

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-259-269

Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов

В. Г. Чирский

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

Статья посвящена описанию направлений исследования арифметических свойств значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

с коэффициентами a_n , удовлетворяющими определённым условиям. При этих условиях рассматриваемый ряд, отличный от многочлена, сходится в поле $\mathbb{C}$ только при $z = 0$. Однако для почти всех, кроме конечного числа, простых чисел p такой ряд сходится в полях $\mathbb{Q}_p$. Поэтому есть два естественных пути исследования. Мы можем рассматривать либо значения результата некоторого суммирования этого ряда, либо его значения в поле $\mathbb{Q}_p$. Примером первого подхода служит рассмотренный ещё Эйлером ряд

$$1 - x + 2x^2 + \dots + (-1)^n \cdot n! x^n + \dots,$$

в результате суммирования которого при подстановке $x = 1$ получается замечательное равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Другое направление исследований использует введённое Э.Бомбиери понятие глобального соотношения. Используя модифицированный метод Зигеля–Шидловского удаётся получить аналоги основных теорем А.Б.Шидловского для E -функций. Применение аппроксимаций Эрмита–Паде позволило рассмотреть значения обобщённых гипергеометрических рядов не только с алгебраическими, но и с некоторыми трансцендентными в любом поле $\mathbb{Q}_p$ параметрами.

Ключевые слова: трансцендентность, суммирование рядов, полиадическое число.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 259–269.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-259-269

Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series

V. G. Chirskii

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article describes the directions of research on the arithmetic properties of series values of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n$$

with coefficients a_n satisfying certain conditions. Under these conditions, the considered series, other than the polynomial, converges in the field $\mathbb{C}$ only at $z = 0$. However, for almost all but a finite number of prime p numbers, such a series converges in the fields $\mathbb{Q}_p$. Therefore there are two ways of research. We can either consider the arithmetic properties of the result of some summation of this series, or consider the values of this series in the field $\mathbb{Q}_p$. An example of the first approach is the series considered by Euler

$$1 - x + 2x^2 + \dots + (-1)^n \cdot n! x^n + \dots,$$

as a result of the summation of which, with the substitution $x = 1$, we obtain the remarkable equality

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

where γ — Euler's constant.

Another direction of research uses the concept of global relation introduced by E. Bombieri. Using the modified Siegel—Shidlovskii method, it is possible to obtain analogues of the main theorems of A.B. Shidlovskii for E — functions. The use of Hermite-Pade approximants made it possible to consider the values of generalized hypergeometric series not only with algebraic, but also with certain parameters transcendental in any field $\mathbb{Q}_p$.

Keywords: transcendence, summation of a series, polyadic number.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Chirskii, V. G. 2024, "Arithmetic properties of values of divergent in $\mathbb{C}$ series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 259–269.

1. Введение

Работа относится к теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Точнее говоря, рассматриваются задачи, к решению которых, в основном, привлекаются различные обобщения метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. Сам метод достаточно подробно освещен в [1]. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n, \quad (1)$$

коэффициенты которого – алгебраические числа из некоторого числового поля K конечной степени над полем $\mathbb{Q}$. При этом максимумы модулей сопряжённых с a_n чисел не превосходят C_1^n . Кроме того, существует последовательность натуральных чисел q_n таких, что все числа $q_n a_k, k = 0, 1, \dots, n$ принадлежат кольцу $\mathbb{Z}_K$ целых чисел поля K и выполняется оценка $|q_n| \leq C_2^n$. Такие ряды, если они отличны от многочленов, расходятся в поле $\mathbb{C}$.

2. Арифметические свойства просуммированных рядов

Можно рассматривать функции, полученные в результате суммирования Бореля-Лапласа (см. [2]) или Рамиса [3] таких рядов. Например, ряд связанный с именем Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (2)$$

представляет собой асимптотическое разложение (см. [2]) для интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w} dw.$$

Результат суммирования ряда (2) при $z = 1$ является известной постоянной Гомпертца. Точнее говоря, справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! = e(\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}),$$

где γ – постоянная Эйлера, а левая часть обозначает результат упомянутого выше суммирования.

В этом направлении проводятся интенсивные и очень интересные исследования Ривоаля, Фишлера и Фергюсона, [4], [7], связанные с подходом И. Андре [8] и Бертрана и Бейкерса [9] к исследованию арифметических свойств значений E – функций.

3. Арифметические свойства элементов прямых произведений полей p – адических чисел

С другой стороны, упомянутые ряды (1) сходятся в полях p –адических чисел или алгебраических расширениях этих полей, что позволяет рассматривать бесконечномерные векторы, координаты которых представляют собой суммы рассматриваемых рядов в упомянутых полях. С этими рядами тесно связано понятие полиадического числа. Напомним, что каноническое разложение полиадического числа λ имеет вид

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_n \leq n.$$

Этот ряд сходится в любом поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n n!|_p = 0.$$

Так как $a_n \in \mathbb{Z}$, имеем $|a_n|_p \leq 1$, кроме того,

$$|n!|_p = p^{-\frac{n - S_n}{p-1}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Здесь S_n обозначает сумму цифр p -ичного разложения числа n . Разумеется, ряд, члены которого - целые числа, сходящийся во всех полях p -адических чисел, представляет собой целое полиадическое число.

Кольцом целых полиадических чисел называется прямое произведение колец целых p -адических чисел по всем простым числам p . Элементы λ этого кольца, таким образом, можно рассматривать как бесконечномерные векторы, координаты которых в соответствующем кольце целых p -адических чисел обозначаем $\lambda^{(p)}$. Разумеется, вполне аналогичным способом можно рассматривать прямые произведения алгебраических расширений $\mathbb{K}_v$ полей $\mathbb{Q}_p$.

Это позволяет ввести понятия бесконечной и глобальной линейной или алгебраической независимости. Рассмотрим ряд $f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \alpha^n$, где $\alpha, c_n \in \mathbb{K}$ - алгебраическому числовому полю конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть он сходится в бесконечном множестве полей $\mathbb{K}_v$, где нормирование v поля $\mathbb{K}$ продолжает p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Это позволяет рассматривать ряд $f(\alpha)$, как элемент прямого произведения этих полей $\mathbb{K}_v$. Это прямое произведение имеет естественную структуру кольца, операциям в котором соответствуют операции по каждой координате. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathbf{a}^{(v)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_v$.

Если существует $P(x)$ - многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathbf{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathbf{a}^{(v)}) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_v$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathbf{a}$ - *алгебраический элемент*.

Если элемент $\mathbf{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$ - многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Назовем элемент $\mathbf{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ - многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , для каждого из которых есть нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование такое, что $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_v$.

Элемент $\mathbf{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ - многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathbf{a}^{(v)}) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$ рассматриваемого прямого произведения.

Примерами глобально трансцендентных чисел служат ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k!,$$

где $\{n_k\}$ - достаточно быстро растущая последовательность натуральных чисел. Более того, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k!}{p_k^{m_k}},$$

в которых p_k - простое число с номером k , а $\{n_k\}, \{m_k\}$ - достаточно быстро растущие последовательности натуральных чисел, дают примеры чисел, трансцендентных как в поле $\mathbb{R}$, так и в

любом поле $\mathbb{Q}_p$. Действительно, быстрый рост последовательности $\{n_k\}$ обеспечивает трансцендентность суммы этого ряда в любом поле $\mathbb{Q}_p$, а быстрый рост последовательности $\{m_k\}$ — трансцендентность суммы этого ряда в поле $\mathbb{R}$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности элемента не следует трансцендентность $\mathbf{a}^{(v)}$ хотя бы для одного простого числа p и нормирования v поля $\mathbb{K}$, продолжающего p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$. Например, элемент $(1, 2, \dots, n, \dots)$ прямого произведения полей $\mathbb{Q}_p$ (координата которого равна n в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$, соответствующем n -ному простому числу p_n) бесконечно трансцендентен. Действительно, любой $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля, может обратиться в ноль лишь на конечном множестве натуральных чисел.

Для совокупности элементов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ аналогичным образом определяются понятия их алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической зависимости и глобальной алгебраической независимости. Достаточно вместо многочлена $P(x)$ рассмотреть $P(x_1, \dots, x_m)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля.

В работах [10],[11] установлены теоремы для F -рядов, подобные теоремам А.Б. Шидловского для E -функций (ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$).

Сформулируем определение F -ряда. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n.$$

принадлежит классу $F(\mathbb{K}, C_1, C_2, C_3, q)$, если

1. Все коэффициенты c_n принадлежат некоторому алгебраическому числовому полю $\mathbb{K}$ конечной степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.
2. Максимумы абсолютных величин алгебраически сопряженных с числом c_n чисел представляют собой $O(C_1^n)$, $n \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $C_1 > 1$.
3. Существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что при $k = 0, 1, \dots, n$ числа $d_n c_k$ принадлежат кольцу целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ поля $\mathbb{K}$ и $d_n = q^n d_{0,n}$, $q \in \mathbb{N}$, а числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не превосходящие $C_2 n$, и для всех таких простых p выполняется неравенство $\vartheta_p(d_{0,n}) \leq C_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right)$. (Символ $\vartheta_p(a)$ обозначает степень, в которой простое число p входит в разложение на множители целого числа a .)

Это определение показывает, что F -ряды относятся к так называемым арифметическим рядам Жевре.

Теорема (Теорема 3, [10]). Пусть F -ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ и составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z).$$

Пусть γ -алгебраическое число, отличное от нуля и особых точек этой системы уравнений. Тогда ряды $f_1(\gamma), \dots, f_m(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

Вместе с тем, для конкретного поля p -адических чисел не удаётся доказать хотя бы иррациональность значений таких рядов, оценки линейных форм зависят от высоты формы [11].

Пусть $t = r - s > 0$. Будем рассматривать ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} (zt)^{tn}. \quad (3)$$

В работе [12] установлены условия на параметры рассматриваемого ряда, при которых справедливо следующее утверждение:

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть $f'(z), f''(z), \dots, f^{(r-1)}(z)$ – формальные производные ряда (3).

Пусть $\gamma \in \mathbb{K}$, $\gamma \neq 0$.

Тогда ряды $f(\gamma), f'(\gamma), f''(\gamma), \dots, f^{(r-1)}(\gamma)$ бесконечно алгебраически независимы.

В работе [13] рассматриваются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_1)_n \cdot \dots \cdot (\mu_1)_n z^n, \quad (4)$$

среди параметров которых содержатся алгебраические иррациональные числа (и, значит, они не входят в класс F – рядов) и устанавливаются условия бесконечной линейной независимости их значений в алгебраических точках. Для рядов вида (4) можно рассмотреть случай, в котором среди параметров будут глобально трансцендентные полиадические числа. Более точно, будем называть полиадическое число λ полиадическим числом Лиувилля (или лиувилевым полиадическим числом), если для любых чисел n и P существует целое число A такое, что для всех простых чисел p , удовлетворяющих неравенству $p \leq P$ выполнено неравенство

$$|\lambda - A|_p < |A|^{-n}.$$

Точнее говоря, следовало бы писать

$$\left| \lambda^{(p)} - A \right|_p < |A|^{-n},$$

однако мы условимся, что при рассмотрении поля p – адических чисел под символом λ подразумевается сумма $\lambda^{(p)}$ этого ряда. В работе [16] доказана теорема.

Теорема ([1]). *Полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, полиадическое число Лиувилля – глобально трансцендентное число.*

Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [\exp \lambda_0] + 1.$$

Пусть λ_1 – произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_1 \geq m s_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [\exp \lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} – произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq m s_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\mu_{i,0}, i = 1, \dots, m-1$ - натуральные числа. Пусть для любых $i = 1, \dots, m-1, k \geq 1$ числа $\mu_{i,k}$ - неотрицательные целые и удовлетворяют неравенству $\mu_{i,k} \leq \lambda_k$. Положим

$$\alpha_i = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_{i,l} \lambda_l, i = 1, \dots, m-1,$$

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1)_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n, \quad (5)$$

$$f_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_{m-1} + 1)_n z^n, \quad (6)$$

а для $i = 1, \dots, m-2$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_i + 1)_n (\alpha_{i+1})_n \dots (\alpha_{m-1})_n z^n.$$

Пусть M - натуральное число, рассмотрим приведённую систему вычетов по $\text{mod}(M)$, число элементов этой системы равно $\varphi(M)$, где $\varphi(M)$ -функция Эйлера. Пусть произвольным образом выбраны ϱ различных элементов $a_1, \dots, a_{\varrho}$ этой приведённой системы вычетов. Символами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\varrho}$ обозначены множества натуральных значений, принимаемых прогрессиями вида $a_i + Mk, k \in \mathbb{Z}$. Будем обозначать $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\varrho})$ множество простых чисел, входящих в объединение множеств $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\varrho}$.

Теорема ([15]). Пусть $m \geq 3, M, \varrho$ - натуральные числа, для которых $\varphi(M) > m, \varrho m > \varphi(M)(m-1)$. Тогда для любых целых чисел $h_0, \dots, h_{m-1}$, не равных одновременно нулю и любого натурального числа ξ существует бесконечное множество простых чисел p из множества $\mathbb{P}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\varrho})$ таких, что в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется неравенство

$$|h_0 f_0(\xi) + \dots + h_{m-1} f_{m-1}(\xi)|_p > 0.$$

Вполне аналогичная теорема справедлива при замене ξ на полиадическое число Лиувилля Ξ .

Для гипергеометрических рядов общего вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n} z^n,$$

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 + 1)_n \dots (\alpha_r + 1)_n}{(\beta_1 + 1)_n \dots (\beta_s + 1)_n} z^n$$

справедливо тождество

$$F_0(z) = 1 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z F_1(z).$$

Это равенство означает, что если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ и значение z - алгебраические, то оба значения $F_0(z), F_1(z)$ либо одновременно алгебраические, либо трансцендентные числа. Если же число $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_r}{\beta_1 \dots \beta_s} z$ трансцендентное и число $F_1(z) \neq 0$, то хотя бы одно из этих чисел является трансцендентным. Высказанные выше утверждения относятся как к полю комплексных чисел, так и к любому полю $\mathbb{Q}_p$.

В работе [16] предыдущая теорема применена к рядам (5),(6), т.е. $\Psi_0(z) = f_0(z)$, $\Psi_1(z) = f_1(z)$ и доказано, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - полиадические числа Лиувилля и если ξ - натуральное число или если Ξ - полиадическое число Лиувилля, то существует бесконечное множество полей $\mathbb{Q}_p$, в которых хотя бы одно из чисел $\Psi_0(\xi), \Psi_1(\xi)$ (соответственно, $\Psi_0(\Xi), \Psi_1(\Xi)$) является трансцендентным числом. Для конкретного поля $\mathbb{Q}_2$ можно получить формулируемое ниже утверждение.

Пусть

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n z^n, f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + 1)_n z^n.$$

Положим

$$\lambda_0 = 1, s_0 = [\exp \lambda_0] + 1 = 3.$$

Пусть λ_1 - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_0 + 2\lambda_0^2 = 5$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_1 \geq 2s_0 \ln s_0$$

и положим

$$s_1 = [\exp \lambda_1] + 1.$$

Для $k \geq 1$ пусть λ_{k+1} - произвольное натуральное число такое, что для любого простого числа p , удовлетворяющего неравенству

$$p \leq s_k + 2\lambda_k^2$$

выполняется неравенство

$$\text{ord}_p \lambda_{k+1} \geq 2s_k \ln s_k$$

и полагаем

$$s_{k+1} = [\exp \lambda_{k+1}] + 1.$$

Ряд

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$$

сходится в любом поле $\mathbb{Q}_p$.

Теорема([17]). *Хотя бы одно из 2-адических чисел $f_0(1), f_1(1)$ - трансцендентное 2-адическое число.*

4. Заключение

В статье дан краткий обзор современного состояния вопроса об арифметической природе значений расходящихся в поле $\mathbb{C}$ рядов и рассказано о двух основных подходах к исследованию проблемы. В работах [10], [12] содержатся результаты автора, относящиеся к развитию метода Зигеля-Шидловского и ряду других вопросов теории трансцендентных чисел в областях с неархимедовскими нормированиями. Отдельного внимания заслуживают исследования, посвящённые полиадическим числам Лиувилля [14]-[17]. Объекты, названные в этой работе полиадическими числами Лиувилля, рассматриваются относительно недавно. Отметим работу Е.Ю. Юденковой [18], в которой значения F -рядов рассматриваются в полиадических точках Лиувилля, работу В.Ю. Матвеева [19], работу Е.С. Крупицына [20], где установлены оценки многочленов от совокупностей полиадических чисел Лиувилля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский, А. Б. Трансцендентные числа.-М.: «Наука».-1987.-448 с.(Английский перевод:[3] Andrei B.Shidlovskii. Transcendental Numbers. W.de Gruyter.-Berlin.-New York.-1989.-467pp.).
2. Харди, Г. Г. Расходящиеся ряды.-М.:«URSS».-2006.-506с.
3. Рамис, Ж. П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории.-М.-Иж.: «Институт компьютерных технологий».-2002.-80 с.
4. Ferguson, T. Algebraic properties of Θ -functions // J.Number Theory. 2021.- v.229, pp.168-178.
5. Fischler, S., Rivoal, T. Arithmetic theory of E-operators // J.d l'Ecole polytechnique-Mathematiques.-2016.-т. 3.-с. 31 -65.
6. Fischler, S., Rivoal, T. Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series // Michigan Math. J.-2018.-с.239-254.
7. Rivoal, T. On the arithmetic nature of the values of the Gamma function,Euler's constant and Gompertz's constant // American J.of Math.-2012.-n/140.-№2.-с.317-348.
8. Andre, Y. Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey // J. Theor. Nombres Bordeaux.-2003.-т.15.-с.1-10.
9. Bertrand, D., Beukers, F. Equations differentielles lineaires et majorations de multiplicities.-1985.-Annales scientifiques ENS.-т.18.-№1.-с.181-192.
10. Chirskii, V. G. Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers // Russ. J. Math. Phys. 2019.- v.26, no.3, pp.286-305.
11. Ernvall-Hytonen, A.-M., Matala-aho, T., Seppala, I. Euler's factorial series, Hardy integral, and continued fractions // J.Number Theory. 2023.-v.244.-pp.224-250.
12. Chirskii, V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series // Russ. J. Math. Phys. 2020.- v.27, no.2, pp.175-184.
13. Чирский, В. Г. Об арифметических свойствах обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН, серия математическая.-2014.-т.78.-№6.-с.193-210.
14. Чирский, В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 3.-с. 245 – 255.
15. Чирский, В. Г. Арифметические свойства значений обобщенных гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2022.-т.506.-с.95-107.
16. Чирский, В. Г. Трансцендентность p -адических значений обобщенных гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Академии наук, сер. матем.информ. проц. управл.-2023.-т.510.-с.29-32.
17. Чирский, В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // Чебышевский сборник.- 2023.- т. 24.- вып. 5.- с. 194 – 200.

18. Юденкова, Е. Ю. Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F -рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник.-2021.-т. 22.- вып. 2.-с. 334 – 346.
19. Матвеев, В. Ю. Свойства элементов прямых произведений полей // Чебышевский сборник.- 2019.- т.20.- вып. 2.- с. 383 – 390.
20. Крупицын, Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов// Чебышевский сборник.- 2019.- т. 20.- вып. 2.- с. 374 – 382.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1989, “Transcendental Numbers”, *W. de Gruyter.-Berlin.-New York*, 467 pp.
2. Hardy, G. H. 1949, “Divergent Series”, *Clarendon Press.-London*, 510 pp.
3. Ramis, J. P. 1993, “Series divergentes et theories asymptotiques”, *Panoramas et Syntheses, no.21, Soc. Math. France. -Paris*, 80 pp.
4. Ferguson, T. 2021, “Arithmetic properties of Θ -functions”, *J. Number Theory*, Vol, 229, pp.168–178.
5. Fischler, S., Rivoal. T. 2016, “Arithmetic theory of E-operators”, *J. d l'Ecole polytechnique-Mathematiques*, Vol, 3, pp.31–65.
6. Fischler, S., Rivoal, T. 2018, “Microsolutions of differential operators and values of arithmetic Gevrey series”, *Michigan Math. J.*, Vol, 61, pp.239–254.
7. Rivoal, T. 2012, “On the arithmetic nature of the values of the Gamma function, Euler’s constant and Gompertz’s constant”, *American J. of Math*, Vol, 140, no.2. pp.317–348.
8. Andre, Y. 2003, “Arithmetic Gevrey series and transcendence. A survey”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, Vol, 15, pp.1–10.
9. Bertrand, D., Beukers, F. 1985, “Equations differentielles lineaires et majorations de multiplicities”, *Annales scientifiques ENS*, Vol, 18, no.1. pp.181–192.
10. Chirskii, V. G. 2019, “Product Formula, Global Relations and Polyadic Integers”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.26, no.3, pp.286–305.
11. Ernvall-Hytonen, A.-M., Matala-aho, T., Seppala, I. 2023, “ Euler’s factorial series, Hardy integral, and continued fractions”, *J. Number Theory*, Vol. 244, pp.224–250.
12. Chirskii, V. G. 2020, “ Arithmetic properties of generalized hypergeometric F - series”, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol.27, no.2, pp.175–184.
13. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters .”, *Izvestiya RAN. Ser. Math.*, Vol. 8, no.6, pp.193–210.
14. Chirskii, V. G. 2021, “ Polyadic Liouvillean numbers .”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.3, pp.245–255.
15. Chirskii, V. G. 2022, “ Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameter .”, *Dokl. Math.*, Vol. 106, no.2, pp.386–397.

16. Chirskii, V. G. 2023, “Transcendence of p -adic values of generalized hypergeometric series with transcendental polyadic parameter .”, *Dokl. Math.*, Vol. 107, no.2, pp.109–111.
17. Chirskii, V. G. 2023, “ Transcendence of certain 2-adic numbers .”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 24, no.5, pp.194–200.
18. Yudenkova, E. Yu. 2021, “ Infinite linear and algebraic independence pf values of F -series at polyadic Liouvillean point .”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 22, no.2, pp.334–346.
19. Matveev, V. Yu. 2019, “ Properties of elements of direct products of fields”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.383–390.
20. Krupitsin, E. S. 2019, “ Arithmetic properties of series of certain classes”, *Chebyshevsky sbornik*, Vol. 20, no.2, pp.374–382.

Получено: 24.03.2024

Принято в печать: