

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 519.175.4

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-299-334

О справедливости закона 0 или 1 для неглубоких свойств первого порядка сильно разреженного случайного графа

Р. Р. Шефрукова

Шефрукова Руфина Руслановна — аспирант, Адыгейский государственный университет (г. Майкоп).

e-mail: rufa.1@yandex.ru

Аннотация

В биномиальном случайном графе $G(n, p)$ ребра проводятся независимо и с вероятностью p каждое. Случайный граф подчиняется k -закону 0 или 1, если вероятность истинности любой формулы первого порядка, кванторная глубина которой не превосходит k , стремится либо к 0 либо к 1 при $n \rightarrow \infty$. Данная статья посвящена ответу на следующий вопрос: для каких пар k и ℓ случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется k -закону 0 или 1? Мы получили полный ответ при $k = 3$ и всех натуральных ℓ , а также доказали, что при $k = 4$ и $\ell \in [1, 40] \cup \{72\}$ закон нарушается.

Ключевые слова: Случайный граф, биномиальный случайный граф, логика первого порядка, закон 0 или 1, кванторная глубина, игра Эренфойхта.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Шефрукова, Р.Р. О справедливости закона 0 или 1 для неглубоких свойств первого порядка сильно разреженного случайного графа // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 299–334.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 519.175.4

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-299-334

On the validity of 0-1 law for shallow first order properties of very sparse random graphs

R. R. Shefrukova

Shefrukova Rufina Ruslanovna — postgraduate student, Adyghe State University (Maykop).

e-mail: rufa.1@yandex.ru

Abstract

In the binomial random graph $G(n, p)$ edges between every pair of vertices appear independently with probability p . The random graph obeys 0-1 k -law, if, for every first order sentence, the probability that $G(n, p)$ satisfies it is either 0 or 1 in the limit (as $n \rightarrow \infty$). This paper addresses the following question: given a small k and any ℓ , does $G(n, n^{-1-1/\ell})$ satisfy 0-1 k -law? We answer this question for $k = 3$ and all ℓ . We also prove that for $k = 4$ and $\ell \in [1, 40] \cup \{72\}$ 0-1 k -law does not hold.

Keywords: Random graph, binomial random graph, first order logic, 0-1 law, quantifier depth, Ehrenfeucht game.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Shefukova, R.R. 2024, "On the validity of 0-1 law for shallow first order properties of very sparse random graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 299–334.

1. Введение

Наука о случайных графах зародилась на рубеже 50-х и 60-х годов. Впервые случайные графы были определены и изучены Эрдёшем и Реньи, именно их труды [5, 6] заложили основы современной науки о случайных графах. В настоящее время исследовано множество моделей случайных графов. В данной статье рассматривается наиболее изученная классическая модель биномиального случайного графа $G(n, p)$: ребра между парами вершин n -элементного множества проводятся независимо с вероятностью p .

Классическим результатом в области является теорема Глебского, Когана, Легонького, Таланова [8] и Фагина [7], утверждающая, что случайный граф $G(n, 1/2)$ подчиняется закону нуля или единицы для формул первого порядка (т.е. вероятность истинности любой такой формулы стремится либо к 0, либо к 1 с ростом n к бесконечности). Тот же результат справедлив и для любой другой постоянной вероятности проведения ребра p , а также для p , стремящейся к 0 медленнее любой степенной функции [12]. Если $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, то известно следующее [11]. Закон нуля или единицы не выполняется тогда и только тогда, когда либо α — рациональное число из $(0, 1]$, либо $\alpha = 1 + \frac{1}{\ell}$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Итак, при $\alpha > 1$ возникают исключительные точки вида $1 + 1/\ell$, для которых закон не выполнен, мотивируя следующий естественный вопрос. Для каких пар k и ℓ выполняется k -закон нуля или единицы (т.е. для формул первого порядка глубины не более k) для $G(n, n^{-1-1/\ell})$? Настоящая работа посвящена ответу на этот вопрос при малых k .

Для больших k вопрос был изучен Жуковским М.Е. и Островским Л.Б. [2, 10]. При $\alpha = 1 + 1/\ell$ были получены нижняя и верхняя оценка на наибольшее k , при котором выполнен k -закон нуля или единицы. А именно был получен следующий результат. Пусть функция $T(i)$ определена следующим образом (на множестве натуральных чисел): $T(0) = 1, T(i) = 2^{T(i-1)}$, $i \geq 1$. Кроме того, для любого натурального числа x положим

$$\log^*(x) = \min\{i : T(i) \geq x\}$$

(т. е. $\log^* T(i) = i$).

ТЕОРЕМА 1 (Жуковский, Островский [2, 10]). Пусть $k \geq 7$ — натуральное число. Тогда для любого натурального $\ell \leq 2T(k-4)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы. Более того, существует такая константа C , что для любого натурального $k > 3$ и $\ell \geq T(k + \log^*(k+1) + 3)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

В настоящей работе мы изучили справедливость закона нуля или единицы для $k = 3$ и всех ℓ , а также для $k = 4$ и всех $\ell \leq 40$. Заметим, что при $k = 2$ легко заметить, что единственным значением ℓ , при котором нарушается закон, является $\ell = 1$ — см. раздел 3.

ТЕОРЕМА 2. Положим $p = n^{-1-1/\ell}$.

- При $k = 3$ и $\ell \leq 6$ случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется k -закону 0 или 1. Если же $\ell \geq 7$, то случайный граф $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется k -закону 0 или 1.
- При $k = 4$ и $\ell \leq 40$ случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется k -закону 0 или 1. Кроме того, случайный граф $G(n, n^{-73/72})$ не подчиняется 4-закону 0 или 1.

Итак, теорема 1 утверждает, что $G(n, n^{-1-1/\ell})$ подчиняется 4-закону 0 или 1 при всех $\ell \geq T(7 + \log^* 5) = T(10)$, то есть ℓ превосходит “башню” из двоек высоты 10. В полученной нами теореме 2 имеется сплошной интервал значений ℓ , при которых не выполнен 4-закон, и одно отдельное значение 72. Мы не знаем, не выполнен ли 4-закон 0 или 1 для всех ℓ , не превосходящих 72, но ожидаем, что выколотые точки на отрезке $[1, \ell_0]$, где ℓ_0 — максимальное значение, при котором не выполнен 4-закон, все-таки имеются. Тем не менее, по всей видимости, наилучшая известная верхняя оценка $\ell_0 < T(10)$ далека от оптимальной. Поэтому наиболее интересным вопросом является нахождение или значительное улучшение верхней оценки ℓ_0 .

Доказательство отсутствия k -закона в теореме 2 проводится конструктивно — приводится формула, вероятность которой не стремится ни к 0, ни к 1. Для доказательства справедливости закона мы использовали теорему Эренфойхта и следствие из нее о связи игры Эренфойхта с законами нуля или единицы. Необходимые определения и формулировки соответствующих теорем приведены в разделе 2. Доказательство теоремы 2 приведено в разделе 3.

Отметим, что законы нуля или единицы используются в задачах о выразимости графовых свойств на языке первого порядка, которые, в свою очередь, могут быть использованы для оценивания временной сложности алгоритмов проверки этих свойств [13, 14]. Справедливость k -закона для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \leq 1$ изучена в работах [15, 16].

2. Используемый в работе математический аппарат

Прежде всего введем ряд понятий, обозначений, утверждений и конструкций, которые необходимы для формальной постановки задачи и ее решения.

2.1. Логический формализм

Пусть M — непустое множество. Будем называть *предикатом арности* $k \in \mathbb{N}$ произвольное отображение $M^k \rightarrow \{0, 1\}$. Сами по себе формулы являются формальными записями, и поэтому в их записи участвуют не сами предикаты, а их обозначения, называемые предикатными символами. Так, *предикатный символ* — это произвольный символ, с которым ассоциировано некоторое натуральное число (арность соответствующего предиката). *Сигнатурой* называется произвольное множество предикатных символов. *Интерпретация сигнатуры* — множество предикатов, соответствующих символам из сигнатуры и имеющих соответствующую арность.

Перейдем к определению формулы первого порядка. Определим сперва понятие атома. *Атомарная формула (атом)* (иными словами, формула, которая не содержит никаких логических связок) — это выражение $p(t_1, \dots, t_n)$, где $p \in \Sigma$ — предикатный символ арности n , а $t_1, \dots, t_n$ — переменные. Переменные атомарной формулы являются *несвязными*.

Определим, наконец, *формулы первого порядка* и, одновременно с этим, *кванторную глубины формулы*.

1. Любой атом является формулой первого порядка. Кванторная глубина атома равна 0.
2. Если φ — формула первого порядка, то и $\neg\varphi$ — формула первого порядка. Множество несвязанных переменных при этом сохраняется. Кванторная глубина формулы $\neg\varphi$ равна кванторной глубине формулы φ .
3. Если φ_1, φ_2 — формулы первого порядка, то и

$$\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2, \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$$

— формулы первого порядка. Кванторная глубина каждой из перечисленных новых формул равна максимуму из кванторной глубины φ_1 и кванторной глубины φ_2 .

4. Пусть φ — формула первого порядка. Тогда

$$\exists x \varphi, \forall x \varphi$$

— формулы первого порядка, переменная x в которых является связанной. Кванторная глубина обеих формул на 1 больше кванторной глубины φ .

Формула без несвязанных переменных называется *замкнутой* или *предложением*. Заметим, что замкнутая формула φ на интерпретации сигнатуры Σ *принимает одно из двух значений* 1 или 0. Иными словами, замкнутая формула *выражает свойство* интерпретаций. Если же $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ — незамкнутая формула с несвязанными переменными $x_1, \dots, x_r$, то φ *выражает предикат arity* r . Заметим, наконец, что кванторная глубина формулы — это, говоря неформально, максимальная длина последовательности вложенных кванторов.

Для более глубокого ознакомления с логикой первого порядка мы рекомендуем читателю обратиться к монографиям [1, 9].

В настоящей работе в роли интерпретаций будут выступать графы.

2.2. Теоретико-графовые и вероятностные конструкции

Простым графом G (или просто *графом*) называется пара множеств (V, E) , где

- V — непустое, конечное множество элементов, называемых *вершинами*;
- E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из V , называемых *ребрами*.

Множество V называется *множеством вершин графа* G , а E — его *множеством ребер*. Количество вершин и ребер графа будем обозначать, соответственно, $v(G)$ и $e(G)$.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$. Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа G , если V' и E' являются соответственно такими подмножествами V и E , что ребро $\{v_i, v_j\}$ содержится в E' только в том случае, если v_i и v_j содержатся в V' . Граф G' называется *собственным подграфом* G , если E' — собственное подмножество E или V' — собственное подмножество V . Граф G' называется *индуцированным* подграфом графа G , если множество вершин графа G' является подмножеством множества вершин графа G , а множество ребер *индуцировано* этим множеством вершин, то есть любые две вершины u, v графа G' *смежны* (т.е. соединены ребром) в G' тогда и только тогда, когда они смежны в G .

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин u, v существует последовательность вершин $u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$ такая, что для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ пара $\{v_{i-1}, v_i\}$

образует ребро. *Компонента связности* графа — это его максимальный (по включению) связный подграф. Очевидно, любой граф представляется в виде *дизъюнктного объединения* (т.е. непересекающихся по вершинам) компонент связности.

Простым циклом C_k называется граф на множестве $v_1, \dots, v_k$ с множеством ребер $\{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\}$. Связный граф, не содержащий как подграф простого цикла, называется *деревом*. Самыми “простейшими” деревьями являются звезды и простые пути. *Звездой* $K_{1,s}$ называется дерево на $s + 1$ вершине, одна вершина которого смежна со всеми остальными, *простым путем* P_ℓ называется дерево на ℓ вершинах, которое получается из простого цикла удалением одного ребра. *Лесом* называется граф, любая компонента связности которого является деревом.

Обозначим через $a(G)$ число автоморфизмов графа G . *Аutomорфизм графа* — это отображение множества вершин на себя, сохраняющее смежность. Иными словами, автоморфизм графа — это *изоморфизм* графа на себя. Два графа $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются *изоморфными* (обозначается $G \cong G'$), если существует биекция (*изоморфизм*) $\varphi : V \rightarrow V'$ такая, что $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v_i), \varphi(v_j)) \in E'$.

На стыке теории графов и теории вероятностей располагается теория случайных графов. Случайный граф — это общий термин для обозначения вероятностного распределения графов, используемый, в частности, для ответов на вопросы о свойствах простых графов. Случайный граф означает почти всегда биномиальную модель случайных графов Эрдеша–Реньи. Дадим определение случайного графа в данной модели.

Пусть дано множество $V_n = \{1, \dots, n\}$, элементы которого мы будем считать вершинами случайного графа $G(n, p)$, где $p \in [0, 1]$ — некоторый фиксированный параметр. На этом множестве будем строить случайный граф (а точнее случайное множество ребер) следующим образом. Будем соединять любые две вершины i и j ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин. Иными словами, *случайный граф* — это граф полученный из множества n изолированных вершин путём последовательного случайного добавления соединяющих вершины ребер.

Мы будем рассматривать свойства случайных графов, определяемые формулами первого порядка, которые строятся описанным в разделе 2.1 способом с помощью (сигнатура состоит из символов $\sim, =$ арности 2):

- предикатных символов $\sim, =$.
- логических связок $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$.
- переменных $x, y, x_1, y_1, \dots$
- кванторов $\forall, \exists$.

Напомним формулировку закона 0 или 1, доказанную Ю. В. Глебским, Д. И. Коганом, М. И. Лиогоньким и В. А. Талановым в 1969 году [8], а также Р. Фагиным в 1976 году [7] (ниже мы приводим более общую формулировку, возникшую впервые в работе Дж. Спенсера [12]).

ТЕОРЕМА 3 (Дж. Спенсер [12]). *Если $p = p(n)$ — такая функция, что $np^a \rightarrow \infty$ и $(1 - p)n^a \rightarrow \infty$ для любого $a > 0$, а A — произвольное свойство графов, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо $\mathbb{P}(G(n, p) \in A) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, либо $\mathbb{P}(G(n, p) \in A) \rightarrow 1$.*

Далее речь пойдет о справедливости закона нуля или единицы для *разреженного случайного графа*, т.е. вероятности проведения ребра, равной $p = n^{-\alpha}$ для некоторого постоянного $\alpha > 0$. Говорят, что случайный граф подчиняется *закону 0 или 1*, если для любого свойства из класса свойств первого порядка (т.е. выразимого на языке первого порядка) вероятность

выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1. В частности, теорема 3 утверждает справедливость закона 0 или 1 для некоторого класса вероятностей проведения ребра $p = p(n)$.

В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шелак доказали [11], что случайный граф не подчиняется закону 0 или 1 тогда и только тогда, когда значение параметра α (показателя степени) либо равно $1 + 1/\ell$ для некоторого натурального ℓ , либо является рациональным числом из $(0, 1]$.

Основным средством при доказательстве законов 0 или 1 для свойств первого порядка случайных графов является *игра Эренфойхта*. Определим эту игру $\text{EHR}(G, H, k)$ на двух графах G и H с количеством раундов, равным k . В игре участвуют два игрока: Новатор и Консерватор. Игроки ходят по очереди, начиная с Новатора в первом раунде; каждый из игроков делает k ходов. В ν -м раунде, $1 \leq \nu \leq k$, Новатор выбирает вершину из любого графа, отличную от уже выбранных (он выбирает либо $x_\nu \in V(G)$ либо $y_\nu \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из другого графа, отличную от уже выбранных. К концу игры выбраны вершины $x_1, \dots, x_k \in V(G)$ и $y_1, \dots, y_k \in V(H)$. Консерватор побеждает в том и только том случае, когда отображение $\phi : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_k\}$, переводящее вершину x_ν в вершину y_ν для каждого $\nu \in \{1, \dots, k\}$, является изоморфизмом графов $G|_{\{x_1, \dots, x_k\}}$ и $H|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$.

В дальнейшей работе будем опираться на теорему Эренфойхта [4] о связи между, так называемой, элементарной эквивалентностью графов (т.е. неразличимостью с помощью формул первого порядка) и описанной игрой.

ТЕОРЕМА 4 (А. Эренфойхт [4]). *Для любых двух графов G, H и любого $i \in \mathbb{N}$ Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\text{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда, когда для любого свойства первого порядка, выражаемого предложением, кванторная глубина которого не превышает i , либо оба графа обладают этим свойством, либо оба графа не обладают.*

Случайный граф подчиняется k -закону нуля или единицы, если для любого свойства, выражаемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k , вероятность выполнения этого свойства стремится либо к 0, либо к 1.

Из теоремы 4 вытекает следующий результат о связи игры с законами нуля или единицы (см., например, [11, 2]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть k — произвольное натуральное число. С вероятностью, стремящейся к 1 при $n, t \rightarrow \infty$, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на двух независимых случайных графах $G(n, p)$, $G(t, p)$ в k раундах тогда и только тогда, когда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.*

2.3. Вспомогательные утверждения

Пусть G — некоторый фиксированный граф с v вершинами и e ребрами. Назовем отношение $\rho(G) = e/v$ *плотностью* графа G . Граф G называется *сбалансированным*, если плотность любого его подграфа H не превосходит его собственной плотности, т.е. выполнено следующее неравенство: $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G называется *строго сбалансированным*, если максимальная плотность ρ его подграфа H достигается ровно на нем самом и больше ни на ком, т.е. выполнено неравенство $\rho(H) < \rho(G)$ для всех собственных подграфов H графа G . Очевидно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любое дерево является строго сбалансированным графом.*

Сформулируем теорему о количестве копий произвольного фиксированного строго сбалансированного графа в случайном графе. Положим $\rho_{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}$. Введем случайную величину N_G , равную количеству копий графа G в случайном графе $G(n, p)$.

ТЕОРЕМА 6 ([3]). Пусть G — произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho_{\max}(G)})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho_{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G — строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|N_G - \mathbb{E}N_G| \leq \varepsilon \mathbb{E}N_G) = 1.$$

Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$N_G \xrightarrow{d} \xi \sim \text{Pois} \left(\frac{1}{a(G)} \right),$$

где $\text{Pois}(\lambda)$ — пуассоновское распределение с параметром λ .

Для графа $G(n, p)$, $p = n^{-1-1/\ell}$ где $\ell \in \mathbb{N}$, очевидным следствием утверждения 1 и теоремы 6 является следующее.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p = n^{-1-1/\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$.

1. Вероятность того, что случайный граф $G(n, p)$ является лесом, стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.
2. Для любого $s \in \mathbb{N}$ и любого дерева T с не более чем ℓ вершинами, вероятность того что $G(n, p)$ содержит хотя бы s компонент, изоморфных T , стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$.
3. С вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, в $G(n, p)$ не найдется деревьев на $\ell + 2$ вершинах.
4. Для любого дерева T с $\ell + 1$ вершиной $\mathbb{P}(T \subset G(n, p)) \rightarrow c(T) \notin \{0, 1\}$.

Введем следующие обозначения для описанных в следствии 1 свойств случайного графа. Будем обозначать:

- $\mathbf{F}$ свойство являться лесом.
- $\mathbf{C}_s(T)$ свойство содержать хотя бы s компонент, изоморфных T .
- $\mathbf{T}^*$ свойство не содержать деревьев на $\ell + 2$ вершинах.
- $\mathbf{T}(T)$ свойство содержать дерево, изоморфное T .

3. Доказательство теоремы 2

Далее мы отдельно докажем теорему для случая $k = 3$ и случая $k = 4$. Но прежде для полноты изложения и демонстрации метода докажем, что при $k = 2$ исключительным значением ℓ , при котором нарушается закон, является $\ell = 1$.

При $\ell \in \mathbb{N}$ пусть $P_\ell := \mathbf{T}(P_\ell) \cap \mathbf{F}$ — свойство содержать P_ℓ ациклическим графом. Заметим также, что число автоморфизмов P_ℓ равно 2.

- Пусть $\ell = 1$, т.е. $p = n^{-2}$. Докажем, что граф $G(n, p)$ не подчиняется 2-закону нуля или единицы, то есть существует формула кванторной глубины 2, вероятность истинности которой не стремится ни к 0, ни к 1.

По теореме 6 граф $G(n, p)$ обладает свойством $T(P_{\ell+1})$ с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1 (а именно $e^{-1/2}$), так как, очевидно, граф $P_{\ell+1}$ строго сбалансирован и имеет плотностью $1/2$. При этом $T(P_{\ell+1})$ на языке первого порядка записывается с помощью следующей формулы глубины 2:

$$\exists x_1 \exists x_2 ((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \sim x_2)).$$

Таким образом, $G(n, p)$ не подчиняется 2-закону 0 или 1, что и требовалось.

- Пусть теперь $p = n^{-(\ell+1)/\ell}$ и $\ell \geq 2$. По теореме 4 для доказательства того, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется 2-закону нуля или единицы, достаточно доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1 (при $n, m \rightarrow \infty$), у Консерватора есть выигрышная стратегия в 2 раундах в игре на двух независимых случайных графах $G(n, p(n))$ и $G(m, p(m))$. В силу следствия 1 достаточно доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в двух раундах на любых двух графах G, H , обладающих свойствами $F, C_s(T)$ при $T = P_1, T = P_2$ и $s = 2$ (см. Рис. 1). Действительно, оба графа P_1 и P_2 являются деревьями с не более ℓ вершинами.

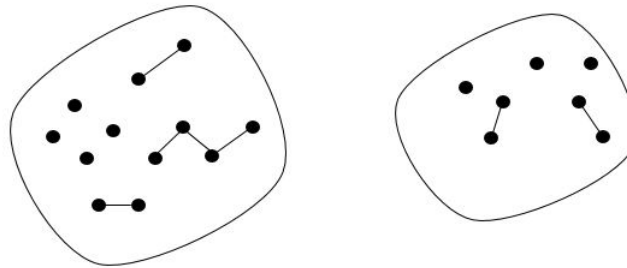


Рис. 1: Графы G и H , обладающие достаточными для победы Консерватора свойствами

На таких двух графах Консерватор побеждает за два раунда, так как:

1. Если в первом раунде Новатор в одном из графов выберет вершину с ребром, то Консерватор также выберет вершину, соединенную ребром с некоторой другой вершиной. Во втором раунде, какую бы вершину в каком бы графе Новатор не выбрал (соединенную ребром с первой или же нет), Консерватор выберет нужную ему вершину (например, изолированную в случае, когда Новатор выбрал вершину, не смежную с первой).
2. Если Новатор в первом раунде выберет изолированную вершину, то Консерватор тоже выберет изолированную вершину в другом графе. Во втором раунде какой бы выбор не сделал Новатор, Консерватор сделает идентичный выбор, просто выбрав произвольную вершину, отличную от первой.

Таким образом, Консерватор побеждает в двух раундах. Следовательно, закон нуля или единицы выполняется.

3.1. $k = 3$

- Пусть $\ell = 4$, т.е. $p = n^{-5/4}$ (случаи $\ell = 2, \ell = 3$ аналогичны — во всех случаях достаточно рассмотреть свойство $P_{\ell+1}$). Свойство $P_{\ell+1}$ для леса записывается на языке первого

порядка с помощью следующей формулы φ :

$$\begin{aligned} \exists x_1 \exists x_2 \quad & [\exists x_3 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\ & [\exists x_3 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \approx x_3)] \wedge \\ & [\exists x_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \approx x_3)]. \end{aligned}$$

В силу следствия 1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \in \mathbf{F}) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathbf{P}_{\ell+1}, G(n, p) \in \mathbf{F}) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \in \mathbf{P}_{\ell+1}) + o(1), \end{aligned}$$

что стремится к числу, отличному от 0 и 1, при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 5$, т.е. $p = n^{-6/5}$. Рассмотрим свойство $\mathbf{T}(F)$, где F — путь на 5 вершинах, к центральной вершине которого добавлено ребро (см. Рис. 2).

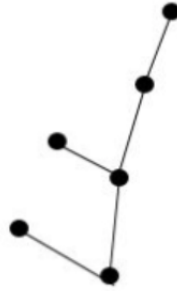


Рис. 2: Путь на 5 вершинах, к центральной вершине которого добавлено ребро.

Это свойство для леса записывается на языке первого порядка следующей формулой φ :

$$\begin{aligned} \exists x_1 \quad \exists x_2 \quad & \left[\left(\exists x_3 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \right) \right. & \wedge \\ & \left. \left(\exists x_3 (x_1 \approx x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \right) \right] & \wedge \\ \exists x_2 \quad & \left[\left(\exists x_3 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \right) \right. & \wedge \\ & \left. \neg \left(\exists x_3 (x_1 \approx x_3) \wedge (x_2 \sim x_3) \right) \right] & \wedge \\ \exists x_2 \quad & \left[\neg \left(\exists x_3 (x_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \sim x_2) \right) \right. & \wedge (x_1 \sim x_2) \left. \right] \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю из следствия 1 мгновенно получаем, что $\mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi)$ не имеет предела, а значит случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 6$, т.е. $p = n^{-7/6}$. Свойство $\mathbf{P}_{\ell+1}$ для леса записывается на языке первого

порядка следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \exists x_1 \quad & \left[\left(\exists x_2 \exists x_3 (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \sim x_1) \wedge (x_3 \sim x_1) \right) \right] & \wedge \\
 & \left[\neg \exists x_2 \left((x_1 \sim x_2) \wedge (\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \right. \right. & \Rightarrow \\
 & \quad \left. \left. (x_3 = x_1) \right) \right] & \wedge \\
 & \left[\neg \exists x_2 \left(\exists x_3 (x_3 \sim x_1) \wedge (x_3 \sim x_2) \right) \right. & \wedge \\
 & \quad \left. \left(\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow (x_3 \sim x_1) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Из следствия 1 получаем, что вероятность истинности этой формулы не имеет предела, а значит случайный граф $G(n, p)$ не подчиняется 3-закону нуля или единицы.

- Пусть $\ell = 7$, т.е. $p = n^{-8/7}$. По теореме 4 достаточно доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1 (при $n, m \rightarrow \infty$), Консерватор имеет выигрышную стратегию в 3 раундах в игре на двух независимых случайных графах $G(n, p(n))$ и $G(m, p(m))$.

В силу следствия 1 достаточно доказать, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в трех раундах на любых двух графах G, H , обладающих свойствами $C_s(T)$ при

$$T \in \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, T^*, K_{1,3}, K_{1,4}, \text{изолированная вершина}\}$$

и $s = 3$, где T^* — дерево, изображенное на Рис. 2.

Рассмотрим два графа G и H , обладающих перечисленными свойствами, и опишем выигрышную стратегию Консерватора в 3 раундах.

Очевидно следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если*

1) *вершины x_1, y_1 , выбранные в первом раунде, содержатся в компонентах X_1, Y_1 соответственно таких, что $|X_1| \geq 2$ тогда и только тогда, когда $|Y_1| \geq 2$,*

2) *Новатор выбирает во втором раунде вершину в компоненте связности, отличной от той, которой принадлежит вершина, выбранная в первом раунде,*

то для того, чтобы выиграть, Консерватору достаточно чтобы компонента, в которой он выберет вершину во втором раунде содержала хотя бы две вершины тогда и только тогда, когда хотя бы две вершины содержит компонента с вершиной, выбранной в том же раунде Новатором.

Заметим также, что, если за первые два раунда Консерватор не проиграл, то в третьем раунде Новатору бессмысленно выбирать вершину в новой компоненте, в которой еще не выбрано ни одной вершины. В этой связи и в силу предложения 2 мы можем считать, что Новатор не меняет в ходе игры компонент связности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если Новатор в первом раунде выбирает вершину в компоненте, в которой присутствует не более 3 вершин, то стратегия Консерватора очевидна — он просто выбирает изоморфную компоненту и далее копирует ходы Новатора.*

Итак, мы можем считать, что Новатор в первом раунде выбирает вершину в компоненте, в которой хотя бы 4 вершины, а во втором и третьем раунде не выбирает вершину в новой компоненте связности.

Пусть x_1 — вершина, выбранная Новатором в первом раунде. Пусть $D(x_1)$ — наибольшая длина простого пути в соответствующем графе, начинающемся с вершины x_1 . Стратегия Консерватора будет зависеть от значения величины $D(x_1)$. Пусть, кроме того, $N(x_1)$ — количество соседей вершины x_1 , $N_i(x_1)$ — количество листов, расположенных на расстоянии i от вершины x_1 , $N_{\geq i}(x_1)$ — количество листов, расположенных на расстоянии хотя бы i от вершины x_1 . В силу сказанного выше либо $D(x_1) = 1$ и $N(x_1) \geq 3$, либо $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, либо $D(x_1) \geq 3$.

Вершину, выбранную Консерватором в первом раунде, будем обозначать y_1 .

1. Если $D(x_1) = 1$ и $N(x_1) \geq 3$, то Консерватор выберет неконцевую вершину, принадлежащую компоненте, изоморфной P_3 . В следующих двух раундах Консерватор и Новатор выбирают соседей выбранной в первом раунде вершины, и тем самым в третьем раунде Консерватор побеждает.
2. Пусть $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) > 0$. В данном случае Консерватор выбирает одну из центральных вершин компоненты, изоморфной P_4 .

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1 , которая при этом является концевой вершиной. Консерватор тогда выбирает вершину, смежную с y_1 , которая также является концевой вершиной. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если Новатор во втором раунде выбирает вершину смежную с x_1 , которая не является концевой, тогда и Консерватор выбирает не концевую вершину смежную с y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, расположенную на расстоянии 2 от x_1 , то и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: в обоих графах есть общий сосед выбранных вершин, сосед только первой из двух, а также вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

3. Если $D(x_1) = 2$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает центральную вершину компоненты, изоморфной P_5 .

Если во втором раунде Новатор выбирает смежную вершину с x_1 , тогда и Консерватор выбирает вершину, смежную с y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если же Новатор выбирает вершину, расположенную на расстоянии 2 от x_1 , то и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: в обоих графах есть общий сосед выбранных вершин, сосед только первой из двух выбранных вершин, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

4. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_2) = 1$, то Консерватор выберет концевую вершину, принадлежащую P_4 .

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1 , тогда и Консерватор выбирает вершину, смежную с y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если Новатор во втором раунде выбирает вершину на расстоянии 2 от выбранной ранее, тогда и Консерватор выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная сразу с двумя выбранными ранее вершинами, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если Новатор во втором раунде выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от выбранной ранее вершины, то Консерватор выберет вершину на расстоянии 3 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

5. Пусть $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) > 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$. Консерватор выбирает неконцевую и нецентральную вершину P_5 , к центральной вершине которого добавлено ребро наружу (см. Рис 2).

Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1 , не являющуюся листом. Тогда и Консерватор выберет вершину, смежную с вершиной y_1 , не являющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершины, смежная только с первой вершиной, вершины, смежные только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает лист, смежный с x_1 . Тогда и Консерватор выберет лист, смежный с вершиной y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1 , не являющуюся листом. Тогда Консерватор выберет вершину на расстоянии 2 от вершины y_1 , не являющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина смежная только с первой вершиной, вершина смежная с первой и со второй вершинами, вершина смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает лист на расстоянии 2 от x_1 . Тогда и Консерватор выберет лист на расстоянии 2 от вершины y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Предположим, что во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от x_1 . Тогда Консерватор выберет вершину на расстоянии 3 от y_1 . В

третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

6. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) > 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает одну из двух центральных вершин P_6 .

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1 . Тогда и Консерватор выберет смежную вершину с вершиной y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Пусть во втором раунде Новатор выбирает лист на расстоянии 2 от x_1 . Тогда и Консерватор выберет лист на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина смежная только с первой, вершина, смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1 , не являющуюся листом. Тогда Консерватор также выбирает не лист на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, вершина смежная с первой и со второй вершинами, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии хотя бы 3 от x_1 . Тогда Консерватор выберет вершину на расстоянии 3 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

7. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) > 0$, $N_2(x_1) = 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает неконцевую и нецентральную вершину P_5 .

Если во втором раунде Новатор выбирает лист, смежный с x_1 , то и Консерватор выберет лист, смежный с y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если во втором раунде Новатор выбирает, смежную с x_1 , не являющуюся листом, то и Консерватор выберет также вершину, смежную с y_1 , не являющуюся листом. В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от x_1 , то и Консерватор выберет вершину на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах есть все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная как с первой, так и со второй вершиной, вершина смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй.

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии не менее 3 от x_1 , то Консерватор выбирает вершину на расстоянии 3 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой, вершина, смежная только со второй, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

8. Если $D(x_1) \geq 3$ и $N(x_1) \geq 2$, $N_1(x_1) = 0$, $N_2(x_1) = 0$, $N_{\geq 3}(x_1) > 0$, то Консерватор выбирает центральную вершину P_7 .

Если во втором раунде Новатор выбирает вершину, смежную с x_1 , то и Консерватор выберет смежную вершину с вершиной y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии 2 от вершины x_1 . Тогда Консерватор также выбирает вершину на расстоянии 2 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах есть все возможные наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная как с первой, так и со второй вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Пусть во втором раунде Новатор выбирает вершину на расстоянии хотя бы 3 от вершины x_1 . Тогда Консерватор выбирает вершину на расстоянии 3 от y_1 . В третьем раунде Консерватор победит, так как в обоих графах остались одинаковые наборы “расширений” двух выбранных вершин, а именно: вершина, смежная только с первой вершиной, вершина, смежная только со второй вершиной, и вершины, не смежные ни с первой, ни со второй, и только они.

Таким образом, Консерватор побеждает в трех раундах. Следовательно, закон нуля или единицы выполняется.

3.2. $k = 4$

Для $\ell \in [6]$ закон нуля или единицы уже опровергнут в предыдущем пункте. В этом разделе мы докажем, что для каждого $\ell \in \{7, 8, \dots, 40, 72\}$ 4-закон нуля или единицы не выполняется, так как найдется такое дерево F на $\ell+1$ вершине, что существование подграфа, изоморфного F (при условии, что наш граф — это лес), записывается с помощью формулы глубины 4.

Для более наглядной и короткой записи формулы, введем ряд вспомогательных обозначений:

1. Формула, записанная ниже, обозначает, что в графе (который является лесом) содержится путь на 5 вершинах, концевая вершина которого совпадает с x_1 :

$$D_5(x_1) = \exists x_2 \exists x_3 \left((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \right) \quad \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_4 \approx x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \right) \quad \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right).$$

2. Формула, записывающая свойство содержать путь на 6 вершинах, выходящий из x_1 , имеет следующую запись:

$$D_6(x_1) = \exists x_2 \exists x_3 \left((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_4 \approx x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge \\ \left(\exists x_3 (\exists x_4 (x_3 \neq x_4) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_2)) \right).$$

3. Записанная ниже формула обозначает, что найдется путь на 7 вершинах, исходящий из x_1 , любой сосед пятой вершины которого имеет соседа отличного от него:

$$D_7(x_1) = \exists x_2 \exists x_3 \left((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_4 \approx x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge \\ \left(\exists x_3 (\exists x_4 (x_3 \neq x_4) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \approx x_4)) \right) \wedge \\ \left(\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \neq x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \right).$$

4. Записанная ниже формула обозначает, что найдется путь на 8 вершинах, исходящий из x_1 , такой что, у любого соседа пятой вершины есть сосед отличный от этой вершины и любая вершина на расстоянии 2 от пятой вершины имеет соседа не смежного с этой пятой вершиной:

$$D_8(x_1) = \exists x_2 \exists x_3 \left((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_4 \approx x_2) \wedge (x_1 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge \\ \left(\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)) \right) \wedge \\ \left(\forall x_3 (\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \right. \\ \left. (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2)) \right).$$

5. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 1 от x_1 :

$$L_1(x_1) = \left[\forall x_2 (x_1 \sim x_2) \Rightarrow (\exists x_3 (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)) \right].$$

6. С помощью L_2 будем обозначать формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 2 от x_1 :

$$L_2(x_1) = \left[\forall x_2 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_3 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_2) \right) \\ \left(\exists x_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_1) \right) \end{array} \right) \right] \Rightarrow$$

7. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 3 от x_1 :

$$L_3(x_1) = \left[\forall x_2 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_3 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_4 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \wedge \\ (x_3 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \end{array} \right) \right) \wedge \\ \left(\exists x_3 \exists x_4 (x_3 \neq x_4) \wedge (x_2 \sim x_4) \wedge (x_2 \sim x_3) \right) \end{array} \right) \right] \Rightarrow$$

8. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 4 от x_1 :

$$L_4(x_1) = \left[\forall x_2 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_3 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_4 (x_1 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \wedge \\ (x_3 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \end{array} \right) \right) \wedge \\ \left(\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2) \right) \end{array} \right) \right] \Rightarrow$$

9. Рассмотрим формулу, записывающую свойство отсутствия листьев на расстоянии 5 от x_1 :

$$L_5(x_1) = \forall x_2 \left[\begin{array}{l} \left(\exists x_3 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_4 (x_1 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \end{array} \right) \right] \wedge \\ \left[\forall x_3 [x_3 \sim x_2] \Rightarrow [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \neq x_2)] \right] \end{array} \right] \Rightarrow$$

10. Рассмотрим формулу, из которой следует отсутствие листьев на расстоянии 6 от x_1 :

$$L_6(x_1) = \forall x_2 \left[\begin{array}{l} \left(\exists x_3 \left(\begin{array}{l} \left(\exists x_4 (x_1 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_3 \sim x_4) \right) \end{array} \right) \right] \wedge \\ \left[\forall x_3 \left(\begin{array}{l} \left(\left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \wedge (x_2 \neq x_3) \right) \wedge \\ \left(\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_2) \right) \end{array} \right) \right] \end{array} \right] \Rightarrow$$

Рассмотренная формула означает, что для любой вершины x_2 на расстоянии 4 от x_1 и у любой вершины на расстоянии 2 от x_2 есть еще один сосед (отличный от общего соседа этой вершины с x_2), а следовательно, отсутствуют листья на расстоянии 6 от x_1 .

Конъюнкция L_6 и L_4 равносильна отсутствию листьев на расстояниях 4 или 6.

11. Рассмотрим, наконец, формулу, утверждающую наличие хотя бы 3 соседей у x_1 :

$$N_3(x_1, x_2, x_3) = \left[\exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_2 \neq x_3) \wedge (x_3 \neq x_4) \wedge (x_2 \neq x_4) \right. \\ \left. \wedge (x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_1 \sim x_4) \right]$$

Теперь перейдем непосредственно к записи искоемых формул.

- Пусть $\ell = 7$, т.е. $p = n^{-8/7}$. Докажем, что вероятность истинности формулы $\exists x_1 D_8(x_1)$ на случайном графе стремится к некоторому пределу $c \in (0, 1)$.

По утверждению пункта 4 следствия 1

$$\mathbb{P}(G(n, p) \supset P_8) \rightarrow c \in (0, 1).$$

Кроме того, пусть Q — это свойство, которое заключается в том, что граф является лесом, в котором отсутствуют деревья на 9 вершинах. По утверждению пункта 1 следствия 1

$$\mathbb{P}(G(n, p) \in Q) \rightarrow 1.$$

Следовательно, разложив

$$\mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi) = \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \in Q) \\ + \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \notin Q),$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset P_8, G(n, p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset P_8) \\ &\quad - \mathbb{P}(G(n, p) \supset P_8, G(n, p) \notin Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset P_8) + o(1) \rightarrow c. \end{aligned}$$

- Пусть $\ell = 8$, т.е. $p = n^{-9/8}$. Тогда формула

$$\exists x_1 N_3(x_1) \wedge D_5(x_1) \wedge L_1(x_1)$$

записывает (для леса) свойство, существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_3, P_3, P_5 с общим концом. Докажем, что вероятность истинности данной формулы для леса на случайном графе стремится к некоторой $c \in (0, 1)$.

Обозначим G_8 рассматриваемый подграф, образованный путями P_3, P_3, P_5 с общим концом. По утверждению пункта 4 следствия 1

$$\mathbb{P}(G(n, p) \supset G_8) \rightarrow c \in (0, 1).$$

Кроме того, пусть Q — это свойство, которое заключается в том, что граф является лесом. По утверждению пункта 1 следствия 1

$$\mathbb{P}(G(n, p) \in Q) \rightarrow 1.$$

Следовательно, разложив

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \in Q) \\ &\quad + \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \notin Q),\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi) &= \mathbb{P}(G(n, p) \models \varphi, G(n, p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset G_8, G(n, p) \in Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset G_8) \\ &\quad - \mathbb{P}(G(n, p) \supset G_8, G(n, p) \notin Q) + o(1) \\ &= \mathbb{P}(G(n, p) \supset G_8) + o(1) \rightarrow c.\end{aligned}$$

- Пусть $\ell = 9$, т.е. $p = n^{-10/9}$. Тогда формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4 с общим концом. Вероятность истинности данной формулы на случайном графе стремится к некоторой константе $c \in (0, 1)$, что доказывается по аналогии со случаем $\ell = 8$.

Во всех дальнейших пунктах мы будем пользоваться схемой доказательства, аналогичной предыдущим пунктам. Поэтому мы в каждом случае приведем формулу и опишем свойство, которое она записывает, но опустим вывод того, что предел вероятности отличен от 0 и 1, из следствия 1.

- Пусть $\ell = 10$, т.е. $p = n^{-11/10}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_5(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4, P_4, P_5 с общим концом.

- Пусть $\ell = 11$, т.е. $p = n^{-12/11}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_6(x_1) \wedge L_1(x_1) \wedge L_2(x_1)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_4, P_4, P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 12$, т.е. $p = n^{-13/12}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^3 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5 с общим концом.

- Пусть $\ell = 13$, т.е. $p = n^{-14/13}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_6(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^3 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5, P_5, P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 14$, т.е. $p = n^{-15/14}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_7(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^3 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 15 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_5, P_5, P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 15$, т.е. $p = n^{-16/15}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6 с общим концом.

- Пусть $\ell = 16$, т.е. $p = n^{-17/16}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_7(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 17 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6, P_6, P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 17$, т.е. $p = n^{-18/17}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 18 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_6, P_6, P_8 .

- Пусть $\ell = 18$, т.е. $p = n^{-19/18}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^5 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованного тремя путями P_7 с общим концом.

- Пусть $\ell = 19$, т.е. $p = n^{-20/19}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^5 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 20 вершин) свойство существование подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_7, P_7, P_8 .

- Пусть $\ell = 20$, т.е. $p = n^{-21/20}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned} \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge D_8(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^5 L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & [\exists x_3 \exists x_4 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)]) \wedge \\ & (\exists x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \wedge \\ & [\neg [\exists x_4 (x_1 \approx x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]]). \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 21 вершины) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованного одним P_8 и двумя P_7 с общим концом, при этом к одному из трех путей прикреплен лист, находящийся на расстоянии 2 от их общего конца.

- Пусть $\ell = 21$, т.е. $p = n^{-22/21}$. Тогда подходящая нам формула

$$\exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^6 L_i(x_1) \right)$$

записывает (для леса) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 с общим концом.

- Пусть $\ell = 22$, т.е. $p = n^{-23/22}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned} \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & [\exists x_3 \exists x_4 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\ & (\exists x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \wedge \\ & [\neg [\exists x_4 (x_1 \approx x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]])) \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 23 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , к одному из которых прикреплен лист, находящийся на расстоянии 2 от общего конца.

- Пусть $\ell = 23$, т.е. $p = n^{-24/23}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned} \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & [\exists x_3 \exists x_4 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\ & (\exists x'_3 \exists x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\ & [\neg [\exists x_4 (x_1 \approx x_4) \wedge (x_3 \sim x_4)]] \wedge \\ & [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)] \wedge \\ & [\neg [\exists x_4 (x_1 \approx x_4) \wedge (x'_3 \sim x_4)]])) \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 24 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 и двумя листьями, соединенными ребрами с вершинами, находящимися на расстоянии 1 от x_1 (см. Рис. 3).

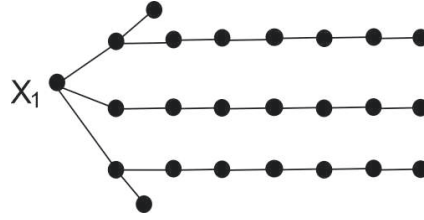


Рис. 3: Дерево на 24 вершинах

- Пусть $\ell = 24$, т.е. $p = n^{-25/24}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
 \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
 & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
 & \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
 & \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)])) \wedge \\
 & (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
 & \quad (\exists x_3 [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
 & \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_1)]) \wedge \\
 & \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
 & \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2)]))
 \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 25 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями, находящимися на расстояниях 1 и 2 от одной и той же вершины одного из P_8 , смежный с x_1 (см. Рис. 4).

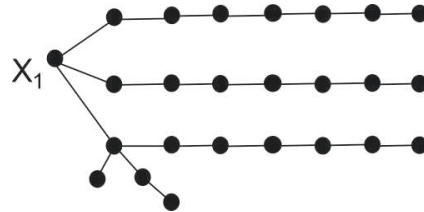


Рис. 4: Дерево на 25 вершинах

- Пусть $\ell = 25$, т.е. $p = n^{-26/25}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)]]]) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3)]) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad [\exists x_3 [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)] \wedge \\
& \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2)]]])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 26 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Из них два листа находятся на расстоянии 1, а третий лист на расстоянии 2 от вершин смежных с x_1 (см. Рис. 5).

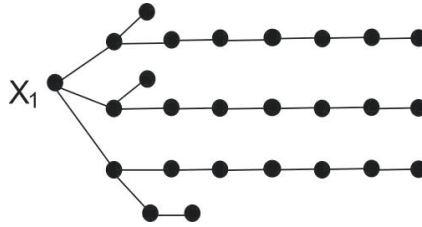
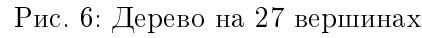


Рис. 5: Дерево на 26 вершинах

- Пусть $\ell = 26$, т.е. $p = n^{-27/26}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 [(x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x'_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]]]) \wedge \\
& (\forall x_2 [\exists x_3 [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x_1)] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 \exists x'_3 [(x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \approx x_1) \wedge (x'_3 \approx x_1)]]]) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad (\forall x_3 [\exists x_4 [(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_2)] \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 [(x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2)]]]) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2)]])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 27 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного бинарному дереву с глубиной 3 и корнем степени 3, к четырем листьям $v_1, \dots, v_4$ которого, имеющих общего предка на расстоянии 2 от них, подвешено по одному листу, а также еще один лист подвешен к одному из родителей $v_1, \dots, v_4$. (см. Рис. 6).



- $$\begin{aligned} \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\ (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\ [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)])) \wedge \\ (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ [\exists x_3 \exists x'_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\ (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3)])) \end{aligned}$$

Рис. 7: Дерево на 28 вершинах

- Пусть $\ell = 28$, т.е. $p = n^{-29/28}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \neq x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_2 \sim x_1) \wedge \\
& \quad [\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \quad \quad \neg (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))]) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge [\exists x'_3 \exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \quad \quad (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))]) \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 29 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями. Один из этих листьев находится на расстоянии 2, а второй лист — на расстоянии 6 от вершин этих P_8 , смежных с x_1 (см. Рис. 8).

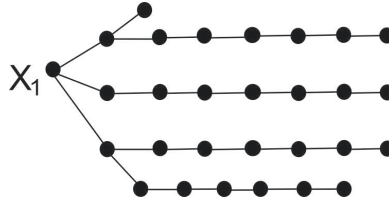


Рис. 8: Дерево на 29 вершинах

- Пусть $\ell = 29$, т.е. $p = n^{-30/29}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \neq x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_2 \sim x_1) \wedge \\
& \quad [\exists x'_3 \exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x'_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \neq x_1) \wedge (x_2 \neq x'_3)] \wedge \\
& \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x'_3) \wedge (x_4 \neq x_2)]) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge [\exists x'_3 \exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge \\
& \quad \quad (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))]) \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 30 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и двумя листьями. Один из этих листьев находится на расстоянии 3, а второй лист — на расстоянии 6 от вершин этих P_8 , смежных с x_1 (см. Рис. 9).

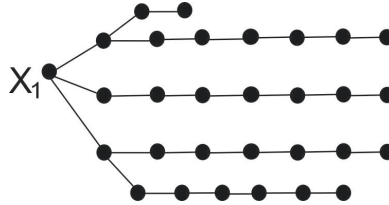


Рис. 9: Дерево на 30 вершинах

- Пусть $\ell = 30$, т.е. $p = n^{-31/30}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \not\sim x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad (\exists x_3 [(x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \not\sim x_1)]) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)])) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (x_3 \sim x_2) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 31 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Два листа находятся на расстояниях 1 и 2 от одной и той же вершины, смежной с x_1 , а третий лист — на расстоянии 6 от некоторой другой вершины, смежной с x_1 (см. Рис. 10).

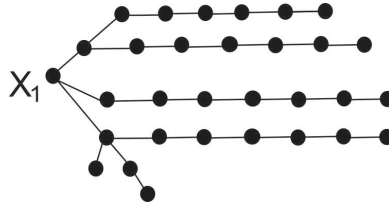


Рис. 10: Дерево на 31 вершине

- Пусть $\ell = 31$, т.е. $p = n^{-32/31}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)])) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3)]) \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2))]))
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 32 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и тремя листьями. Два листа находятся на расстоянии 2, а третий лист — на расстоянии 6 от вершин, смежных с x_1 (см. Рис. 11).

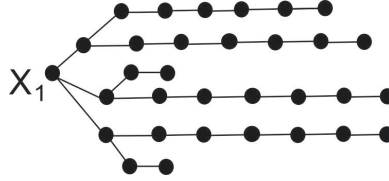


Рис. 11: Дерево на 32 вершинах

- Пусть $\ell = 32$, т.е. $p = n^{-33/32}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)])) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3)]) \\
& (\exists x_4 [\exists x_2 \exists x_3 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge \\
& \quad \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (x_3 \sim x_4) \Rightarrow \exists x_2 (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\
& \quad [\exists x_2 (\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \approx x_2))]) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2))]))
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 33 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному тремя путями P_8 , исходящими из одной и той же вершины x_1 и четырьмя дополнительными “ветвями” (см. Рис. 12).

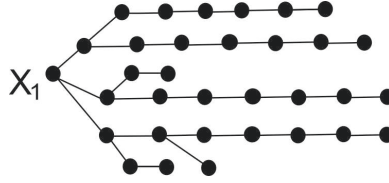


Рис. 12: Дерево на 33 вершинах

- Пусть $\ell = 33$, т.е. $p = n^{-34/33}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned} \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^5 L_i(x_1) \right) \wedge \\ & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\ & [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\ & (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)]) \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 34 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному вершиной степени 3, каждый сосед которой отождествлён с концами двух путей P_6 (см. Рис. 13).

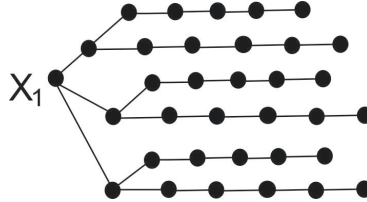


Рис. 13: Дерево на 34 вершинах

- Пусть $\ell = 34$, т.е. $p = n^{-35/34}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2,4}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x_3 [\exists x_4 (x_2 \sim x_4) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \quad [\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (x_4 \approx x_2)])) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3)]) \\
& (\exists x_4 [\exists x_2 \exists x_3 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge \\
& \quad (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4)] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (x_3 \sim x_4) \Rightarrow \exists x_2 (x_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \sim x_3)] \wedge \\
& \quad [\exists x_2 (\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \sim x_4) \wedge (x_1 \approx x_2) \wedge (x_2 \neq x_4))]) \wedge \\
& (\exists x_2 [x_2 \sim x_1] \wedge \\
& \quad [\forall x_3 (\exists x_4 (x_4 \sim x_2) \wedge (x_4 \sim x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)) \Rightarrow \\
& \quad \quad (\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \approx x_2))]) \wedge \\
& (\forall x_3 [(\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3)) \wedge \\
& \quad (\neg (\exists x_4 (x_3 \sim x_4) \wedge (\exists x'_3 (x'_3 \sim x_4) \wedge (x'_3 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x'_3))))]) \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x'_4 \sim x_3) \wedge \\
& \quad \quad (x_4 \neq x'_4) \wedge (x_4 \approx x_1) \wedge (x'_4 \approx x_1)])]
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 35 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 14.

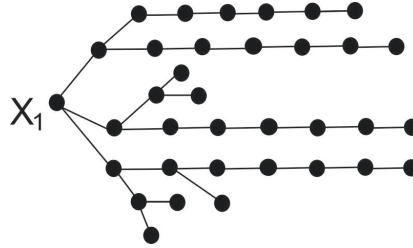


Рис. 14: Дерево на 35 вершинах

- Пусть $\ell = 35$, т.е. $p = n^{-36/35}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_2(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]) \wedge \\
& (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
& \quad \quad (x_4 \approx x_1) \wedge (x'_4 \approx x_1)])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 36 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 15.

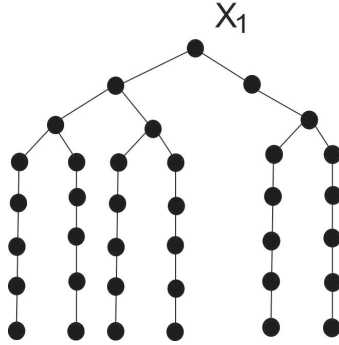


Рис. 15: Дерево на 36 вершинах

- Пусть $\ell = 36$, т.е. $p = n^{-37/36}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \\
& \quad \quad [\neg (\exists x'_3 (x'_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_3))]) \wedge \\
& (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
& \quad \quad (x_4 \approx x_1) \wedge (x'_4 \approx x_1)])
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 37 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 16.

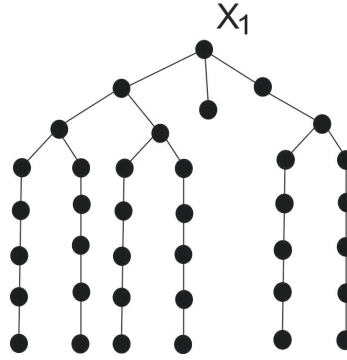


Рис. 16: Дерево на 37 вершинах

- Пусть $\ell = 37$, т.е. $p = n^{-38/37}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \left(\bigwedge_{i=2}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
& \quad \quad (x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]) \wedge \\
& (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
& \quad \quad (x_4 \approx x_1) \wedge (x'_4 \approx x_1)]) \wedge \\
& (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \\
& \quad \quad [\neg (\exists x'_3 (x'_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_3))]) \wedge \\
& (\exists x_2 \exists x'_2 (x_2 \sim x_1) \wedge (x'_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x'_2) \wedge \\
& \quad (\forall x_3 [((x_2 \sim x_3) \vee (x'_2 \sim x_3)) \Rightarrow (x_3 = x_1)])) \wedge \\
& (\exists x_2 \exists x'_2 (x_2 \neq x'_2) \wedge (x_2 \sim x_1) \wedge (x'_2 \sim x_1) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)) \wedge \\
& \quad (\exists x_3 (x_3 \sim x'_2) \wedge (x_3 \neq x_1)))
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 38 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 17.

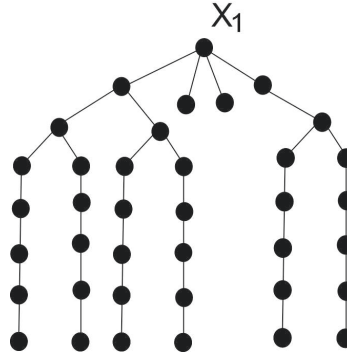


Рис. 17: Дерево на 38 вершинах

- Пусть $\ell = 38$, т.е. $p = n^{-39/38}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
 \exists x_1 \quad & N_2(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^5 L_i(x_1) \right) \wedge \\
 & (\forall x_2 (x_1 \sim x_2) \Rightarrow \\
 & \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
 & \quad \quad (x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]) \wedge \\
 & (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
 & \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
 & \quad \quad (x_4 \sim x_1) \wedge (x'_4 \sim x_1)])
 \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 39 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 18.

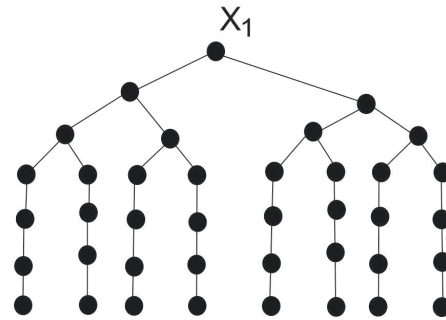


Рис. 18: Дерево на 39 вершинах

- Пусть $\ell = 39$, т.е. $p = n^{-40/39}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
 \exists x_1 \quad & N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
 & (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
 & \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
 & \quad \quad (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3)])
 \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 40 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, образованному вершиной степени 3, каждый сосед которой отождествлён с концами двух путей P_7 (см. Рис. 19).

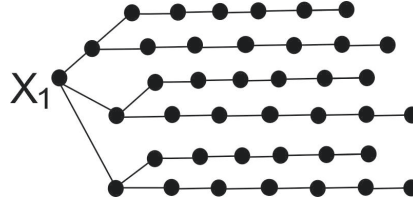


Рис. 19: Дерево на 40 вершинах

- Пусть $\ell = 40$, т.е. $p = n^{-41/40}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
 \exists x_1 \quad & \left(\bigwedge_{i=2}^5 L_i(x_1) \right) \wedge \\
 & (\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge \\
 & \quad [\exists x_3 \exists x'_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x'_3 \sim x_2) \wedge \\
 & \quad \quad (x_3 \neq x'_3) \wedge (x_3 \neq x_1) \wedge (x'_3 \neq x_1)]) \wedge \\
 & (\exists x_2 \exists x'_2 (x_2 \sim x_1) \wedge (x'_2 \sim x_1) \wedge (x_2 \neq x'_2) \wedge \\
 & \quad (\forall x_3 [((x_2 \sim x_3) \vee (x'_2 \sim x_3)) \Rightarrow (x_3 = x_1)])) \wedge \\
 & (\forall x_2 (\exists x_3 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)) \Rightarrow \\
 & \quad (\exists x'_3 (x_2 \sim x'_3) \wedge (x'_3 \neq x_3) \wedge (x'_3 \neq x_1))) \wedge \\
 & (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
 & \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
 & \quad \quad (x_4 \approx x_1) \wedge (x'_4 \approx x_1)])
 \end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 41 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 20.

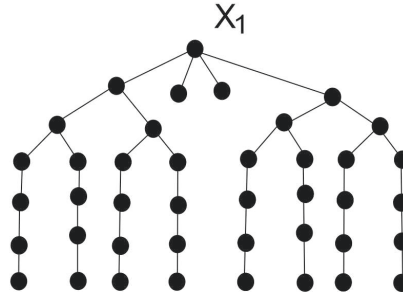


Рис. 20: Дерево на 41 вершине

- Пусть $\ell = 72$, т.е. $p = n^{-73/72}$. Тогда подходящая нам формула

$$\begin{aligned}
& \exists x_1 \quad N_3(x_1) \wedge \left(\bigwedge_{i=3}^6 L_i(x_1) \right) \wedge \\
& (\forall x_2 [x_2 \sim x_1] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_3 (x_3 \sim x_2) \wedge (x_3 \neq x_1)] \wedge \\
& \quad \neg [\exists x_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_4 \neq x_2)]) \wedge \\
& (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \quad (\exists x'_3 (x'_3 \neq x_1) \wedge (x_3 \neq x'_3) \wedge \\
& \quad [\exists x_2 (x_2 \sim x'_3) \wedge (x_2 \sim x_1)] \wedge \\
& \quad [\exists x_2 (x_2 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x'_3)] \wedge \\
& \quad [\exists x_4 (x_4 \sim x'_3) \wedge (x_4 \sim x_1)])) \wedge \\
& (\forall x_3 [\exists x_2 (x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge (x_1 \neq x_3)] \Rightarrow \\
& \quad [\exists x_4 \exists x'_4 (x_4 \sim x_3) \wedge (x_3 \sim x'_4) \wedge (x_4 \neq x'_4) \wedge \\
& \quad (x_4 \sim x_1) \wedge (x'_4 \sim x_1)]) \wedge
\end{aligned}$$

записывает (для леса, все деревья которого имеют не более 73 вершин) свойство существования подграфа, изоморфного дереву, изображенному на Рис. 21.

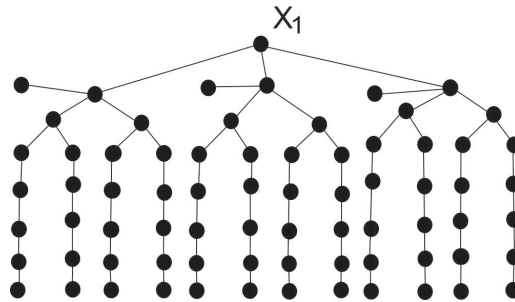


Рис. 21: Дерево на 73 вершинах

4. Заключение

В работе был исследован вопрос о справедливости k -закона нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-1-1/\ell})$ при $k \in \{2, 3, 4\}$ и $\ell \in \mathbb{N}$.

Были получены следующие результаты. При $k = 2$ закон справедлив тогда и только тогда, когда $\ell \geq 2$. При $k = 3$ закон справедлив при $\ell \geq 7$. Наконец, при $k = 4$ закон нарушается при $\ell \in \{1, 2, \dots, 39, 40, 72\}$. Мы предполагаем, что и при $\ell \in \{41, 42, \dots, 71\}$ закон нарушается, но построить подходящих формул нам не удалось. Было бы интересно понять, существуют ли какие-то “пропуски” в множестве ℓ , при которых 4-закон нарушается.

В дальнейшем мы планируем значительно улучшить известную верхнюю оценку на наименьшее ℓ , при котором 4-закон справедлив. Также было бы интересно рассмотреть остальные $k \geq 5$, но получение полного описания всех ℓ , при которых закон будет нарушаться, выглядит неподъемной задачей. Тем не менее, разработка новых методов могла бы помочь значительно сократить разрыв между нижней и верхней оценкой на наименьшее ℓ , при котором справедлив k -закон, в теореме 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верещагин, Н.К., Шень, А. Языки и исчисления // МЦНМО. 2012. 4-е изд. С. 240.
2. Жуковский, М.Е., Островский, Л.Б. Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов // Изв. РАН. Сер. матем.- 2017.- Вып. 81.- С. 100–113.
3. Bollobás, B. Threshold functions for small subgraphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. P. 197–206.
4. Ehrenfeucht, A. An application of games to the completeness problem for formalized theories // Warszawa, Fund.Math. 1960. P. 121–149.
5. Erdős, P., Rényi, A. On Random Graphs // Publicationes Mathematicae (Debrecen). 1959. Vol. 6. P. 290–297.
6. Erdős, P., Rényi, A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1960. P. 17–61.
7. Fagin, R. Probabilities in Finite Models // J. Symbolic Logic. 1976. Vol. 41. P. 50–58.
8. Глебский, Ю.В., Коган, Д.И., Легонький, М.И., Таланов, В.А. Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика 1969. Т. 2. С. 17–26.
9. Libkin, L. Elements of finite model theory // Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer. 2004.
10. Ostrovsky, L.B., Zhukovskii, M.E. Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. 2017. Vol. 168. P. 2087–2101.
11. Shelah, S., Spencer, J.H. Zero-One Laws for Sparse Random Graphs // J.Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 1. P. 97–115.
12. Spencer, J.H. Threshold spectra via the Ehrenfeucht game // Discrete Applied Math. 1991. Vol. 30. P. 235–252.
13. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism // Logical Methods in Computer Science. 2019. Vol. 15. P. 25:1–25:24.
14. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. The Descriptive Complexity of Subgraph Isomorphism without Numerics // Theory of Computing Systems. 2019. Vol. 63. P. 902–921.
15. Zhukovskii, M.E. On the zero-one k -law extensions // European Journal of Combinatorics. 2017. Vol. 60. P. 66–81.
16. Zhukovskii, M.E. Zero-one k -law // Discrete Mathematics. 2012. Vol. 312. P. 1670–1688.

REFERENCES

1. Vereshchagin, N.K., Shen, A. 2012, “Languages and calculus”, *MCCME*, 4th ed, P. 240.
2. Zhukovsky, M.E., Ostrovskii, L.B. 2017, “First-order properties of bounded quantor depth of strongly sparse random graphs”, *Izvestiya:Mathematics*, Vol. 81, pp. 100–113.

3. Bollobás, B. 1981, “Threshold functions for small subgraphs”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, pp. 197–206.
4. Ehrenfeucht, A. 1960, “An application of games to the completeness problem for formalized theories”, *Warszawa, Fund. Math.*, pp. 121–149.
5. Erdős P., Rényi, A. 1959, “On Random Graphs”, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, Vol. 6, pp. 290–297.
6. Erdős, P., Rényi, A. 1960, “On the evolution of random graphs”, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, pp. 17–61.
7. Fagin, R. 1976, “Probabilities in Finite Models”, *J. Symbolic Logic*, Vol. 41, pp. 50–58.
8. Glebskii, Y.V., Kogan, D.I., Liogon’kii, M.I., Talanov, V.A. 1969, “Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus”, *Cybern Syst Anal.*, Vol. 5, pp. 142–154.
9. Libkin, L. 2004, “Elements of finite model theory”, *Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer*.
10. Ostrovsky, L.B., Zhukovskii, M. E. 2017, “Monadic second-order properties of very sparse random graphs”, *Annals of pure and applied logic*, Vol. 168, pp. 2087–2101.
11. Shelah, S., Spencer, J.H. 1988, “Zero-One Laws for Sparse Random Graphs”, *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, pp. 97–115.
12. Spencer, J.H. 1991, “Threshold spectra via the Ehrenfeucht game”, *Discrete Applied Math.*, Vol. 30, pp. 235–252.
13. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. 2019, “On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism”, *Logical Methods in Computer Science*, Vol. 15, pp. 25:1–25:24.
14. Verbitsky, O., Zhukovskii, M. 2019, “The Descriptive Complexity of Subgraph Isomorphism without Numerics”, *Theory of Computing Systems*, Vol. 63, pp. 902–921.
15. Zhukovskii, M.E. 2017, “On the zero–one k -law extensions”, *European Journal of Combinatorics*, Vol. 60, pp. 66–81.
16. Zhukovskii, M.E. 2012, “Zero-one k -law”, *Discrete Mathematics*, Vol. 312, pp. 1670–1688.

Получено: 02.03.2024

Принято в печать: 04.09.2024