, which consists of rational functions, rational functions of some exponential function and elliptic functions. After that E. Picard's work was published where he proved that all solutions of the equations of the form $P(y, y'') = 0$ are also included in $W$.

Later, the hypothesis arose that in any $P(y, y^{(n)}) = 0$ equation (with some limitations to the $P$) all its meromorphic solutions are included in $W$. E. Hille, R. Kaufman, S. Bank, A. Eremenko, L. Liao, T. Ng, A. Yanchenko and other mathematicians have been working on its proof. Nowadays the validity of the hypothesis has been established in many cases, but there are a number of cases left, where it is neither proved nor disproved.

There is one of these cases described in this work. Exactly, equations $y^{(n)} = y^m$, where $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. A necessary and sufficient condition for the existence of nonzero meromorphic solutions of these equations and these solutions themselves are found.

*Keywords:* algebraic differential equations, meromorphic solutions.

*Bibliography:* 15 titles.

**For citation:**
Gorelov, V. A., Orlov, K. I., Volkov, P. E., 2024, "About one Briot–Bouqet equation" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 343–350.

# 1. Введение

Описание мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений является традиционной задачей теории дифференциальных уравнений. При этом к настоящему времени получено немного результатов, относящихся к нелинейным уравнениям.

Так, ряд результатов получен для уравнений типа Брио-Буке — уравнений вида $P(y, y^{(n)}) = 0$, где $n \in \mathbb{N}$, а $P$ — многочлен с комплексными коэффициентами.

Для уравнений типа Брио-Буке имеется гипотеза, согласно которой любое мероморфное решение такого уравнения лежит в классе $W$, состоящем из рациональных функций, рациональных функций от некоторой экспоненциальной функции и эллиптических функций. Над доказательством этой гипотезы работали многие известные математики — Ш. Брио, Ж.-К. Буке, Э. Пикар, Э. Хилле, С. Бэнк, Р. Кауфман, А. Э. Ерёменко и другие (см. [1]–[9]). К настоящему времени гипотеза доказана для мероморфных решений, имеющих хотя бы один полюс, и для целых решений уравнений, где главная часть многочлена $P$ не имеет кратных корней ([7], [10]), но эти общие результаты не позволяют описать, например, все мероморфные решения уравнений

$$y^{(n)} = y^m, \qquad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant 2 \tag{1}$$

(такая задача, в частном случае $n = 4,\ m = 5$, была поставлена в [6]). В данной работе излагаются методы и приёмы, позволяющие находить все мероморфные решения этих уравнений и аналогичных им. А именно, доказана

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение (1) имеет ненулевое мероморфное решение тогда и только тогда, когда*

$$\frac{n}{m-1} = k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

*причем этим решением является функция*

$$y = \frac{c}{(z-a)^k}, \qquad a \in \mathbb{C}, \quad c = \sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)}. \tag{3}$$

# 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Решением дифференциального уравнения (1) не может быть ненулевая целая функция.*

Доказательство. Предположим, что целая функция $y = f(z)$ является решением уравнения (1). Согласно теории Вимана-Валирона (см. [11], гл. 9, 10; [12], гл. 1) существует неограниченно возрастающая последовательность значений $R$ такая, что если $\eta \in \mathbb{C}$, $|f(\eta)| = M(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, то

$$f^{(n)}(\eta) = f(\eta)\left(\frac{\nu(R)}{\eta}\right)^n \left(1 + O\left(\nu(R)^{-\frac{1}{4}+\delta}\right)\right) = f^m(\eta),$$

где $\nu(R)$ — так называемый центральный индекс максимального члена $m(R)$ (см. [12], стр. 25, (8)). Так как $1 \leq \nu(R) \leq (\ln m(R))^{1+\varepsilon}$ (см. [12], стр. 22, (5)), а $m(R) \leq M(R)$ (см. [13], т. I, отдел III, № 122), то отсюда $|f(\eta)| < cR^{-\gamma}$ при некоторых постоянных $c, \gamma > 0$. Но тогда $f(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Ненулевая функция $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие (2), а $f(z)$ имеет вид (3).*

Доказательство. Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка $p \geq 1$, то в её разложение на простейшие дроби входит слагаемое $c/(z-a)^p$, где $c, a \in \mathbb{C},\ c \neq 0$.

Тогда при подстановке $f(z)$ в уравнение (1) его левая часть будет иметь при $z = a$ полюс порядка $p+n$, а правая — полюс порядка $pm$, что возможно только в случае $p = k = n/(m-1)$, $c = \sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)}$.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в достаточно малой окрестности точки $z = a$:

$$f(z) = \frac{c}{(z-a)^k} + \frac{c_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_1}{z-a} + g(z), \qquad c, c_{k-1}, \dots, c_1 \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \tag{4}$$

где функция $g(z)$ голоморфна в окрестности точки $a$. Предположим, что в разложении (4) среди чисел $c_{k-1}, \dots, c_1$ не все равны нулю. Тогда после подстановки (4) в (1) имеем

$$\left(\frac{c}{(z-a)^k} + \frac{c_\varkappa}{(z-a)^\varkappa} + \dots + \frac{c_1}{z-a} + g(z)\right)^{(n)} = \left(\frac{c}{(z-a)^k} + \frac{c_\varkappa}{(z-a)^\varkappa} + \dots + \frac{c_1}{z-a} + g(z)\right)^m,$$

где $c_\varkappa \neq 0$, $1 \le \varkappa \le k-1$. Сравнивая коэффициенты при $1/(z-a)^{\varkappa+n}$, получим

$$(-1)^n \varkappa(\varkappa+1)\dots(\varkappa+n-1)c_\varkappa = mc^{m-1}c_\varkappa,$$

откуда $\varkappa(\varkappa+1)\dots(\varkappa+n-1) = mk(k+1)\dots(k+n-1)$, что невозможно. Следовательно, $c_{k-1} = \dots = c_1 = 0$.

Из разложения $f(z)$ на простейшие дроби также следует, что степень числителя функции $f(z)$ должна быть строго меньше степени знаменателя. Поэтому

$$f(z) = \sqrt[m-1]{(-1)^n k\dots(k+n-1)}\left(\frac{1}{(z-a_1)^k} + \dots + \frac{1}{(z-a_s)^k}\right), \qquad s \in \mathbb{N}, \quad a_i \neq a_j, i \neq j.$$

Подставляя $f(z)$ в (1), получим

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(z-a_i)^{k+n}} = \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(z-a_i)^k}\right)^m. \tag{5}$$

Знаменатели обеих частей равенства (5) одинаковы, тогда как старший член числителя левой части равен $sz^{(k+n)(s-1)}$, а правой части — $s^m z^{km(s-1)}$, что возможно только при $s = 1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Уравнение (1) не может иметь ненулевых решений вида $f(e^{\alpha z})$, где $f(x) \in \mathbb{C}(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ имеет полюс порядка $p \ge 1$, то в её разложение на простейшие дроби входит слагаемое $\hat{c}/(x-a)^p$, где $a, \hat{c} \in \mathbb{C}$, $\hat{c} \neq 0$. Тогда после подстановки функции $f(e^{\alpha z})$ в (1) правая часть этого уравнения примет вид $f^m(e^{\alpha z})$, где $f^m(x)$ — рациональная функция, имеющая при $x = a$ полюс порядка $mp$. Левая же часть уравнения (1) примет вид $g(e^{\alpha z})$, где $g(x)$ имеет при $x = a$ полюс порядка $p+n$, так как ввиду формулы Лейбница

$$\left(\frac{\hat{c}}{(e^{\alpha z}-a)^p}\right)^{(n)} = \left(\frac{-p\alpha\hat{c}e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}\right)^{(n-1)} = -p\alpha\hat{c}e^{\alpha z}\left(\frac{1}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}\right)^{(n-1)} - \dots$$

$$-p\alpha\hat{c}(e^{\alpha z})^{(n-1)}\frac{1}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}} = \frac{(-1)^n p\dots(p+n-1)\hat{c}\alpha^n e^{n\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+n}} + \dots - \frac{\hat{c}p\alpha^n e^{\alpha z}}{(e^{\alpha z}-a)^{p+1}}. \tag{6}$$

Поэтому $p = k = n/(m-1)$, а $\hat{c} = \sqrt[m-1]{(-1)^n k(k+1)\dots(k+n-1)a^n\alpha^n}$. Пусть $\xi_0 = \ln a/\alpha$, где $\ln a$ — значение какой-либо фиксированной ветви функции $\ln z$ в точке $z = a$. Ввиду того, что

$$\frac{\hat{c}}{(e^{\alpha z}-a)^k} = \frac{\hat{c}}{(e^{\alpha(z-\xi_0+\xi_0)}-a)^k} = \frac{\hat{c}}{a^k(e^{\alpha(z-\xi_0)}-1)^k} = \frac{\hat{c}}{a^k(\alpha(z-\xi_0)+\alpha^2(z-\xi_0)^2/2+\dots)^k} =$$

$$= \frac{\hat{c}}{a^k\alpha^k(z-\xi_0)^k(1+\alpha(z-\xi_0)/2+\dots)^k} = \frac{\hat{c}}{a^k\alpha^k(z-\xi_0)^k}(1-k\alpha(z-\xi_0)/2+\dots),$$

разложение Лорана функции $f(e^{\alpha z})$ в достаточно малой окрестности точки $z=\xi_0$ должно начинаться с члена $c/(z-\xi_0)^k$, что соответствует (4).

Очевидно, что точка $\xi_1=\xi_0+2\pi i/\alpha$ также является полюсом функции $f(e^{\alpha z})$. Рассмотрим произвольную область $G\subseteq\mathbb{C}$, содержащую $\xi_0$ и $\xi_1$, но не содержащую других полюсов $f(e^{\alpha z})$. В этой области функция $f(e^{\alpha z})$, с учётом установленного при доказательстве леммы 2, имеет вид

$$f(e^{\alpha z}) = \frac{c}{(z-\xi_0)^k} + \frac{c}{(z-\xi_1)^k} + g(z),$$

где $g(z)$ голоморфна в $G$. Подставив это выражение в (1), получим

$$\frac{1}{(z-\xi_0)^{k+n}} + \frac{1}{(z-\xi_1)^{k+n}} + \frac{1}{c^m}g^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{(z-\xi_0)^k} + \frac{1}{(z-\xi_1)^k} + \frac{1}{c}g(z)\right)^m.$$

В обеих частях последнего равенства рассмотрим члены с наибольшей скоростью убывания при $z\longrightarrow\infty$. Сумма таких членов в левой части эквивалентна при $z\longrightarrow\infty$ функции $2/z^{k+n}$, а в правой части — $2^m/z^{km}$, что при $m\geqslant 2$ невозможно. Лемма 3 доказана.

## 3. Доказательство теоремы 1

Из леммы 1 следует, что ненулевое мероморфное решение уравнения (1) не может быть целым. Но согласно [1] любое мероморфное решение, имеющее хотя бы один полюс, лежит в классе $W$. Ввиду лемм 2 и 3 оно является либо эллиптической функцией, либо функцией вида (3). Кроме того, имеет место

Лемма 4. *Никакая эллиптическая функция не может быть решением дифференциального уравнения (1).*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\varphi(z)$ — эллиптическая функция с периодами $\{2\omega_1; 2\omega_2\}$, удовлетворяющая уравнению (1).

Рассмотрим представление $\varphi(z)$ через сигма-функции ([14], гл. 3; [15], гл. 7, §6):

$$\varphi(z) = \gamma\frac{\sigma(z-a_1)\dots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_1)\dots\sigma(z-b_s)},$$

где $\{a_1,\dots,a_s\}$ — все нули функции $\varphi(z)$, а $\{b_1,\dots,b_s\}$ — все полюса $\varphi(z)$ в параллелограмме периодов.

При этом $a_1+\dots+a_s=b_1+\dots+b_s$, $\gamma\in\mathbb{C}$, $\sigma(z)$ — целая функция с простыми нулями в вершинах параллелограмма периодов,

$$\sigma(z) = z\cdot\prod_{(m,n)\in\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}}\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left\{\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)^2\right\}, \qquad \Omega_{m,n}=2m\omega_1+2n\omega_2.$$

Как установлено при доказательстве леммы 2, любой полюс функции $\varphi(z)$ должен иметь порядок $k=n/(m-1)$. Поэтому можно считать, что $b_1=\dots=b_k$, $b_j\neq b_1$ при $j>k$.

Положим

$$h(z) = \gamma\frac{\sigma(z-a_1)\dots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_{k+1})\dots\sigma(z-b_s)}.$$

Тогда

$$\varphi(z) = \frac{h(z)}{\sigma^k(z-b_1)}.$$

Из соотношения $\sigma(z+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$ ([14], гл. 3, §13) и того, что $a_1+\dots+a_s = kb_1+b_{k+1}+ + \dots + b_s$, получим

$$h(z+2\omega_1) = (-1)^k e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)} h(z), \tag{7}$$

откуда

$$h'(z+2\omega_1) = (-1)^k 2k\eta_1 e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)} h(z) + (-1)^k e^{2k\eta_1(z-b_1+\omega_1)} h'(z). \tag{8}$$

Так как совокупности $\{a_1,\dots,a_s\}$ и $\{b_1,\dots,b_s\}$ задают все нули и полюса внутри параллелограмма периодов, то $h(b_1)\neq 0$. Отсюда и (7) следует, что $h(b_1+2\omega_1)\neq 0$. Отметим, что если $h'(b_1)=0$, то ввиду (8) $h'(b_1+2\omega_1)\neq 0$. Положим $z_0=b_1$, если $h'(b_1)\neq 0$ и $z_0=b_1+2\omega_1$, если $h'(b_1)=0$.

В силу выбора $z_0$ получаем $h(z_0)\neq 0$, $h'(z_0)\neq 0$. Так как $\sigma'(0)\neq 0$, $\sigma'(2\omega_1)\neq 0$, то разложение функции $\varphi(z)=\dfrac{h(z)}{\sigma^k(z-b_1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$ имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{A}{(z-z_0)^k} + \frac{B}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}},$$

где $\psi(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $z_0$, $AB\neq 0$, причём, как следует из доказательства леммы 2, $A=\sqrt[m-1]{(-1)^n k\dots(k+n-1)}$. Подставив $\varphi(z)$ в (1), получим

$$\frac{(-1)^n k\dots(k+n-1)A}{(z-z_0)^{k+n}} + \frac{(-1)^n (k-1)\dots(k+n-2)B}{(z-z_0)^{k+n-1}} + \dots + \left(\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}}\right)^{(n)} =$$

$$= \left(\frac{A}{(z-z_0)^k} + \frac{B}{(z-z_0)^{k-1}} + \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{k-2}}\right)^m = \frac{A^m}{(z-z_0)^{km}} + \frac{mA^{m-1}B}{(z-z_0)^{km-1}} + \dots .$$

Сравнивая в полученном равенстве члены вида $C/(z-z_0)^{k+n-1}$, получим $k-1=(k+n-1)m$, что невозможно. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 и рассуждений непосредственно перед ней следует утверждение теоремы 1.

## 4. Заключение

Используемые в настоящей статье методы могут быть применены к уравнениям более общего вида, чем (1). В частности, с помощью обобщения проведённых рассуждений можно найти все мероморфные решения уравнений $(y^{(n)})^l = y^m,\ n,m,l\in\mathbb{N},\ m\neq l$.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Briot Ch., Bouquet J. Intégration des équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques // J. École Polytechnique. 1856. Vol. 21. P. 199-254.

2. Briot Ch., Bouquet J. Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques. Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

3. Picard E. Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable et sur une classe d'équations différentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. 1880. Vol. 91. P. 1058-1061.

4. Hille E. Ordinary differential equations in the complex domain // Pure Appl. Math. 1976. Wiley-Interscience [John Wiley & Sonns], New York-London-Sydney.

5. Bank S.B., Kaufman R.P. On Briot-Bouquet differential equations and a question of Einar Hille // Math. Z. 1981. Vol. 177, № 4. P. 549-559.

6. Еременко А.Э. Мероморфные решения уравнений типа Брио-Буке // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982. Т. 38. Харьков: Вища школа. С. 48-56.

7. Eremenko A. E., Liao L., Ng T. W. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2009. Vol. 146, P. 197-206.

8. Hayman W.K. The growth of solutions of algebraic differential equations // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1996. Vol. 7, № 2. P. 67-73.

9. Hille E. Higher order Briot-Bouquet differential equations // Ark. Mat. 1978. Vol. 16, № 1-2. P. 271-286.

10. Янченко А. Я. Об одном продвижении в доказательстве гипотезы о мероморфных решениях уравнений типа Брио-Буке // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86, № 5. С. 197-208.

11. Валирон Ж. Аналитические функции. М.: Гостехиздат, 1957.

12. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.

13. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

14. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

15. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967–1968.

## REFERENCES

1. Briot, Ch. & Bouquet, J. 1856, “Intégration des équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques”, *J. École Polytechnique*, vol. 21, pp. 199-254.

2. Briot, Ch. & Bouquet, J. 1859, “Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques”, *JMallet-Bachelier, Paris.*

3. Picard, E. 1880, “Sur une propriété des fonctions uniformes d’une variable et sur une classe d’équations différentielles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 91, pp. 1058-1061.

4. Hille, E. 1976, “Ordinary differential equations in the complex domain”, *Pure Appl. Math.*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sonns], New York-London-Sydney.

5. Bank, S. B. & Kaufman R. P. 1981, “On Briot-Bouquet differential equations and a question of Einar Hille”, *Math. Z.*, vol. 177, no. 4, pp. 549-559.

6. Eremenko, A. E. 1986, “Meromorphic solutions of equations of Briot–Bouquet type”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 133, pp. 15-23.

7. Eremenko, A. E., Liao, L. & Ng, T. W. 2009, “Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 146, pp. 197-206.

8. Hayman, W. K. 1996, “The growth of solutions of algebraic differential equations”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, vol. 7, no. 2, pp. 67-73.

9. Hille, E. 1978, “Higher order Briot-Bouquet differential equations”, *Ark. Mat.*, vol. 16, no. 1-2, pp. 1020-1030.

10. Yanchenko, A. Ya. 2022, “One advance in the proof of the conjecture on meromorphic solutions of Briot–Bouquet type equations”, *Izv. Math.*, vol. 86, no. 5, pp. 819-836.

11. Valiron, G. 1954, “Fonctions analytiques”, *Presses universitaires de France, Paris.*

12. Wittich, H. 1955, “Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen”, *Ergeb. Math. Grenzgeb. (N.F.)*, 8, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

13. Polia, G. & Szegö, G. 1964, “Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis”, ”, *Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg*, New York.

14. Akhiezer, N. 1990, Elements of the theory of elliptic functions, Transl. Math. Monogr., AMS, Providence, RI, vol. 79.

15. Markushevich, A. I. 1967-1968, “Theory of analytic Functions”, *Nauka, Moscow* (Russian).

Получено: 18.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024