

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.54

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-248-258

Об алгоритме решения проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина

А. С. Угаров, И. В. Добрынина

Угаров Андрей Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ugarandrey@gmail.com

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается решение проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина геометрическими методами, основанными на исследовании диаграмм над данным классом групп, имеющих однослойную структуру, как ранее показано авторами. Используются преобразования диаграмм, включающие сокращения, введенные М. Деном и В. Н. Безверхним.

Статья является продолжением рассмотрения алгоритмов для решения проблем комбинаторной теории групп в обобщенных древесных структурах групп Артина, ранее авторами предлагались алгоритмы, основанные на диаграммном подходе, для решения проблем сопряженности, обобщенной сопряженности слов, построения централизаторов элемента и конечно порожденной подгруппы.

Рассматриваемый в статье класс групп представляет собой древесное произведение групп Артина с древесной структурой и групп Артина экстрабольшого типа, объединение ведется по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным образующими соответствующих групп.

Группы Артина введены в начале прошлого века как обобщение известных групп кос, класс групп Артина экстрабольшого типа выделен в 1983 году, класс групп Артина с древесной структурой определен в 2003 году. Рассматриваемые в работе группы относятся к почти большим группам Артина и в них алгоритмически разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов, что следует из доказательства их биавтоматности. Предложенный авторами подход в решении проблемы степенной сопряженности слов является более наглядным и простым.

Ключевые слова: группа Артина, алгоритмические проблемы, степенная сопряженность слов, древесное произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Угаров, А. С., Добрынина, И. В. Об алгоритме решения проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 248–258.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 512.54

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-248-258

On an algorithm for solving the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups

A. S. Ugarov (Tula), I. V. Dobrynina (Moscow)

Ugarov Andrei Sergeyevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).*e-mail: ugarandrey@gmail.com***Dobrynina Irina Vasil'evna** — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).*e-mail: dobrynirina@yandex.ru***Abstract**

The article considers the solution of the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups by geometric methods based on the study of diagrams over this class of groups having a single-layer structure, as previously shown by the authors. Chart transformations are used, including abbreviations introduced by M. Den and V. N. Bezverkhim.

The article is a continuation of the consideration of algorithms for solving problems of combinatorial group theory in generalized tree structures of Artin groups, previously the authors proposed algorithms based on a diagram approach to solve conjugacy problems, generalized conjugacy of words, the construction of centralizers of an element and a finitely generated subgroup.

The class of groups considered in the article is a tree product of Artin groups with a tree structure and Artin groups of extra-large type, amalgamated by cyclic subgroups corresponding to the generators of the groups.

Artin groups were introduced at the beginning of the last century as a generalization of the well-known braid groups, the class of extra-large Artin groups was isolated in 1983, the class of Artin groups with a woody structure was isolated in 2003. The groups considered in this paper belong to almost large Artin groups and the problems of words and conjugacy of words are algorithmically solvable in them, which follows from the proof of their biautomaticity. The approach proposed by the authors in solving the problem of power conjugacy of words is more visual and simple.

Keywords: Artin group, algorithmic problems, power conjugacy of words, tree product.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Ugarov, A. S. & Dobrynina, I. V. 2024, "On an algorithm for solving the problem of power conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 248–258.

1. Введение

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, \dots, a_l; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, l}, i \neq j \rangle,$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij} , состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и a_j , $i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}$, $i \neq j$.

Группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Апеллем и П. Шуппом [1].

Для группы Артина G построим граф Γ так, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ , а каждому определяющему соотношению $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}$, $m_{ij} < \infty$, — ребро, соединяющее вершины, соответствующие a_i и a_j , $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф, то группа Артина G называется группой Артина с древесной структурой [2].

Класс групп Артина с древесной структурой введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году [3].

Далее рассмотрим группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^t *G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{1, t\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s , где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle$, $\langle a_{j_k} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i , a_{j_k} — некоторый образующий группы G_j . Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина [4] и далее под G будем понимать такую группу, если нет специальных оговорок.

Обобщенные древесные структуры групп Артина относятся к классу почти больших групп Артина [5].

Известно, что в обобщенной древесной структуре групп Артина разрешимы проблемы равенства, сопряженности слов [5], геометрическими методами решен вопрос построения централизатора произвольного элемента [4], [6].

В доказательстве основного результата об алгоритмической разрешимости проблемы степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, перероткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $F_i = \langle a_i \rangle$, $F = \prod_{i=1}^l *F_i$ — свободное произведение циклических групп F_i , $\{a_i\}_{i=1, \overline{l}}$ — множество образующих G .

Обозначим через R_{ij} — множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произведении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в группе G_{ij} . Группу Артина G_{ij} можно задать как $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$.

Обозначим через $|w|$ длину слова w , а через $\|w\|$ — слоговую длину слова w .

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup_{i,j \in \{1, \overline{l}\}} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F .

Пусть u, v — два циклически приведенных слова, $u, z \notin \langle R \rangle^G$, не сопряженные в F и сопряженные в G , где $\langle R \rangle^G$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в G [7]. Тогда существует связная приведенная кольцевая R -диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой v^{-1} , граничными метками областей D которой являются соотношения из R [7].

Подвергнем R -диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij} -диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D . Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij} -диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D . Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F , то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную R -диаграмму M , инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w , причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна единице.

Введем ряд определений, следуя работам [2], [8], [9], [10].

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D , $d(D)$ — число ребер в граничном цикле D .

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e , в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D , называется $(s-i)$ -областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть M , если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \dots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \dots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M [7].

Граничную область D R -диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Правильная область D R -диаграммы M называется *деновской* [7], если $i(D) < d(D)/2$.

Удаление внешней границы деновской области R -диаграммы M называется *деновским сокращением* R -диаграммы M или R -сокращением.

R -диаграмма M является R -приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R -приводимым (R -сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s , являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $\|b\| < \|s\|$.

Слово w называется циклически R -несократимым, если любая его циклическая перестановка w^* не содержит R -сокращения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [2] Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^n D_i$ образует полосу в R -приведенной R -диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, если

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1, n-1}$, где e_i — ребро ;
2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, где γ_i — связный путь, причем $\|\gamma_i\| \geq 1$;
3. $\|\partial D_1 \cap \gamma\| = \|\partial D_1 \setminus (\partial D_1 \cap \gamma)\|$ и $\|\partial D_n \cap \gamma\| = \|\partial D_n \setminus (\partial D_n \cap \gamma)\|$;
4. $\|\partial D_j \cap \gamma\| + 2 = \|\partial D_j \setminus (\partial D_j \cap \gamma)\|$, $j = \overline{2, n-1}$.

Пусть Π — полоса R -диаграммы M . Замену R -диаграммы M на R -диаграмму M_1 , полученную из M удалением полосы Π , назовем $\bar{R}$ -сокращением.

R -приведенное слово w группы G назовем $\bar{R}$ -приводимым ($\bar{R}$ -сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \dots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\|d_t\| = \|d_{t+1}\| = 1$, $\|s_t\| = \|b_t\| + 2$ и для t , $1 < t < n$, $\|b_t\| = \|s_t\|$.

Слово w называется циклически $\bar{R}$ -несократимым, если любая его циклическая перестановка w^* не содержит $\bar{R}$ -сокращения.

ЛЕММА 1. Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Артина G выяснить, является ли w R -приведенным.

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Артина G выяснить, является ли w $\bar{R}$ -приведенным.

Доказательство очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Приведенную связную кольцевую R -диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \dots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m, D_j \cap \gamma \neq \emptyset, D_j \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m}, e_j$ — ребро,

или

2) $M = (\bigcup_{i=1}^p N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^p \gamma_j), N_i$ — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1, p}, \gamma_i$ — простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p , а конец — A_1 , где каждое N_i из состоит из областей $D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{im_i}$, причем $D_{ij} \cap D_{i,j+1} = e_{ij}, j = \overline{1, m_i-1}, D_{ij} \cap \gamma \neq \emptyset, D_{ij} \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}, e_{ij}$ — ребро.

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и γ , и δ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R -диаграмму, то есть R -диаграмму, в которой $\gamma \cap \delta \neq \emptyset$. Пути γ_i , по которым пересекаются γ, δ , отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

ТЕОРЕМА 1. [6] Пусть M — приведенная связная кольцевая R -диаграмма сопряженности слов $\varphi(\gamma), \varphi(\delta) \in G$ над группой Артина G , не содержащая $(s-i)$ -областей; γ, δ — соответственно внешний и внутренний граничный циклы M , слова $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)$ циклически R и $\bar{R}$ -несократимы. Тогда M является однослойной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Кольцевую связную приведенную однослойную R -диаграмму M с граничными циклами γ, δ над группой Артина G , метки которой $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)$ приведены в F , $\varphi(\gamma)$ — R -приведено и $\bar{R}$ -приведено, назовем особо специальной R -диаграммой, если в M существует одна область D такая, что $\|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma))\| + 2 = \|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \delta))\|$ ($\|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \gamma))\| = \|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \cap \delta))\| + 2$), а для остальных областей D' $\|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \gamma))\| = \|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \cap \delta))\|$.

Замену слова $\varphi(\gamma)(\varphi(\delta))$ на слово $\varphi(\delta)(\varphi(\gamma))$ назовем специальным кольцевым R -сокращением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Артина G является тупиковым, если w циклически R -несократимо, циклически $\bar{R}$ -несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R -сокращение.

ЛЕММА 2. [8] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} \rangle, w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в G_{ij} . Тогда оно имеет вид:

при $m_{ij} = 2k + 1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ij} = 2k, k > 1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_j a_i^{-m} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ji} = 2$ $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

ЛЕММА 3. Пусть M — связная приведенная минимальная R -диаграмма над группой Артина G с граничными циклами γ, δ ; $\varphi(\gamma), \varphi(\delta)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\gamma) = x^r$, то $\varphi(\delta) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1, l}}, \{a_i\}_{i=\overline{1, l}}$ — множество образующих группы G .

ЛЕММА 4. Пусть $v, w \in G$ — тупиковые слова и пусть v сопряжено с w в G . Тогда $\|v\| = \|w\|$ и никакое слово $u \in G$ такое, что $\|u\| < \|v\|$, не сопряжено с v в G .

Доказательство следует из работ [2] и [9], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s - i)$ -областей.

3. Основной результат

ЛЕММА 5. Пусть слово $w \in G$ циклически несократимо в свободной группе и не равно 1 в G . Тогда любая степень слова, сопряженного w или w^2 в группе G , циклически R и $\bar{R}$ -несократима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G является группой Артина с древесной структурой, либо группой Артина экстрабольшого типа, то доказательство следует соответственно из работ [11], [10]. Перейдем к общему случаю. Рассмотрим циклически R и $\bar{R}$ -несократимое слово w , не равное 1 в группе G . При необходимости перейдем к сопряженному с ним тупиковому слову. Надо показать, что слово w^n является R -несократимым.

Допустим, слово w^n содержит деновскую область D . Очевидно, что такая область не может содержаться внутри w , так как w R -несократимо. Поэтому она должна содержаться на границе w с w , что невозможно, так как слово w циклически R -несократимо. Следовательно, слово w^n не содержит деновских областей.

Пусть в слове w^n имеют место $\bar{R}$ -сокращения. Рассмотрим окружность, по границе которой запишем слово w^n (обозначим эту границу ∂M). Разобьем окружность на пути $\gamma_i, i = \overline{1, n}$, причем $\varphi(\gamma_i) = w$. Можно всегда считать, что $n = 2k$. Пусть $\gamma = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{n'}$ — полоса. Обозначим $\partial M \cap \gamma = \gamma', \alpha(\gamma')$ — начальную точку пути γ' , $\omega(\gamma')$ — конечную точку пути γ' .

Будем полагать, сделав, если это необходимо, циклический сдвиг, что $\omega(\gamma') = \omega(\gamma_1)$. Считаем, что $\varphi(\gamma_1) = w$ — циклически несократимое слово.

Подклеим с внешней стороны к $\gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{2k-1}$ и с внутренней стороны окружности к $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_{2k}$ полосы, совместив конечные точки полос и путей. Полученную кольцевую диаграмму обозначим через K .

В силу теоремы 1 строение диаграммы над группой Артина G аналогично строению диаграммы над группой Артина с древесной структурой, поэтому случаи для полос, у которых $d(D_1) = \{4, 6\}$ и $d(D_n) = \{4, 6\}$ рассматриваются аналогично доказательству леммы 12 работы [11]. В случаях, когда $d(D_1) > 6$ и (или) $d(D_{n'}) > 6$, доказательство проводится аналогично и значительно проще.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для двух любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, t такие, что слова w^n, v^n сопряжены в группе G .

ЛЕММА 6. [10] В группе Артина экстрабольшого типа разрешима проблема степенной сопряженности слов.

ЛЕММА 7. [2] В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема степенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 2. В обобщенных древесных структурах групп Артина разрешима проблема степенной сопряженности слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если w, v являются словами из группы Артина экстрабольшого типа, либо из группы Артина с древесной структурой, то результат следует из лемм 6, 7 соответственно. Рассмотрим общий случай обобщенной древесной структуры групп Артина G .

Если необходимо, перейдем от слов w, v к сопряженным с ними словам w_0, v_0 , любая степень которых циклически R и $\bar{R}$ -несократима, на основании леммы 5.

Рассмотрим кольцевую связную приведенную R -диаграмму M сопряженности слов w_0^m и v_0^n , соответствующую пункту 1) определения 2. Пусть $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$, $\varphi(\delta) = (v_0^*)^n$, причем путь γ начинается в точке O , а путь δ — в точке O_1 . Сделаем разрез диаграммы M по ребру OO_1 , получим односвязную однослойную приведенную R -диаграмму, которую обозначим M^* .

1. Пусть диаграмма M^* состоит из областей, для которых метки пересечения с γ и δ имеют одну и ту же слоговую длину, то есть являются областями первого типа [10]. Тогда приклеим к ней диаграмму $M^{*'}$, тождественную диаграмме M^* , с циклическим сдвигом на слово w_0^* .

Заметим, что $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$, $\varphi(\gamma_i) = w_0^*, i = \overline{1, m}$, причем $\alpha(\partial D_1 \cap \gamma) = O$, $w(\gamma_1) = O'$. Таким образом, $\varphi(\gamma_1) = \varphi(OO') = w_0^*$.

Очевидно, что внутренняя точка O' не может иметь степень 3 в диаграмме $M^* \cup M^{*'}$, так как нет сокращений и циклов, в которых участвуют не менее двух образующих из группы Артина с древесной структурой. Поэтому $O' = \alpha(\partial D_i \cap \gamma)$ имеет степень 4.

Метки пересекающихся областей D_j и $D'_{j'}$, $j, j' = \overline{1, n}$, содержат одинаковые образующие. Действительно, при $\|\varphi(\partial D_j \cap \partial D'_{j'})\| > 1$ это очевидно. Пусть $\|\varphi(\partial D_j \cap \partial D'_{j'})\| = 1$. Предположим, что метки области D_r из M^* и расположенной над ней области D'_1 из $M^{*'}$ содержат различные образующие. Тогда рассмотрим поддиаграмму, содержащую области D'_n, D_{r-1}, D_r, D'_1 , содержащие точку O' , расположенные относительно этой точки против часовой стрелки, где $d(D'_n) = d(D_{r-1}) = d(D_r) = d(D'_1) = 4$. Пусть $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = a^k$, $\varphi(\partial D'_1 \cap \partial D_r) = b^l$, $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r) = c^t$, $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D'_n) = d^r$, $k, l, t, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Такой случай соответствует группе Артина с древесной структурой и данному фрагменту диаграммы соответствует цикл в дереве-графе, что невозможно. Таким образом, получаем, что $\varphi(\partial D_j), \varphi(\partial D'_{j'}) \in G_{ab}$, $\forall j, j' = \overline{1, n}$. Далее будем рассуждать, следуя работе [2].

Рассмотрим случай, когда $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$, $m_{ab} \geq 2$, $\varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s$, $\varphi(\partial D_1 \cap \delta) = r$, $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$, $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^q$, $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^h$, $\varphi(\partial D'_1 \cap \partial D'_2) = a^t$.

Для области D_1 имеем $sb^p r a^h = 1$, а для D'_1 выполнено $rb^q s a^t = 1$. Поскольку $a^h s b^p r = 1$, то $r = a^{-1} s^{-1} b^{-p}$, откуда $s^{-1} b^{q-p} s = a^{h-t}$. В силу леммы 3 справедливо равенство $q-p = h-t = m$.

В случае $b = a$ имеем $s^{-1} b^m s = b^m$. Если $\|\varphi(\partial D_1)\| = 2m_{ab}$, то, применяя лемму 2, получим $p = h$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = b^p$.

Рассмотрим случай $\|\varphi(\partial D_1)\| \neq 2m_{ab}$.

Пусть $m_{ab} = 2k$. Определяющее соотношение тогда имеет вид: $\underbrace{ab \dots ab}_{2k} = \underbrace{ba \dots ba}_{2k}$, следовательно, $\underbrace{ab \dots a}_{s_0} b^p \underbrace{a^{-1} b^{-1} \dots a^{-1}}_{s_0^{-1}} = b^p$.

Диаграмма сопряженности для b^m и b^m состоит из k вложенных $(s-i)$ -областей с граничными циклами δ_i , $i = \overline{1, k+1}$. Для каждой $(s-i)$ -области D_j^* имеем $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, $\varphi(\delta_i) = b^p$, $\varphi(\delta_{k+1}) = b^h$, все D_j^* имеют четное m_{ab} , а $\varphi(e_j) = s_0$, где s_0 — подслово определяющего соотношения, e_j — ребро, соответствующее данной области, $j = \overline{1, k}$. Отсюда $\forall i \varphi(\delta_i) = b^p$, $p = h$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = b^p$. В общем случае $s = s_0 b^{j_1} s_0 b^{j_2} \dots s_0 b^{j_{k-1}}$. Так как $s_0 b^p = b^p s_0$ в G_{ab} , то $s = s_0^{j_1+j_2+\dots+j_{k-1}}$. Если s минимальной длины, то $w(e_j) = \alpha(e_{j+i}), \forall j = \overline{1, k}$ и $s = s_0^k$.

Таким образом, мы разбили область D_1 на области $D_1 = \cup D_j^*, j = \overline{1, k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$ и все D_j^* являются областями первого типа.

Пусть $m_{ab} = 2k + 1$. Определяющее соотношение для m_{ab} : $\underbrace{ab \dots aba}_{2k+1} = \underbrace{ba \dots bab}_{2k+1}$, тогда $\underbrace{ab \dots ba}_{z_1} b^p \underbrace{b^{-1} a^{-1} \dots b^{-1} a^{-1}}_{z_1^{-1}} = a^p$ и $\underbrace{ab \dots ab}_{z_2} a^p \underbrace{a^{-1} b^{-1} \dots a^{-1} b^{-1}}_{z_2^{-1}} = b^p$

В силу нечетности m_{ab} для перевода b_m в b_m нужно два (либо четное число) сопряжения словами z_1, z_2 . Диаграмма сопряженности для b^m и b^m состоит из k вложенных $(s-i)$ -областей

с граничными циклами $\delta_i, i = \overline{1, k+1}$, для каждой $(s-i)$ -области D_j^* имеем $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$. Имеем $\varphi(\partial\delta_1) = b^p, \varphi(\partial\delta_{k+1}) = a^h$, все D_j^* будут с нечетным m_{ab} . Получаем, что если $\varphi(\partial\delta_j) = b^p, \varphi(\partial\delta_{j+1}) = a^p$, то $\varphi(e_j) = z_2$ и $\varphi(e_{j+1}) = z_1$. Отсюда $p = h, \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^p$.

В случае $b \neq a$ имеем $s^{-1}b^m s = a^m$. Если для области D_1 справедливо $\|\varphi(\partial D_1)\| = 2m_{ab}$, то, применяя лемму 2, получим $p = h, \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^p$. Если же $\|\varphi(\partial D_1)\| \neq 2m_{ab}$, то строим диаграмму сопряженности для b^m и a^m подобно предыдущему случаю. Тогда $D_1 = \cup D_j^*, j = \overline{1, k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$ и все D_j^* являются областями первого типа, $\varphi(\partial D_j \cap \partial D_{j+1}) = a^p$ или $\varphi(\partial D_j \cap \partial D_{j+1}) = b^p$. Получим $s = z_2 z_1 z_2 \dots z_2$ и $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^p$.

Пусть $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$. Учитывая, что область D_1 состоит из ряда областей $D_j^*, j = \overline{1, k}$, с $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$, по лемме 2 метки общих ребер областей есть степени b^p или a^p . Все области $D_r, r = \overline{1, n}$, имеют первый тип, поэтому получим $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r) = b^p$. Если метка $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1)$ есть степень образующего, то такую же степень будет иметь метка каждого ребра $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r), i = \overline{1, n}$. Выделим поддиаграмму $\cup D_k$ и склеим ее по ребрам $e_1 = \partial D_n \cap \partial D_1$ и $e_2 = \partial D_{r-1} \cap \partial D_r$, где $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = b^p$. Получим кольцевую связную приведенную R -диаграмму сопряженности слов w_0^*, v_0^* , а, значит, степени этих слов также сопряжены.

2. Пусть диаграмма M^* содержит области первого, второго (когда $\|\varphi(\partial D \cap \gamma)\| = \|\varphi(\partial D \cap \delta)\| + 2$) и третьего типов (когда $\|\varphi(\partial D \cap \delta)\| = \|\varphi(\partial D \cap \gamma)\| + 2$) [10]. Диаграмма M^* содержит одинаковое число областей второго и третьего типов, причем области второго типа должны чередоваться с областями третьего типа, иначе в диаграмме M^* выделится полоса. Вновь приклеим к ней диаграмму $M^{*'}$, тождественную диаграмме M^* , с циклическим сдвигом на слово w_0^* . Обозначим $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m, \varphi(\gamma_i) = w_0^*$, причем, $\alpha(\partial D_1 \cap \gamma) = O, w(\gamma_1) = O', \varphi(\gamma_1) = \varphi(OO') = w_0^*$.

Степень внутренней точки $O' \geq 4$, как показано ранее. Рассмотрим случай, когда степень O' равна четырем.

Пусть D_1, D_r и, соответственно, D'_1 — области третьего типа. При этом $\|\partial D_r \cap \gamma\| = \|\partial D'_1 \cap \gamma\|$, где $d(D_r) = d(D'_1)$. Следовательно, $\varphi(\partial D_1) \in G_{ab}$. Обозначим $\varphi(\partial D_n) \cap \varphi(\partial D_1) = b^p$.

Пусть $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D'_1) \in G_{ab}, m_{ab} \geq 2, \varphi(\partial D_1 \cap \gamma) = s, \varphi(\partial D_1 \cap \delta) = r, \varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p, \varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^q, \varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a^h, \varphi(\partial D'_1 \cap \partial D'_2) = a^t, \|r\| < \|s\|$. Тогда аналогично первому случаю $s^{-1}b^m s = a^m$, где $q - p = h - t = m$. Строим, как в первом случае, диаграмму сопряженности для b^m и a^m .

Если для области D_1 справедливо $\|\varphi(\partial D_1)\| = 2m_{ab}$, то $\|\varphi(\partial D'_1)\| = 2m_{ab}, \varphi(\partial D_1 \cap \partial D'_1)$ содержит либо b^p (если $m_{ab} = 2k, k \geq 1$), либо a^p (если $m_{ab} = 2k + 1$). В силу $d(D_1) = d(D'_1)$ и леммы 2 $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^p$ и $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r) = b^p$.

Пусть для области D_1 выполняется условие $\|\varphi(\partial D_1)\| \neq 2m_{ab}$.

Если $m_{ab} = 2k, k > 1$, то строя диаграмму сопряженности как и для первого случая, получаем разбиение области D_1 на области $D_1 = \cup D_j^*, j = \overline{1, k}$, где $\|\varphi(\partial D_j^*)\| = 2m_{ab}$. В силу $\|r\| < \|s\|$, получим, что среди областей первого типа D_j^* есть хотя бы одна область D_k^* третьего типа. Поэтому $s = s_0^k$. Для областей D_j^* имеем $d(D_j^*) = 2\|s_0\| + 2, j = \overline{1, k-1}$. Но $d(D_k^*) = \|s_0\| + 2$. Данный случай невозможен, так как получим, что подслова $s_0 = \varphi(\partial D_j^* \cap \gamma), j = \overline{1, k-1}$ и $s_0 = \varphi(\partial D_k^* \cap \gamma)$ различны.

При $m_{ab} = 2k + 1$ получаем аналогичный случай. Таким образом, $p = q, \varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^p$.

Если $\varphi(\partial D_n \cap \partial D_1) = b^p$, то $\varphi(\partial D'_n \cap \partial D'_1) = b^p$ и ту же степень образующего содержит $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r)$, то есть $\varphi(\partial D_{r-1} \cap \partial D_r) = b^p$. Выделим поддиаграмму $\cup D_k$ и склеим ее по ребрам $e_1 = \partial D_n \cap \partial D_1$ и $e_2 = \partial D_{r-1} \cap \partial D_r$, где $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = b^p$. Таким образом, получим кольцевую связную приведенную R -диаграмму сопряженности слов w_0^*, v_0^* , поэтому степени этих слов также сопряжены.

Пусть теперь D_1 и D_r — области различных типов (например, области D_1 — третьего, D_r — первого или второго типов). Этот случай невозможен. Действительно, если к диаграмме M^* приклеим тождественную диаграмму $M^{*'}$ к границе δ , то получим, что как минимум метки

двух областей содержат одинаковые образующие $\varphi(\partial D_1), \varphi(\partial D_2) \in G_{ab}$. А это противоречит инвариантности диаграммы M^* относительно таких преобразований.

Случай, когда степень O' больше четырех, очевиден.

3. Пусть диаграмма M^* содержит одну область второго или третьего типа. Данный случай невозможен, так как в $\varphi(\gamma_1 \cup \gamma_2) = (w_0^*)^2$ будут $\bar{R}$ -сокращения.

Рассмотрим теперь простую кольцевую диаграмму $M = (\bigcup_{i=1}^p N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^p \gamma_j)$ сопряженности циклически $R, \bar{R}$ -несократимых слов w_0^n, v_0^m , N_i — поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i, \gamma_i \cap \delta_i = \{A_i, B_i\}$ — вершины, $i = \overline{1, p}$, γ_i — простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p , а конец — A_1 .

Пусть $\varphi(\gamma) = (w_0^*)^m$ и $\varphi(\delta) = (v_0^*)^n$. Заметим, что $p < |w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1$. Действительно, если осуществить разрез в точке A_1 , то слово w_0^* будет разбито на две части $w_0^* = w_{01}w_{02}$. При этом может быть только $|w_0^*|$ возможностей разбить слово на две части. Аналогичное верно и для слова v_0^* . Если данное неравенство не выполняется, то выделится повторяющаяся часть, которую можно вырезать, а оставшуюся часть снова замкнуть в кольцо.

Рассмотрим диск N_1 , в котором внешний путь γ_1 , внутренний путь AB — δ_1 . Заметим, что слоговые длины путей γ_1 и δ_1 должны совпадать, иначе диаграмма M будет содержать полосу, что невозможно ввиду ее $\bar{R}$ -приведенности.

Считаем, что $|\gamma_1|$ — большое число. Пусть $|\gamma_1| > 4\|w_0\|$. Выделим на пути γ_1 , начиная от вершины A_1 , некоторую циклическую перестановку w_0^* слова w_0 такую, что слово w_0^* начинается в вершине O , имеющей степень 3. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично как и для диаграмм предыдущего вида.

Так как число дисков меньше $|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1$, длина пути в каждой диске $|\gamma_1| \leq 4\|w_0\|$, длина каждого простого пути не превышает $|w_0^*|$, то $m \cdot |w_0^*| < 5|w_0^*|(|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1)$, откуда $m, n < 5(|w_0^*| \cdot |v_0^*| + 1)$.

Таким образом, проблема степенной сопряженности слов разрешима.

4. Заключение

В данной работе рассмотрено решение проблемы степенной сопряженности слов геометрическими методами. Данный результат является частью исследований комбинаторных свойств обобщенных древесных структур групп Артина и может быть использован для решения алгоритмических проблем в общем классе групп Артина.

Авторы выражают благодарность профессору В. Н. Безверхнему за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxeter groups // *Inventiones mathematicae*. 1983. №72. С. 201-220.
2. Карпова О. Ю., Безверхний В. Н. Решение проблемы степенной сопряженности в группах Артина с древесной структурой // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. 2009. Вып. 3. С. 42-59.
3. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции. Тула: ТГПУ, 2003. С. 33-34.
4. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщённых древесных структурах групп Артина // *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные*

- проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула: ТГПУ, 2019. С. 42-44.
5. Holt D. F., Rees S. E. Biautomatic structures in systolic Artin groups // *International Journal of Algebra and Computation*. 2021. Т. 31, №3. С. 365-391.
 6. Добрынина И. В., Угаров А. С. Об обобщенных древесных структурах групп Артина // *Владикавказский математический журнал*. 2021. Т. 23, №3. С. 52-63.
 7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
 8. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1999. Т. 5, № 1. С. 1-38.
 9. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп*. Тула:ТГПУ, 1986. С. 26-61.
 10. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9, №1. С. 50-68.
 11. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9, №1. С. 30-49.
 12. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устьян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // *Чебышевский сборник*. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.

REFERENCES

1. Appel, K. & Schupp, P. 1983, "Artins groups and infinite Coxter groups", *Inventiones mathematicae*, vol. 72, pp. 201-220.
2. Karpova, O. Ju. & Bezverkhonii, V.N. 2009, "Solving the power conjugacy problem in Artin groups with a tree structure", *Izvestia of Tula state University. Estestven nauki*, no. 3, pp. 42-59.
3. Bezverkhonii, V. N. 2003, "On Artin groups, Coxeter with a tree structure", *V mezhdunarodnaya konferentsiya «Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya»: tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii*, Tula, pp. 33-34.
4. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A.S. 2019, "On the centralizer of an element in generalized tree structures of Artin groups", *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XVII International Conf. devoted to the 100-th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev, and B. F. Skubenko*, Tula: TSPU, pp. 42-44.
5. Holt, D.F.& Rees, S.E. 2021, "Biatomatic structures in systolic Artin groups", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 31, no. 3, pp. 365-391.
6. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A.S. 2021, "On generalized tree structures of Artin groups", *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, vol. 23, no. 3, pp. 52-63.

7. Lyndon, R. & Schupp, P. 1980, *Combinatorial group theory*, Mir, Moscow.
8. Bezverkhniĭ, V. N. 1999, "Solution of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 1-38.
9. Bezverkhniĭ, V. N. 1986, "Solution of the problem of conjugation of words in Artin groups of large type", *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.
10. Bezverkhniĭ, V. N. & Kuznetsova, A. N. 2008, "Solvability of the problem of power conjugacy of words in Artin groups of extra-large type", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 50-69.
11. Bezverkhniĭ, V. N. & Karpova, O. Ju. 2008, "The occurrence problem a cyclic subgroup in Artin groups with a woody structure", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 30-49.
12. Bezverkhniĭ, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E. 2016, "On algorithmic problems in Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 23-50.

Получено: 05.05.2024

Принято в печать: 04.09.2024