ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-236-247

О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина

А. С. Угаров, И. В. Добрынина

Угаров Андрей Сергеевич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

Группы Артина являются обобщением известных групп кос, в последних алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов. В силу сложности решения указанных проблем в классе групп Артина, алгоритмические проблемы рассматриваются в различных его подклассах.

В 1983 году К. Аппель и П. Шупп определили группы Артина экстрабольшого типа.

В 2003 году В. Н. Безверхний ввел в рассмотрение группы Артина с древесной структурой.

В статье рассматриваются обобщенные древесные структуры групп Артина, представляющие собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп.

Авторами статьи приводится оригинальное доказательство алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина. Метод доказательства использует подход Г. С. Маканина, примененный им для исследования конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Артина конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Ключевые слова: алгоритмические проблемы, группа Артина, обобщенная сопряженность, древесное произведение групп, централизатор.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
Угаров, А. С., Добрынина, И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 236–247.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-236-247

On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Artin groups

A. S. Ugarov, I. V. Dobrynina

Ugarov Andrei Sergeyevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: ugarandrey@gmail.com
Dobrynina Irina Vasil'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

Artin groups are a generalization of known braid groups, in which the problems of words and conjugacy of words are algorithmically solvable. Due to the complexity of solving these problems in the Artin group class, algorithmic problems are considered in its various subclasses.

In 1983 K. Appel and P. Schupp defined the Artin groups extra-large type.

In 2003, V. N. Bezverkhny introduced the Artin group with a tree structure.

Artin groups of extra-large type and Artin groups with tree structure are well studied and most of the algorithmic problems are solved in them, in particular, the algorithmic solvability of the problem of generalized conjugacy of words is proved.

The article deals with generalized tree structures of Artin groups, which are tree products of Artin groups of extra-large type and Artin groups with a tree structure, united by cyclic subgroups corresponding to generatings these groups.

The authors provide a original proof of algorithmic solvability of the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Artin groups. The method of proof uses the approach of G. S. Makanin, applied by him to study the finite generality of the element Normalizer in braid groups. In addition, this paper shows that the centralizer of a finitely generated subgroup in the generalized tree structure of Artin groups is finitely generated and there is an algorithm that writes out its generators.

Keywords: algorithmic problems, Artin group, generalized conjugation, tree product of groups, centralizer.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
Ugarov, A. S. & Dobrynina, I. V. 2024, "On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Artin groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 236–247.

1. Введение

Пусть G – конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, l}, i \neq j \rangle,$$

где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ – слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \backslash \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1, l}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty, i \neq j$, определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

К. Аппель и П. Шупп [1] определили класс групп Артина экстрабольшого типа и в нем решили проблемы равенства и сопряженности слов.

Группы Артина с древесной структурой введены В. Н. Безверхним [2]. В графе, соответствующем группе Артина, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Артина с древесной структурой. В данном классе групп В. Н. Безверхним и О. Ю. Платоновой (Карповой) решен ряд алгоритмических проблем [3].

В статье приводится оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина, представляющих собой древесные произведения групп Артина экстрабольшого типа и групп Артина с древесной структурой, объединенных по циклическим подгруппам, соответствующим образующим этих групп. Доказывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в данном классе групп конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие

В доказательстве основных результатов используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном [4] и усовершенствованный В. Н. Безверхним [5], а также методы работы [6]. Более того, в данной статье мы хотим использовать процедуру доказательства из статьи [7], где данные проблемы рассматриваются для обобщенных древесных структур групп Кокстера. Заметим, что группа Кокстера получается мз группы Артина добавлением к определяющим соотношениям соотношений вида $a_i^2 = 1, i = \overline{1,l}$. Для этого нам прежде всего надо изучить строение диаграмм над обобщенными древесными структурами групп Артина и рассмотреть возможности построения базисных последовательностей.

2. Централизатор конечно порожденной подгруппы

Рассмотрим конечно порожденную группу Артина, заданную копредставлением $G = \langle a_1, ..., a_l; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, i, j = \overline{1,l}, i \neq j \rangle$, где $< a_i a_j >^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,l}$, $i \neq j$, при $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если $m_{ij} > 3$, $i \neq j$, то G называется группой Артина экстрабольшого типа [1].

Построим для группы Артина G граф Γ такой, что образующим a_i поставим в соответствие вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $< a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}}, m_{ij} \neq \infty$ – ребро, соединяющее a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Артина с древесной структурой [3].

Группа Артина G с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Артина, объединенных по бесконечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы Артина G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Артина на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j \rangle$.

Далее в статье будем рассматривать группу группу Артина

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} * G_s; a_{i_m} = a_{j_k}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Артина G_s, где G_s либо группа Артина с древесной структурой, либо группа Артина экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_k}$ означает, что объединение групп Артина G_i и G_j ведется по бесконечным циклическим подгруппам $\langle a_{i_m} \rangle$, $\langle a_{j_k} \rangle$, где a_{i_m} — некоторый образующий группы G_i, a_{j_k} — некоторый образующий группы G_j. Такую группу Артина G будем называть обобщенной древесной структурой групп Артина

[8] и далее всюду под группой Артина G будем понимать такую группу, если нет специальных оговорок.

Данный класс групп относится к почти большим группам Артина и в нем алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов [9].

Пусть $F_i = \langle a_i \rangle$, $F = \prod\limits_{i=1}^{l} *F_i$ – свободное произведение циклических групп $F_i, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ – множество образующих G.

Обозначим через R_{ij} – множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении $F_{ij} = F_i * F_j$ и равных 1 в группе G_{ij}. Группу Артина G_{ij} можно задать как $G_{ij} = \langle a_i, a_j; R_{ij} \rangle$.

Обозначим через $|w|$ длину слова w, а через $||w||$ – слоговую длину слова w.

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup\limits_{i,j \in \{\overline{1,l}\}} R_{ij}$ – симметризованное подмножество свободного произведения F.

Пусть u, v – два циклически приведенных слова, u, $z \notin \langle R \rangle^G$, не сопряженные в F и сопряженные в G, где $\langle R \rangle^G$ – нормальное замыкание симметризованного множества R в G [4]. Тогда существует связная приведенная кольцевая R-диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой v^{-1}, граничными метками областей D которой являются соотношения из R [4].

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F связную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то слоговая длина метки этого ребра равна единице.

Введем ряд определений, следуя работам [3], [5], [10] – [12].

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ – число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ – правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M [4].

Граничную область D R-диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Определение 1. *Правильная область D R-диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.*

Определение 2. *Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением.*

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $||b|| < ||s||$.

Определение 3. *Поддиаграмма* $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ *образует полосу в* R*-приведенной* R*-диаграмме* M *с граничным циклом* $\partial M = \gamma \cup \delta$, *если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i,\ i = \overline{1, n-1}$, *где* e_i *– ребро ;*
2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i,\ i = \overline{1, n}$, *где* γ_i *– связный путь, причем* $||\gamma_i|| \geqslant 1$;
3. $||\partial D_1 \cap \gamma|| = ||\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)||$ *и* $||\partial D_n \cap \gamma|| = ||\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)||$;
4. $||\partial D_j \cap \gamma|| + 2 = ||\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)||,\ j = \overline{2, n-1}$.

Определение 4. *Пусть* Π *– полоса* R*-диаграммы* M. *Замену* R*-диаграммы* M *на* R*-диаграмму* M_1, *полученную из* M *удалением полосы* Π, *назовем* $\overline{R}$*-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\quad ||d_t|| = ||d_{t+1}|| = 1$, $||s_t|| = ||b_t|| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $||b_t|| = ||s_t||$.

Лемма 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова* w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w R*-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w *группы Артина* G *выяснить, является ли* w $\overline{R}$*-приведенным.*

Доказательство очевидно.

Определение 5. *Приведенную связную кольцевую* R*-диаграмму* M *с границей* $\partial M = \sigma \cup \tau$ *будем называть однослойной, если*

1) M *состоит из областей* $D_1, D_2, \ldots, D_m$, *где* $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \sigma \neq \emptyset, D_j \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m}$, e_j *– ребро,*

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$, N_i *– поддиаграммы (диски) в* M *с границами* $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = A_i, B_i$ *– вершины,* $i = \overline{1, p}$, γ_i *– простые пути с концами* $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, *простой путь* γ_1 *имеет начало* B_p, *а конец –* A_1, *где каждое* N_i *из состоит из областей* $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, *причем* $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} *– ребро.*

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и σ, и τ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, то есть R-диаграмму, в которой $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Пути γ_i, по которым пересекаются σ, τ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Теорема 1. *[11] Пусть* M *– приведенная связная кольцевая* R*-диаграмма сопряженности слов* $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ *над группой Артина* G, *не содержащая* $(s-i)$*-областей;* σ, τ *– соответственно внешний и внутренний граничный циклы* M, *слова* $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ *циклически* R *и* $\overline{R}$*-несократимы. Тогда* M *является однослойной.*

Определение 6. *Кольцевую связную приведенную однослойную* R*-диаграмму* M *с граничными циклами* σ, τ *над группой Артина* G, *метки которой* $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ *приведены в* F, $\varphi(\sigma)$ *–* R*-приведено и* $\overline{R}$*-приведено, назовем особо специальной* R*-диаграммой, если в* M *существует одна область* D *такая, что* $||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))|| + 2 = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))||$ $(||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))|| = ||\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))|| + 2)$, *а для остальных областей* D' $||\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \sigma))|| = ||\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \tau))||$.

Замену слова $\varphi(\sigma)(\varphi(\tau))$ на слово $\varphi(\tau)(\varphi(\sigma))$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Определение 7. *Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Артина G является тупиковым, если w циклически R-несократимо, циклически $\overline{R}$-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.*

Лемма 2. *Пусть M – связная приведенная минимальная R-диаграмма над группой Артина G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\sigma) = x^r$, то $\varphi(\tau) = y^r$, где $x, y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, \{a_i\}_{i=\overline{1,l}}$ – множество образующих группы G.*

Доказательство следует из работ [3] и [10], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s-i)$-областей.

Теорема 2. *[5] Пусть $G_{ij} = \langle a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} = < a_j a_i >^{m_{ji}} \rangle$, $w \in G_{ij}$ циклически несократимо в свободной группе, имеет слоговую длину, равную $2m_{ij}$, и равно единице в G_{ij}. Тогда оно имеет вид:*

при $m_{ij} = 2k+1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_i a_j^{-m} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_i^m a_j^{-1} a_i^{-1} a_j^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ij} = 2k, k > 1$ $a_i^m a_j a_i \dots a_j a_i^{-m} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-1}$, либо $a_i a_j a_i \dots a_j^m a_i^{-1} a_j^{-1} a_i^{-1} \dots a_j^{-m}$, либо им обратные,

при $m_{ji} = 2$ $a_i^m a_j^l a_i^{-m} a_j^{-l}$, либо им обратные, $m, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Из [5] также следует, что показатели степеней можно ограничить (по модулю) числом p, называемым параметром диаграммы: $p = |w| + |v|$.

Теорема 3. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H обобщенной древесной структуры групп Артина G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.*

Доказательство. Пусть $u = x^r$, $x \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}$, тогда из леммы 2 следует, что $v = y^r$, $y \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}$, и диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$-областей.

Пусть M – кольцевая R-диаграмма, v – произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \bigcap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v: $l = e'^{-1} e_1 \dots e_n t$, где $t = e'$ либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e'' e'_1 \dots e'_n t'$, где $t' = e'$ либо $t' = e''^{-1}$ назовем циклическим в M, если l гомотопен τ, соответственно σ. Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R-диаграммы M, проходящих через некоторую точку v, принадлежащую ребру e, $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v.

Пусть $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_k = \tau$ – граничные циклы R-диаграмм, полученных из $M = M_0$ последовательным удалением $(s-i)$-областей. Но тогда $\varphi(\sigma_i) = x_i^r$, $x_i \in \{a_j^{\pm 1}\}_{j=\overline{1,l}}, i = \overline{0,k}$, и любые два элемента x_{i-1}^r, x_i^r, $i = \overline{1,k}$, где $x^r = x_0^r$, $x_k^r = y^r$ сопряжены в $G_{x_{i-1}x_i}$ максимальным куском определяющего соотношения группы $G_{x_{i-1}x_i}$.

Пусть $m_0 = \max\{m_{ij} \mid m_{ij} < \infty\}$. Тогда длина любого циклического геодезического пути из M заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + 2m_0$. Заметим, что для кольцевых R-диаграмм, состоящих из $(s-i)$-областей, в качестве параметра p можно взять любое число, в частности, $p = 0$.

Пусть слова u, v не являются степенями образующих в G. В этом случае u, v будут метками граничных циклов кольцевой R-диаграммы M как в теореме 1. Так как u сопряжено с v, u,v являются тупиковыми, то, как следует из [3], [12] и теоремы 1, $||u|| = ||v||$.

Укажем границы изменения длины циклического геодезического пути для диаграммы M. На основании теорем 1, 2 длина d циклического геодезического пути заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + |v| + 2p$.

Пусть теперь $w_1, w_2, \ldots, w_n$ – образующие H, $H < G$; считаем, что $w_1 = w_{10}$ – тупиковое слово и $\forall i$, $i = \overline{2,n}$, $w_i = c_i w_{i0} c_i^{-1}$, где w_{i0} является тупиковым; $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слова w_{i0} слову w_{i0}. Введем обозначения: $c = \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\}$, где $|c_1| = 0$ и $S(w_i, w_i)$, $i = \overline{1,n}$, – множество слов, длины d_i которых заключены в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant 2(|w_{i0}| + |c| + p + m_0)$.

Рассмотрим следующую последовательность:

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}, \tag{1}$$

где $\forall i$, $i = \overline{1,m}$, $H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \ldots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \leq \leq t \leq p\}, w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{j0}, w_{j0})$, $j = \overline{1,n}, s = \overline{0,m}$, $w_j^{(0)} = c_j w_{j0} c_j^{-1}$.

Последовательность (1) называется базисной. Базисную последовательность (1) назовем фундаментальной, если для $\forall j, s, 0 \leqslant j < s < m$, наборы $(w_1^{(j)}, \ldots, w_n^{(j)})$, $(w_1^{(s)}, \ldots, w_n^{(s)})$ различны и существует целое v, $0 \leqslant v < m$, такое что $w_1^{(v)} = w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(v)} = w_n^{(m)}$.

Лемма 3. *Если последовательность является фундаментальной, то соответствующее ей слово $H_1 H_2 \ldots H_m H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы H.*

Доказательство очевидно.

Слово $H_1 H_2 \ldots H_m H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной последовательностью (1), назовем базисным словом.

Лемма 4. *Если последовательность (1) является фундаментальной базисной последовательностью, то*

$$m \leqslant |S| = |S(w_1, w_1)| \ldots |S(w_n, w_n)|$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. *Число фундаментальных базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор H в G. Тогда существует разбиение F в произведение $F = H_1 H_2 \ldots H_m$, $H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \leq t \leq p\}$, $i = \overline{1,m}$, и базисная последовательность, связанная с данными разбиением F, то есть*

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $F \neq 1$, тогда имеет место следующая система соотношений

$F^{-1} w_1 F = w_1$, $c_2 F^{-1} c_2^{-1} w_{20} c_2 F c_2^{-1} = w_{20}, \ldots, c_n F^{-1} c_n^{-1} w_{n0} c_n F c_n^{-1} = w_{n0}$.

Пусть $\forall i, i = \overline{2,n}$, $\exists X_i, Y_i, F_i$ такие, что $F \equiv X_i F_i Y_i$ ($\equiv$ – графическое равенство), $c_i = c_i' X_i^{-1} = c_i'' Y_i$. В результате имеем следующие равенства $F^{-1} w_1 F = w_1$, $c_i'' F_i^{-1} c_i'^{-1} w_{i0} c_i' F_i c_i''^{-1} = w_{i0}, i = \overline{2,n}$, где каждое из слов $c_i' F_i c_i''^{-1}$ несократимо .

Рассмотрим кольцевые приведенные R - приведенные, $\overline{R}$-приведенные R-диаграммы $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ с граничными циклами $\sigma^{(i0)}$, $\tau^{(i0)}$, где $\varphi(\sigma^{(i0)}) = w_{i0}, \varphi(\tau^{(i0)}) = w_{i0}^{-1}$, $i = \overline{2,n}$ (при $i = 1, w_{10} = w_1$), каждая из которых, соответственно, является диаграммой сопряженности для i-го соотношения.

Обозначим через $O^{(i0)}$ начальную точку на $\sigma^{(i0)}$ и через $O'^{(i0)}$ – начальную точку на $\tau^{(i0)}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда в диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$, $i = \overline{1,n}$, содержится путь η_i, $\alpha(\eta_i) = O^{(i0)}$, $\omega(\eta_i) = O'^{(i0)}$ с $\varphi(\eta_1) = F$, $\varphi(\eta_i) = c_i' F_i c_i''^{-1}$, $i = \overline{2,n}$, где $\alpha(\eta)$, $\omega(\eta)$ – соответственно начало и конец пути η. Пусть $\varphi(\eta_1) = F = H_1^{(1)} H_2^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)}$ – разбиение F в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$ на элементы множества T. Тогда $F \equiv X_i F_i Y_i = H_1^{(1)} \dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(1)} H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)} H_{\beta_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)}$, где $X_i = H_1^{(1)} \dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(1)}$, $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)}$, $Y_i = H_{\beta_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)} \dots H_{m(1)}^{(1)}$. С другой стороны, каждое $\varphi(\eta_i) = c_i' F_i c_i''^{-1}$ в соответствующей диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ разбивается на элементы множества T $\varphi(\eta_i) = H_1^{(i)} \dots H_{\alpha_{(i)}^{(1)}}^{(i)} H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)} H_{\beta_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)} \dots H_{m(i)}^{(i)}$, где $c_i' = H_1^{(i)} \dots H_{\alpha_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$, $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$, $c_i''^{-1} = H_{\beta_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)} \dots H_{m(i)}^{(i)}$. Отсюда следуют соотношения $F_i = H_{\alpha_{(i)+1}^{(1)}}^{(1)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(1)}}^{(1)} = H_{\alpha_{(i)+1}^{(i)}}^{(i)} \dots H_{\beta_{(i)}^{(i)}}^{(i)}$. Заметим, что разбиение X_i определяется разбиением F. Аналогично, разбиение Y_j, также определяется разбиением F. Следовательно, X_i, Y_j на искомое разбиение F не влияют. В качестве искомого возьмем разбиение $\varphi(\eta_1) = F$ в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$. Получим разбиение F: $F = H_1 H_2 \dots H_m$ и последовательность $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots,$ $w_n^{(m)}$, связанную с полученным разбиением, удовлетворяющую условиям: $\forall i, i = \overline{1,m}$, $H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \dots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in H_i \in T = \{a^t, a \in \{a_i^{\pm 1}\}_{i=\overline{1,l}}, 1 \le t \le p\}$, $w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$, $j = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}$.

Лемма 7. *Множество всех базисных слов порождает централизатор подгруппы H.*

Доказательство очевидно

Из лемм 3-7 следует справедливость теоремы 3.

3. Обобщенная сопряженность слов

Теорема 4. *В обобщенной древесной структуре групп Артина разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Доказательство. Пусть даны множества слов $w_1, w_2, \dots, w_n$ и $v_1, v_2, \dots, v_n$. Необходимо установить: $\exists z$, $z \in G$, $\&_{i=1}^{n} (z^{-1} w_i z = v_i)$.

Пусть слова $w_1 = w_{10}$, $v_1 = v_{10}$ являются тупиковыми. Пусть $w_i = a_i w_{i0} a_i^{-1}$, $v_i = b_i v_{i0} b_i^{-1}$, $i = \overline{2,n}$, где w_{i0}, v_{i0} являются тупиковыми. Если предположить, что эти множества сопряжены, то $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $|w_{i0}| = |v_{i0}|$ и если какое-то из w_{i0} есть степень образующего, то сопряженное ему слово v_{i0} тоже степень образующего y. Пусть $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слов w_{i0}, v_{i0}. Пусть

$$|a| = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\},$$

$$|b| = \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|\},$$

где $|a_1| = |b_1| = 0$.

Обозначим через $S(w_i, v_i)$, $i = \overline{1,n}$, множество всех слов длина d_i которых заключена в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant |w_{i0}| + |v_{i0}| + 2(|a| + |b| + p + m_0)$.

Введем обозначения $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $w_i = w_i^{(0)}$ и рассмотрим базисные последовательности, соответствующие множеству слов $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$:

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \tag{2}$$

где $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $\forall j$, $j = \overline{0,m}$, $w_i^{(j)} \in S(w_i, v_i)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$.

Базисная последовательность (2) называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, то есть все $H_i = 1$. Слово $H_1H_2\dots H_m$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.

Если в базисной последовательности (2) $w_1^{(m)} = v_1, \dots, w_n^{(m)} = v_n$, то слова $w_1, \dots, w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1, \dots, v_n$.

Лемма 8. *Если последовательность (2) является особой базисной последовательностью, то $m \leqslant |S| = |S(w_1, v_1)| \dots |S(w_n, v_n)|$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 9. *Число особых базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 10. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$, тогда существует разбиение F в произведение $H_1H_2\dots H_m$ элементов множества T и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F:*

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \tag{3}$$

где $w_1^{(m)} = v_1, \dots, w_n^{(m)} = v_n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Лемма 11. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$ и (3) – базисная последовательность, соответвующая данному разбиению F. Тогда из последовательности (3) можно выделить особую подпоследовательность, такую, что соответствующее ей базисное слово F является решением системы.*

Доказательство. Если система $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$ такова, что $\forall i,\ i = \overline{1,n},\ w_i \equiv v_i$, то в качестве особой базисной подпоследовательности возьмем пустую подпоследовательность с $F \equiv 1$. Если последовательность (3) не содержит фундаментальных подпоследовательностей то $F' = F$. Если (3) не особая и $\exists j,\ j = \overline{1,n}$, то существуют целые числа v, k, $0 \leqslant v < k < m$ такие, что подпоследовательность $w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, \dots, H_v, w_1^{(v)}, \dots, w_n^{(v)}, H_{v+1}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$ является фундаментальной. Вычеркнув из (3) подпоследовательность $H_{v+1}, w_1^{(v+1)}, \dots, w_n^{(v+1)}, H_{v+2}, \dots, H_k, w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$, получим базисную последовательность слов, являющуюся решением системы. Если полученная базисная последовательность не является особой, то применим к ней указанный выше процесс.

Из лемм 8-11 следует доказательство теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть G – обобщенная древесная структура групп Артина и $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – слова из G. Если F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz = v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H) \cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор подгруппы H, порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, является множеством всех решений системы.*

Доказательство очевидно.

Теорема 6. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из обобщенной древесной структурой групп Артина G выписать образующие их нормализатора.*

Доказательство очевидно.

4. Заключение

В работе рассмотрены проблемы построения централизатора конечно порожденной подгруппы и обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Артина. Данный класс групп важен для изучения алгоритмических проблем [13], [14] в группах Артина, которые могут либо быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Артина, образованные из групп Артина с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Артина большого или экстрабольшого типов, а также группами Артина с n-угольной структурой, либо непосредственно принадлежат к перечисленным классам аналогично группам Кокстера [15]. Данная работа продолжает изучение алгоритмических свойств групп Артина.

Для решения проблемы построения централизатора конечно порожденной подгруппы в обобщенных древесных структурах групп Артина применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования, в частности, метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения $\overline{R}$-сокращений, и подход Г. С. Маканина, используемый им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Использовались идеи работы [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.

2. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой. // V международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тезисы докладов международной конференции. Тула, 2003. С. 33-34.

3. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой. // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, №1. С. 67-82.

4. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

5. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная матемаматика. 1999. Т.5, №1. С. 1-38.

6. Маканин Г. С. О нормализаторах группы кос // Математический сборник. 1971. Т. 86, №2. С. 171-179.

7. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №3. С. 135-147.

8. Добрынина И. В., Угаров А. С. О централизаторе элемента в обобщённых древесных структурах групп Артина // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVII Междунар. конф., посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула: ТГПУ, 2019. С. 42-44.

9. Holt D. F., Rees S. E. Biautomatic structures in systolic Artin groups // International Journal of Algebra and Computation. 2021. Т. 31, №3. С. 365-391.

10. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина большого типа // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула. ТГПИ. 1986. С. 26-61.

11. Добрынина И. В., Угаров А. С. Об обобщенных древесных структурах групп Артина // Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23, №3. С. 52-63.

12. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, №1. С. 50-69.

13. Dehn M. Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Annal. 1912. Vol. 71. P. 116-144.

14. Tietze H. Uber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten // Monatsh. Math. Phys., 1908. Vol. 19. P. 1—118.

15. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.

REFERENCES

1. Appel, K. & Schupp, P. 1983, “Artins groups and infinite Coxter groups”, *Ivent. Math.*, vol. 72, pp. 201-220.

2. Bezverkhnii, V. N. 2003, “On Artin groups, Coxeter with a tree structure”, *V mezhdunarodnaya konferentsiya «Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya»: tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii*, Tula, , pp. 33-34.

3. Bezverkhnii, V. N. & Karpova, O. Ju. 2005, “Power conjugacy problem for words in Coxeter groups with tree structure”, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 11, pp. 63-75.

4. Lyndon, R.& Schupp, P. 1980, “Combinatorial group theory”, *Mir*, Moscow.

5. Bezverkhnii,V. N. 1999, “Decision of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 1-38.

6. Makanin, G. S. 1971, “On normalizers in the braid group”, *Math. USSR-Sb.*, vol. 15, no. 2, pp. 167–175.

7. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2018, “On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Coxeter groups”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 135-147.

8. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A. S. 2019, “On the centralizer of an element in generalized tree structures of Artin groups”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XVII International Conf. devoted to the 100-th anniversary of the birth of Professor N. I. Feldman and the 90-th anniversary of the birth of Professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev, and B. F. Skubenko*, Tula: TSPU, pp. 42-44.

9. Holt, D. F.& Rees, S. E. 2021, “Biatomatic structures in systolic Artin groups”, *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 31, no. 3, pp. 365-391.

10. Bezverkhnii, V. N. 1986, “Solution of the problem of conjugation of words in Artin groups of large type ”, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 26-61.

11. Dobrynina, I. V. & Ugarov, A. S. 2021, “On generalized tree structures of Artin groups”, *Vladikavkaz. Mat. Zh.,*, vol. 23, no. 3, pp. 52-63.

12. Bezverkhnii, V. N. & Kuznetsova, A. N. 2008, “Solvability of the problem of power conjugacy of words in Artin groups of extra-large type ”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 9, no. 1, pp. 50-69.

13. Dehn, M. 1912, “Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen”, *Math. Annal.*, vol. 71, pp. 116-144.

14. Tietze, H. 1908, “Uber die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten”, *Monatsh. Math. Phys.*, vol. 19, pp. 1-118.

15. Bezverkhnii, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E. 2016, “On algorithmic problems in Coxeter groups”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 23–50.

Получено: 27.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024