

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.9+531.01

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-270-298

Тензорные инварианты динамических систем пятого порядка с диссипацией

М. В. Шамолин

Шамолин Максим Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Аннотация

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

Библиография: 46 названий.

Для цитирования:

Шамолин, М. В. Тензорные инварианты динамических систем пятого порядка с диссипацией // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 270–298.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 517.9+531.01

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-270-298

Tensor invariants of fifth-order dynamical systems with dissipation

M. V. Shamolin

Shamolin Maxim Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Abstract

New cases of integrable dynamical systems of the fifth-order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a two-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of different signs. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both the first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

Bibliography: 46 titles.

For citation:

Shamolin, M. V. 2024, “Tensor invariants of fifth-order dynamical systems with dissipation”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 270–298.

1. Примеры интегрирования систем третьего порядка

1.1. Введение

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [13, 14, 45], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [23, 24, 26]).

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [28, 30, 43]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна,

если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [7, 18, 46]).

В данном разделе 1 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система с одной степенью свободы на своем двумерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [11, 18]. Если (v, α) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр пластины), Ω — значение его угловой скорости, I, m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [18]), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} = y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \quad F_x &= -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma > 0, \quad v > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первые два уравнения (1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ в проекциях на систему координат Dx_1x_2 , связанную с телом. При этом Dx_1 — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а Dx_2 — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1) получено из теоремы об изменении кинетического момента.

Таким образом, фазовым пространством системы (1) третьего порядка является прямое произведение $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathfrak{so}(2)$ части двумерного цилиндра на алгебру Ли $\mathfrak{so}(2)$.

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [37, 40])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (2)$$

то в системе (1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (3)$$

Случай (3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2.$$

Систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] &= \frac{T_1(\alpha, \Omega/v) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha &= \frac{s(\alpha) v^2 - T_1(\alpha, \Omega/v) v^2}{m} \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

Введя далее новые фазовую переменную и дифференцирование по формулам $\Omega = n_1 v \omega$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (4) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \\ \omega' &= \frac{1}{I n_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\ &\quad + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе третьего порядка (5), (6) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (6), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

Система (5), (6) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, n_1 \omega) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad \Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha, \quad (7)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha, \quad \omega' = -\omega \Psi(\alpha, \omega). \quad (8)$$

1.2.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [18], динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \quad (9)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α).

Тогда, благодаря условиям (2), (9) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5), (6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha, \quad \Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

при этом выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (10), (11) может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$.

ТЕОРЕМА 1. Система (10), (11) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 6, 9].

Здесь необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

1.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы на одномерную пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [18].

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, $R = (R_1, R_2)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь (h_1, h_2) — некоторые положительные параметры (ср. с [18]).

Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [18] допустим равенство $Q_2 = A \sin \alpha$, $A > 0$, а динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha - h \frac{\Omega}{v}, \quad A, B, h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (12)$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (2), (12) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5), (6)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha - bH_1\omega \cos^2 \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + bH_1\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1\omega \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $H_1 = Bh/In_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (13), (14) также может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$.

ТЕОРЕМА 2. Система (13), (14) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [15, 16, 25]).

1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил

Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v , α , z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v , z с коэффициентами, зависящими от α :

$$\dot{v} = a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \dot{z} = d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, v\dot{\alpha} = g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \quad (15)$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z , $z = Zv$, систему (15) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \quad (16)$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \quad (17)$$

при этом уравнение (16) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (17) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой усеченной системы, когда выполнены тождества $d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$. Тогда система (16), (17) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \quad (18)$$

Для точной интегрируемости усеченной системы (16), (17) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (18).

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (16), (17) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)f_1(\alpha), \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad (19)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0Z^2\delta(\alpha), Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad (20)$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $f_1(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (19), (20) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Система (19), (20) имеет более общий вид, чем система (7), (8), взятая из динамики твердого тела, и при $Z = \omega$, $b_0 = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, в частности, они совпадают.

1.3.1. Полный набор гладких первых интегралов

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Система (19), (20) имеет два гладких (автономных) первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \quad \Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}. \quad (21)$$

Другими словами, независимая подсистема (20) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный [12, 17, 31] по Z (автономный) первый интеграл вида (см. также [32, 33]) $\Phi(Z; \alpha) = (1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha))/Z^2 = C = \text{const}$, который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (20) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (19), (20) не нарушает консервативности системы.

1.3.2. Инвариантные дифференциальные формы

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала фазового объема) для интегрируемости системы (19), (20).

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, двух) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно [2, 5, 19], не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

Для начала сделаем замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Система (19), (20) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (22)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z). \quad (23)$$

Для поиска функции $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет искомую инвариантную внешнюю дифференциальную форму

$$\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \quad (24)$$

подсчитаем дивергенцию векторного поля $w(v; \alpha, Z)$ системы (22), (23) в евклидовых координатах: $\text{div} w(v; \alpha, Z) = 3b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha)$. Тогда составная система уравнений характеристик (для поиска решения линейного уравнения

$$\text{div}[\rho(v; \alpha, Z)w(v; \alpha, Z)] = 0 \quad (25)$$

в частных производных) будет состоять из системы (22), (23) и добавочного уравнения $\rho' = -3b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha)\rho$.

Как отмечалось, система (19), (20) (а поэтому и (22), (23)) имеет два гладких первых интеграла (21). Для получения дополнительного первого интеграла составной системы уравнений характеристик нетрудно получить следующее соотношение: $d\rho/dZ = -3\rho/Z$, что немедленно дает необходимый первый интеграл: $\Phi_\rho(\rho; Z) = \rho Z^3 = C_\rho = \text{const}$.

Теперь нетрудно найти общее решение уравнения (25) $\rho = \mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]/Z^3$ и убедиться, что следующие функции $\rho_1(Z) = 1/Z^3$, $\rho_2(v) = v^3$ являются примерами функции $\rho(v; \alpha, Z)$, определяющей инвариантную дифференциальную форму фазового объема (24) для системы (22),

(23). Здесь $\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Φ_0, Φ_1 — два независимых первых интеграла (21).

Заметим, что все найденные в разделе 1.3.2 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (22), (23) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (19), (20). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. “вернуть” старую независимую переменную t).

1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов

Переходим к некоторому усложнению, добавляя в систему (22), (23) (лишь в уравнение на Z') внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (26)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (27)$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность “подтвердилась” бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (26), (27) существует гладкий первый интеграл, вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha), \quad (28)$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого (во всем фазовом пространстве) первого интеграла система (26), (27), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств, см. следующее предложение, а также [4, 8, 20]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то система (26), (27) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2 \left(1 + b_0 Z \Delta(\alpha) + \frac{b_0}{2} (Z^2 - \Delta^2(\alpha)) \ln \left| \frac{Z + \Delta(\alpha)}{Z - \Delta(\alpha)} \right| \right) = C_0 = \text{const}, \quad (29)$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2 (Z^2 - \Delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}. \quad (30)$$

Как видно из вида первого интеграла (29), притягивающие и отталкивающие предельные множества системы (26), (27) могут быть найдены из системы нелинейных равенств

$$Z = 0, \quad \Delta(\alpha) = 0.$$

В данном случае первый интеграл (30) является частным случаем интеграла (28).

1.5. Системы со знакопеременной диссипацией

Модифицируем далее систему (26), (27), где будут в наличии уже два ключевых параметра $b_0 \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Таким образом, будем рассматривать следующую систему:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \Delta(\alpha), \quad (31)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \quad (32)$$

$\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей (внутреннего) силового поля содержат параметр b_0 , а неконсервативной составляющей (внешнего) поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (31), (32) фактически является “образом” следующей системы при замене $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha) + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \quad (33)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha) f_1(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) f_1(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (34)$$

Выше (раздел 1.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (26), (27), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля). Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b_0 > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbf{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ приняла вид (31), (32).

Как будет видно далее, только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого унимодулярного преобразования.

Система (33), (34) имеет более общий вид, чем система (10), (11), взятая из динамики твердого тела, и при $Z = \omega$, $b_0 = -b_1 = b$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, в частности, они совпадают.

1.5.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы

ТЕОРЕМА 3. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \lambda \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, то система (31), (32) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным, т.е. имеющим существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными внешними дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

2. Инварианты однородных систем пятого порядка

В данном разделе 2 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2.1. Некоторые примеры из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твердого тела с передним плоским торцом (двумерным диском) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [18]. Если (v, α, β_1) — сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр диска, лежащий на оси симметрии тела), $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — компоненты его угловой скорости в системе координат $Dx_1x_2x_3$, связанной с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси

Dx_2, Dx_3 лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, m$ — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \Omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \sigma(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) &= \frac{F_x}{m}, \\
 \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \Omega_3 v \cos \alpha - \\
 - \Omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 - \sigma \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \dot{\Omega}_3 &= 0, \\
 \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \Omega_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
 - \Omega_2 v \cos \alpha - \sigma \Omega_1 \Omega_3 + \sigma \dot{\Omega}_2 &= 0, \quad \dot{\Omega}_1 = 0, \\
 I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_3 &= -z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \\
 I_2 \dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2,
 \end{aligned} \tag{35}$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma > 0$, $v > 0$.

Первые три уравнения (35) описывают движение центра масс в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ в проекциях на систему координат $Dx_1x_2x_3$. Вторые же три уравнения (35) получены из теоремы об изменении кинетического момента тела в осях Кенига.

Таким образом фазовым пространством системы (35) шестого порядка является прямое произведение $\mathbf{R}_+^1 \times \mathbf{S}^2 \times \mathfrak{so}(3)$ трехмерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$.

Сразу же заметим, что система (35), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3$, обладает циклическим первым интегралом

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^0 = \text{const}. \tag{36}$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевом уровне:

$$\Omega_1^0 = 0. \tag{37}$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс)

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \tag{38}$$

то в системе (35) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{39}$$

Случай (39) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы пятого порядка после некоторого преобразования системы шестого порядка (35).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \Omega) = \sum_{i,j=0, i \leq j}^3 \tau_{ij} \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v.$$

Введем для начала следующие квазискорости: $z_1 = \Omega_2 \cos \beta_1 + \Omega_3 \sin \beta_1$, $z_2 = -\Omega_2 \sin \beta_1 + \Omega_3 \cos \beta_1$. Систему (35) в случаях (36), (37) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 & \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \\
 & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \sin \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\
 & = \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \\
 & \dot{\alpha} v + z_2 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha - \\
 & - \sigma \frac{v^2}{I_2} s(\alpha) \cos \alpha \left[y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 + z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = \\
 & = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1(\alpha, \beta_1, \Omega/v) v^2}{m} \sin \alpha, \\
 & \dot{\Omega}_3 = \frac{v^2}{I_2} y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad \dot{\Omega}_2 = -\frac{v^2}{I_2} z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \\
 & \dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{I_2} s(\alpha) \left[z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \cos \beta_1 - y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) \sin \beta_1 \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, 2$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (40) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \\
 & + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
 & - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha,
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2' &= \frac{s(\alpha)}{I_2 n_1^2} [1 - \sigma n_1 Z_2 \sin \alpha] [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
 & - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\
 & - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] - \\
 & - Z_2 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha,
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 Z_1' &= \frac{1}{I_2 n_1^2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [\sigma n_1 Z_2 \sin \alpha - 1] [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\
 & + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - \\
 & - \frac{\sigma}{I_2 n_1} Z_1 s(\alpha) \sin \alpha [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1 + y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1] - \\
 & - Z_1 \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \\
 \beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} +
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma}{I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} [z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 - y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1], \\
& \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \\
& + \frac{\sigma}{I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha [y_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \cos \beta_1 + z_N(\alpha, \beta_1, n_1 Z) \sin \beta_1] + \\
& + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{45}$$

Видно, что в системе пятого порядка (41)–(45) может быть выделена независимая подсистема четвертого порядка (42)–(45), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем четырехмерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (39) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы четвертого порядка возможен.

Система (41)–(45) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, n_1 \omega) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \tag{46}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \tag{47}$$

$$Z_2' = -Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \tag{48}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha, \tag{49}$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \tag{50}$$

2.1.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина, динамические функции s , y_N и z_N примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\
z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) &= z_0(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0,
\end{aligned} \tag{51}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1).

Тогда, благодаря условиям (38), (51) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (41)–(45)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\
Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - b Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
Z_1' &= Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - b Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\
\beta_1' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,
\end{aligned} \tag{54}$$

при этом выбирая безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (52)–(54) может быть рассмотрена на своем фазовом пятимерном многообразии $W_1 = \mathbf{R}_+^1 \{v\} \times \mathbf{TS}^2 \{Z_1, Z_2, 0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к двумерной сфере $\mathbf{S}^2 \{0 < \alpha < \pi, 0 \leq \beta_1 < 2\pi\}$.

ТЕОРЕМА 4. Система (35) при условиях (38), (36), (37), (51) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [22, 27, 34]).

2.1.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}) = (x_N, y_N, z_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, $R = (R_1, R_2, R_3)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Здесь (h_1, h_2, h_3) — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, то $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega_3/v$, $x_{3N} = z_N = Q_3 + h_1\Omega_2/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина допустим равенства $Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1$, $Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1$, $A > 0$, а функции s , y_N и z_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0,$$

$$y_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\Omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (56)$$

$$z_N \left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha \sin \beta_1 + h \frac{\Omega_2}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0,$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости). Причем $h_2 = h_3$ в силу динамической симметрии тела.

Тогда, благодаря условиям (38), (56) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (41)–(45)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2), \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_2 \cos^2 \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + bH_1 Z_2^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \\ Z_1' &= (1 + bH_1) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + bH_1 Z_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (59)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I_2$, $H_1 = Bh/I_2 n_0$, $n_1 = n_0$.

Видно, что в системе пятого порядка (57)–(59) выделилась независимая подсистема четвертого порядка (58), (59), которую можно рассматривать на касательном расслоении TS^2 к двумерной сфере S^2 .

ТЕОРЕМА 5. Система (35) при условиях (38), (36), (37), (56) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций (см. также [29, 35, 41]).

2.2. Системы пятого порядка при отсутствии внешнего силового поля

Пусть $v, \alpha, \beta, z = (z_1, z_2)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \\ v\dot{\alpha} \\ v\dot{\beta} \end{pmatrix} = A(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} v^2 \\ vz_2 \\ vz_1 \\ z_2^2 \\ z_2 z_1 \\ z_1^2 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 5×6 (система, аналогичная (15)).

Выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые Z_k , $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, $Z = (Z_1, Z_2)$, систему (60) можно переписать в виде

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2 Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\begin{pmatrix} Z_2' \\ Z_1' \\ \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \hat{A}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2 Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_2 \Psi(\alpha, Z) \\ Z_1 \Psi(\alpha, Z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки:

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (61) на v отделяется, что дает возможность рассматривать четыре оставшихся уравнения в качестве системы (62) на четырехмерном фазовом многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (61), (62) пятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= f_2(\alpha)Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z_2' &= -f_2(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= -f_2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta' &= Z_1 f_1(\alpha), \end{aligned} \quad (64)$$

$DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)|/d\xi$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (63), (64) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*. Уравнение (63) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (64) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [21, 42]).

Система (63), (64) имеет более общий вид, чем система (46)–(50), взятая из динамики твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, а также при

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_2(\alpha) \equiv -1, \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha},$$

в частности, они совпадают.

Рассмотрим структуру системы (64). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с тремя ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ (в частности, на расслоении (двумерной) поверхности вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}^2 = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0. \quad (65)$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \quad \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \quad (66)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (64)):

$$\begin{aligned} Z_1' &= -f_2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= -f_2(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \quad (67)$$

при этом уравнения (65) почти всюду эквивалентны совокупности (66), (67), которая, прежде всего, присутствует в системе (64). Здесь лучше изменить независимую переменную и вместо (66) выбрать равенства $\alpha' = Z_2 f_2(\alpha)$, $\beta' = Z_1 f_1(\alpha)$.

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (65).

(а) Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. также [44]).

(b) Системы на касательном расслоении более общей двумерной поверхности вращения.

(c) Системы на касательном расслоении плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (63), (64) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (19), (20), они не нарушают консервативности, поскольку система (63), (64) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

2.2.1. О количествах “неизвестных” функций и условий, на них накладываемых

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n = 2$, т.е. 6 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (66)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” 3 ($n(n-1)+1$ штукой при $n = 2$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (65). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 2 ($n(n-1)/2+1$ штука при $n = 2$). Таким образом, мы имеем 5 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(2)$) на имеющиеся $A(2) = 5$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ штуки при $n = 2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 3, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(2)$, тем больше разность $A(2) - B(2)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(2) = 3$ условия на имеющиеся $A(2) = 5$ функций. Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$.

Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Мы введем лишь новое обозначение для универсальности, а именно, $f_1(\alpha) =: f(\alpha)$.

Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad (68)$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$).

Число $B_3(2)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha) &=: \Gamma_2(\alpha), \\ f_2^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (69)$$

т.е. $B_3(2) = 2$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$).

Видно, что в общем случае

$$B(n) = B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

при этом $A(n) - B(n) = n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(2) - B(2) = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть выполнено условие (68) и реализуется система дифференциальных равенств (69). Тогда справедливы следующие 2 ($n(n-1)/2 + 1$ при $n = 2$) тождества:

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha). \quad (70)$$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1. В нашем случае, при $n = 2$, оно носит некоторый формальный (даже тавтологичный) смысл, который будет ясен при увеличении размерности $n \geq 3$ многообразия M^n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть выполнено условие (68), при этом реализуются 2 тождества (70). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (69), которая примет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) &=: \Gamma_2(\alpha), \\ f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_2(\alpha) &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Фактически, уравнения (71) и (69) совпадают с точностью до обозначений. Но это, как указано выше, произошло по причине низкой размерности $n = 2$ многообразия M^n .

Таким образом, при выполнении 1 условия (68) 2 условия (69) и 2 условия (71) в упомянутом смысле эквивалентны.

2.2.2. Достаточные условия интегрируемости

Для полного интегрирования системы пятого порядка достаточно знать, вообще говоря, четыре независимых инварианта. Как будет показано, для полного интегрирования системы (63), (64) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [38, 39]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (65), переписанных в виде $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^2 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$, $i = 1, 2$, является гладкая функция $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 6 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 3 алгебраических и дифференциальных соотношения (68), (69) на 5 функций: на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (66) и на 3, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (65).

ТЕОРЕМА 6. Если выполнены условия (68), (69), то система (63), (64), рассмотренная на произведении $\mathbf{R}_+^1 \{v\} \times TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$, обладает полным набором, состоящим из четырех гладких первых интегралов вида

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_2\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \quad (72)$$

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}; \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(v; Z_1; \alpha) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta, C_0, C_1^2, C_2) = C_3 = \text{const}, \quad (75)$$

G — некоторая гладкая функция нескольких переменных.

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (76)$$

и фазовых

$$w_2 = Z_2, \quad w_1 = Z_1, \quad w_1^* = \ln |w_1| \quad (77)$$

— фазовый поток системы (63), (64) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_2(\alpha)}$$

на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_2(\alpha)} dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta.$$

Заметим также, что равенства (69) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (73). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [3, 10, 36]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

3. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования

Модифицируем систему (63), (64) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, вводя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_2(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (78), (79) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_2(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (78)$$

$$\alpha' = Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)},$$

$$Z_2' = F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (79)$$

$$Z_1' = -\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z),$$

$$\beta' = Z_1 \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)},$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\bar{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [22]).

4. Инварианты систем с диссипацией

Перейдем теперь к интегрированию системы пятого порядка (78), (79) при выполнении свойств (68), (69), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы третьего порядка. Как будет показано, для полного интегрирования системы (78), (79) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 7 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 3 алгебраических и дифференциальных соотношения (68), (69) на 5 функций: на 2 функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на 3, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$. Тогда система (79) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ Z_2' &= F(\alpha) - \Gamma_2(\alpha) \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \Gamma_2(\alpha) \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' &= Z_1 \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}. \end{aligned} \quad (81)$$

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} \Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (82)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha). \quad (83)$$

Условие (82) назовем “геометрическим”, а условие (83) — “энергетическим”. Условие (82) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному

виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Условие (83) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [18]).

ТЕОРЕМА 7. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются условия (82) и (83). Тогда система (78), (80), (81) обладает полным набором — четырьмя (одним гладким и тремя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает четырьмя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, благодаря однородным переменным u_k , $Z_k = u_k \Delta(\alpha)$, $k = 1, 2$, из системы (80) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}, \quad \Delta \frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1)u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}, \quad (84)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa - 1)u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \quad (85)$$

Уравнение (85) имеет вид уравнения Абеля [9]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (86)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1 \left(\frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 + b_1 \lambda \mu Z_2 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{Z_1 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (87)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, $w_1^* = \ln |Z_1|$, системы (78), (80), (81) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную для системы (63), (64)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div}[\rho(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta) w_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0 \quad (88)$$

будет состоять из системы (78), (80), (81) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (89)$$

Системе (78), (80), (81), (89) уравнений характеристик можно сопоставить три соотношения: два из (84) и

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (90)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (86)). При участии уравнений (84), (81) получаются два других первых интеграла, имеющие следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (91)$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3 \left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_3 = \text{const.} \quad (92)$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (91) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1\lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2.$$

Выражение первых интегралов (91), (92) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\Delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (78), (80), (81) существует гладкий первый интеграл, который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_2\Delta(\alpha) - b^2\mu(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \text{const.} \quad (93)$$

А уравнение (90), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ_2 \wedge dw_1^* \wedge d\beta, \quad u_2 = \frac{Z_2}{\Delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (88) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$ — произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — четыре независимых первых интеграла (93), (87), (91), (92) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (88) в частных производных можно взять следующие функции ($u_k = Z_k/\delta(\alpha)$, $k = 1, 2$, $w_1^* = \ln |Z_1|$):

$$\rho_0(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_1(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_2(v; Z_2, w_1^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(Z_2, w_1^*; \alpha),$$

$$\rho_3(v; Z_2, w_1^*; \alpha, \beta) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(Z_2, w_1^*; \alpha, \beta).$$

5. Строение инвариантов для систем с диссипацией и приложения

Система (78), (79) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (63), (64). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (73), (74). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (78), (79) при условии (83) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (94)$$

где $\Theta(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + B\lambda\mu Z_2\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (94), (74) также является первым интегралом системы (78), (79) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + b_1\lambda\mu Z_2\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (95)$$

и (74) по отдельности не является первым интегралом системы (78), (79). Однако отношение функций (95), (74) является первым интегралом (87) системы (78), (79) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Выделим теперь существенные случаи для функций $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, определяющих метрику на двумерной сфере, и функции $\Delta(\alpha)$:

$$f_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu \sin^2 \alpha}}, \quad \nu \in \mathbf{R}, \quad f_2(\alpha) \equiv -1, \quad \Delta(\alpha) = \sin \alpha, \quad (96)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu \sin^2 \alpha}}, \quad \nu \in \mathbf{R}, \quad f_2(\alpha) \equiv -1, \quad (97)$$

а также следующие случаи, имеющие самостоятельный интерес:

$$f_1(\alpha) = \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R}, \quad f_2(\alpha) = \nu_1 \alpha, \quad (98)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{\nu_1}{\rho(\alpha) \sqrt{\nu_2 \nu_1^2 \rho^2(\alpha) - 1}}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R}, \quad f_2(\alpha) = \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + \rho^2(\alpha)}}. \quad (99)$$

Случай (96) формирует класс систем (78), (79) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил. В частности, при $\Delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (96), если $\Delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [18]. В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещенному в поток набегающей среды, и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (97) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по двумерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства.

Случай (98) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Случай (99) формирует класс систем (78), (79), соответствующих движению точки по поверхности, образуемой при вращении линии, заданной функцией $\rho(\alpha)$, вокруг оси α . В трех последних случаях функция $\Delta(\alpha)$ пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем пятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия предъявляемых инвариантных форм с набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. — 396 с.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. – М.: Наука, 1977. — 600 с.
3. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Доклады РАН. — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д.В., Шамолин М.В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.
8. Иванова Т.А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52. — Вып. 2. — С. 43–51.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
10. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. – М.: URSS, 2017. 352 с.
11. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.

13. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74. — № 1(445). — С. 117–148.
14. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93. — № 5. — С. 763–766.
15. Походня Н.В., Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2012. — № 9(100). — С. 136–150.
16. Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2013. — № 9/1(110). — С. 35–41.
17. Походня Н.В., Шамолин М.В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2014. — № 7(118). — С. 60–69.
18. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
19. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44. — № 5. — С. 1191–1199.
20. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
21. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.
22. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
23. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
24. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
25. Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343–346.
26. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 169–170.
27. Шамолин М.В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathfrak{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // Успехи матем. наук. — 2005. — Т. 60. — Вып. 6. — С. 233–234.
28. Шамолин М.В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи матем. наук. — 2007. — Т. 62. — Вып. 5. — С. 169–170.
29. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. — 2013. — Т. 453. — № 1. — С. 46–49.
30. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере // Успехи матем. наук. — 2013. — Т. 68. — Вып. 5(413). — С. 185–186.

31. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. — 2014. — Т. 457. — № 5. — С. 542–545.
32. Шамолин М.В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20. — Вып. 4. — С. 3–231.
33. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. — 2015. — Т. 461. — № 5. — С. 533–536.
34. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. — 2015. — Т. 464. — № 6. — С. 688–692.
35. Шамолин М.В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52. — № 6. — С. 743–759.
36. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН. — 2017. — Т. 474. — № 2. — С. 177–181.
37. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией // Пробл. матем. анализа. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
38. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 482. — № 5. — С. 527–533.
39. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.
40. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491. — № 1. — С. 95–101.
41. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 497. — № 1. — С. 23–30.
42. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 500. — № 1. — С. 78–86.
43. Шамолин М.В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 501. — № 1. — С. 89–94.
44. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 507. — № 1. — С. 86–92.

45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier–Villars, Paris, 1912, 340 pp.
46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, 2002, Vol. 110, No. 2, pp. 2528–2557.

REFERENCES

1. Bourbaki N. Integrirovaniye. Mery, integrirovaniye mer [Integration. Measures, measure integration]. Moscow, Nauka, 1967.
2. Bourbaki N. Integrirovaniye. Mery na lokal'no-kompaktnykh prostranstvakh. Prodolzheniye mer. Mery na otdelimnykh prostranstvakh [Integration. Measures on locally compact spaces. Continuation of measures. Measures on separable spaces]. Moscow, Nauka, 1977.
3. Weil G. Simmetriya [Symmetries]. Moscow, URSS, 2007.
4. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Kinematika i geometriya mass tverdogo tela s nepodvizhnoy tochkoj v $\mathbf{R}^n$ [Kinematics and mass geometry for a solid body with a fixed point in $\mathbf{R}^n$]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2001, Vol. 380, No. 1, P. 47–50.
5. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Obobshchennyye dinamicheskiye uravneniya Eilera dlya tverdogo tela s nepodvizhnoy tochkoj v $\mathbf{R}^n$ [Generalized Euler's Equations Describing the Motion of a Rigid Body with a Fixed Point in $\mathbf{R}^n$]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2002, Vol. 383, No. 5, P. 635–637.
6. Georgievskii D.V., Shamolin M.V. Pervyye integraly uravneniy dvizheniya obobshchennogo gyroskopa v $\mathbf{R}^n$ [First integrals of motion equations of a generalized gyroscope in $\mathbf{R}^n$]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin], 2003, No. 5, P. 37–41.
7. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya [Modern Geometry], Moscow, Nauka, 1979.
8. Ivanova T.A. Ob uravneniyakh Eilera v modelyakh teoreticheskoy fiziki [Euler equations in models of theoretical physics]. Matematicheskiye zametki [Mathematical Notes], 1992, Vol. 52, No. 2, P. 43–51.
9. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsyal'nyim uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1976.
10. Klein F. Neevklidova geometriya [Non-Euclidean geometry]. M., URSS, 2017.
11. Kozlov V.V. Integriruemost' i Neintegriruemost' v gamil'tonovoy mekhanike [Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys], 1983, Vol. 38, No. 1, P. 3–67.
12. Kozlov V.V. Ratsyonal'nye integraly kvaziodnorodnykh dinamicheskikh sistem [Rational integrals of quasi-homogeneous dynamical systems] // Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of applied mathematics and mechanics], 2015, Vol. 79, No. 3, P. 307–316.
13. Kozlov V.V. Tenzornyye invarianty i integrirovaniye differentsyal'nykh uravneniy [Tensor invariants and integration of differential equations]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys], 2019, Vol. 74, No. 1(445), P. 117–148.

14. Kolmogorov A.N. O dinamicheskikh sistemakh s integral'nym invariantom na tore [On dynamical systems with an integral invariant on a torus]. Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics], 1953, Vol. 93, No. 5, P. 763–766.
15. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruemosti v dinamike mnogomernogo tela [A new case of integrability in the dynamics of a multidimensional body]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2012, No. 9(100), P. 136–150.
16. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Nekotorye usloviya integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiyakh [Some conditions of integrability of dynamical systems in transcendental functions]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2013, No. 9/1(110), P. 35–41.
17. Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. Integriruemye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable systems on a tangent bundle to a multidimensional sphere]. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2014, No. 7(118), P. 60–69.
18. Samsonov V.A., Shamolin M.V. K zadache o dvizhenii tela v soprotivlyayushcheisya srede [On the problem of a body motion in a resisting medium]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin], 1989, No. 3, P. 51–54.
19. Trofimov V.V. Uravneniya Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли [Euler equations on finite-dimensional solvable Lie groups]. Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya [Izvestiya: Mathematics], 1980, Vol. 44, No. 5, P. 1191–1199.
20. Trofimov V.V. Simplekticheskiye struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv [Symplectic structures on automorphism groups of symmetric spaces]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, No. 6, P. 31–33.
21. Trofimov V.V., Fomenko A.T. Metodika postroeniya gamil'tonovykh potokov na simmetricheskikh prostranstvakh i integriruemost' nekotorykh gidrodinamicheskikh sistem [The technique of Hamiltonian flows constructing on symmetric spaces and the integrability of some hydrodynamic systems]. Doklady AN SSSR [Doklady Mathematics], 1980, Vol. 254, No. 6, P. 1349–1353.
22. Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometricheskiye i dinamicheskiye invarianty integriruemyykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem [Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, No. 4, P. 3–229.
23. Shabat B.V. Vvedeniye v kompleksniy analiz [Introduction in Complex Analysis], Moscow, Nauka, 1987.
24. Shamolin M.V. Ob integriruemosti v transtsendentnykh funktsiyakh [On integrability in transcendental functions]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 1998, Vol. 53, No. 3, P. 209–210.
25. Shamolin M.V. Integriruemost' po Yakobi v zadache o dvizhenii chetyrekhmernogo tverdogo tela v soprotivlyayushcheisya srede [Integrability according to Jacobi in the Problem of Motion of a Four-Dimensional Solid in a Resistant Medium]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2000, Vol. 375, No. 3, P. 343–346.

26. Shamolin M.V. Ob integrirovanii nekotorykh klassov nekonservativnykh sistem [Integration of certain classes of non-conservative systems]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2002, Vol. 57, No. 1, P. 169–170.
27. Shamolin M.V. Ob odnom integriruemom sluchae uravneniy dinamiki na $so(4) \times \mathbf{R}^4$ [An integrable case of dynamical equations on $so(4) \times \mathbf{R}^4$]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2005, Vol. 60, No. 6, P. 233–234.
28. Shamolin M.V. Sluchay polnoy integriruемости v dinamike na kasatel'nom rassloenii dvumernoy sfery [The case of complete integrability in dynamics on a tangent bundle of a two-dimensional sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2007, Vol. 62, No. 5, P. 169–170.
29. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2013, Vol. 453, No. 1, P. 46–49.
30. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости uravneniy dinamiki na kasatel'nom rassloenii k trekhmernoy sfere [New case of integrability of dynamic equations on the tangent bundle of a 3-sphere]. Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian mathematical surveys], 2013, Vol. 68, No. 5(413), P. 185–186.
31. Shamolin M.V. Noviy sluchay integriruемости v dinamike mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri uchete lineynogo dempfirovaniya [A New Case of Integrability in the Dynamics of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2014, Vol. 457, No. 5, P. 542–545.
32. Shamolin M.V. Integriruemye sistemy s peremennoy dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere i prilozheniya [Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Journal of Mathematical Sciences], 2015, Vol. 20, No. 4, P. 3–231.
33. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015, Vol. 461, No. 5, P. 533–536.
34. Shamolin M.V. Polniy spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravneniy dvizheniya mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole pri nalichii lineynogo dempfirovaniya [Complete List of the First Integrals of Dynamic Equations of a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field under the Assumption of Linear Damping]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2015. — T. 464. — № 6. — С. 688–692.
35. Shamolin M.V. Integriruemye nekonservativniye dinamicheskiye sistemy na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [Integrable Nonconservative Dynamical Systems on the Tangent Bundle of the Multidimensional Sphere]. Differentsial'niye uravneniya [Differential equations]. 2016, Vol. 52, No. 6, P. 743–759.
36. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoy sfere [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, No. 2, P. 177–181.
37. Shamolin M.V. Integriruemye dinamicheskiye sistemy s konechnym chislom stepeney svobody s dissipatsiyey [Integrable Dynamic Systems with Dissipation and Finitely Many Degrees of

- Freedom]. Problemy matematicheskogo analiza [Journal of mathematical sciences], 2018, No. 95, P. 79–101.
38. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii mnogomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Multidimensional Manifold]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 482, No. 5, P. 527–533.
39. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN [Physics Doklady], 2018, Vol. 479, No. 3, P. 270–276.
40. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruemykh sistem nechetnogo poryadka s dissipatsiyey [New Cases of Integrable Odd-Order Systems with Dissipation]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2020, Vol. 491, No. 1, P. 95–101.
41. Shamolin M.V. Noviye sluchai odnorodnykh integriruemykh sistem s dissipatsiyey na kasatel'nom rassloenii chetyrekhmernogo mnogoobraziya [New Cases of Homogeneous Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Four-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 497, No. 1, P. 23–30.
42. Shamolin M.V. Noviye sluchai integriruемости geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii konechnomernogo mnogoobraziya [New Cases of Integrability of Systems of Geodesics and Potential and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Finite-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 500, No. 1, P. 78–86.
43. Shamolin M.V. Tenzorniye invarianty geodezicheskikh, potentsial'nykh i dissipativnykh sistem na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziya [Tensor Invariants of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on Tangent Bundles of Two-Dimensional Manifolds]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2021, Vol. 501, No. 1, P. 89–94.
44. Shamolin M.V. Invariantniye formy obyema sistem s tremya stepenyami svobody s peremennoy dissipatsiyey [Invariant Volume Forms of Variable Dissipation Systems with Three Degrees of Freedom]. Doklady RAN. Matematika, informatika, protsessy upravleniya [Doklady Mathematics], 2022, Vol. 507, No. 1, P. 86–92.
45. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
46. Shamolin M.V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. Journal of Mathematical Sciences, 2002, Vol. 110, No. 2, P. 2528–2557.

Получено: 02.04.2024

Принято в печать: 04.09.2024