ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-226-235

Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя

С. В. Тихонов

Тихонов Сергей Викторович — кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет (г. Минск).
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Аннотация

В статье строится такое поле E, что существует бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с унитарными инволюциями и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E.

Ключевые слова: центральная алгебра с делением, группа Брауэра, подполе, род.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
Тихонов, С. В. Алгебры кватернионов с унитарными инволюциями, имеющие одинаковые подполя // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 226–235.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.552 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-226-235

Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields

S. V. Tikhonov

Tikhonov Sergey Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Belarussian State University (Minsk).
e-mail: tikhonovsv@bsu.by

Abstract

We construct a field E such that there are infinitely many non-isomorphic quaternion E-algebras with unitary involution and all such algebras are split by any quadratic field extension of E.

Keywords: central division algebra, Brauer group, subfield, genus.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
Tikhonov, S. V. 2024, “Quaternion algebras with unitary involutions having the same subfields”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 226–235.

1. Введение

Пусть F — поле, $\mathrm{Br}(F)$ — его группа Брауэра. Из конструкции Амицура ([3]) общего поля разложения центральной простой алгебры следует, что подгруппа в группе Брауэра, порожденная классом алгебры, однозначно определяется множеством полей разложения этой алгебры. Однако если рассматривать только конечномерные поля разложения, то ситуация перестает быть столь тривиальной. В последнее время активно исследуется вариант этой проблемы, связанный с рассмотрением только семейств максимальных подполей алгебр.

Определение 1. *(см. [5]). Род $\mathbf{gen}(\mathcal{D})$ конечномерной центральной алгебры с делением $\mathcal{D}$ над полем F определяется как набор классов $[\mathcal{D}'] \in Br(\mathcal{F})$, где $\mathcal{D}'$ — центральная F-алгебра с делением, имеющая такие же максимальные подполя, что и алгебра $\mathcal{D}$.*

Если $[\mathcal{D}'] \in \mathbf{gen}(\mathcal{D})$, то это означает, что алгебры $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ имеют одинаковую степень n, и расширение K/F степени n допускает F-вложение $K \hookrightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда оно допускает F-вложение $K \hookrightarrow \mathcal{D}'$. Различные варианты понятия рода центральных простых алгебр рассмотрены в [1] и [15].

Из теоремы Алберта-Брауэра-Хассе-Нётер следует, что в случае числового поля F алгебра кватернионов над полем F имеет тривиальный род (т.е. род состоит из одного элемента), а род любой центральной F-алгебры с делением конечен (см. [1]). В [16] показано, что существуют кватернионные алгебры с бесконечным родом. Более того, доказано, что найдется поле F, над которым имеется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр, и любые две кватернионные F-алгебры с делением имеют одинаковый род. В [2] эти результаты обобщены на случай алгебр с делением любой простой степени. В [7] и [10] показано, что род алгебры с делением над конечно порожденным полем является конечным. Кроме того, существует гипотеза, что род алгебры кватернионов над конечно порожденным полем является тривиальным ([20, §8]).

Похожим образом можно определить род абсолютно почти простой алгебраической группы. Говорят, что две абсолютно почти простые алгебраические группы G_1 и G_2 над полем F имеют одинаковые классы F-изоморфности максимальных F-торов, если каждый максимальный F-тор группы G_1 F-изоморфен некоторому максимальному F-тору группы G_2, и наоборот. Алгебраическая F-группа G' называется F-формой алгебраической F-группы G, если G и G' изоморфны над сепарабельным замыканием F^{sep} поля F.

Определение 2. *[1, Определение 6.1] Пусть G — абсолютно почти простая алгебраическая группа над полем F. Род $\mathbf{gen}_F(G)$ группы G определяется как множество классов F-изоморфности F-форм G' группы G, имеющих те же классы F-изоморфности максимальных F-торов, что и G.*

Род абсолютно почти простой алгебраической группы является тривиальным в некоторых специальных случаях и предполагается конечным, если F — конечно порожденное поле "хорошей" характеристики (см. [20, §8]). Известно, что для центральной F-алгебры с делением $\mathcal{D}$ максимальные сепарабельные подполя алгебры $\mathcal{D}$ определяют максимальные F-торы соответствующей алгебраической группы $\mathrm{SL}_{1,\mathcal{D}}$. Таким образом, результаты о бесконечности рода алгебр с делением можно сформулировать в терминах родов подходящих алгебраических групп: для всякого простого p существуют примеры внутренних форм типа A_{p-1}, имеющих бесконечный род. Отметим, что пример алгебраической группы типа G_2 с бесконечным родом получен в [4, Rem. 3.6(b)]. Заметим, что если $\mathcal{D}$ — центральная алгебра с делением с унитарной инволюцией τ, то только τ-инвариантные сепарабельные максимальные подполя алгебры $\mathcal{D}$ порождают максимальные торы соответствующей специальной унитарной группы $\mathrm{SU}(\mathcal{D},\tau)$ ([18, Предложение 2.3]). В [27] построен пример такой алгебры с делением $\mathcal{D}$ степени 3 с унитарной инволюцией τ, что специальная унитарная группа $\mathrm{SU}(\mathcal{D},\tau)$ имеет бесконечный род.

В [15] рассматривается вопрос, насколько свойства алгебры с инволюциями обуславливаются инвариантными относительно инволюций этальными подалгебрами.

В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных изучению рода центральных простых алгебр и рода алгебраических групп, см., например, [6], [8], [9], [11], [12], [14], [17], [19], [20], [21], [22], [26], [27]. Последние результаты о роде алгебр и алгебраических групп представлены в обзоре [20] (см. также [1]).

В данной работе содержится дальнейшее развитие идей из [16] и [2]. Мы строим поле, над которым имется бесконечно много попарно неизоморфных кватернионных алгебр с унитарными инволюциями, имеющих одинаковые подполя.

Пусть F/K — квадратичное расширение полей. Унитарная инволюция на центральной простой F-алгебре $\mathcal{A}$ называется F/K-инволюцией, если ее ограничение на F является нетривиальным K-автоморфизмом. Основной результат работы — следующая

Теорема 1. *Существуют такое поле E и подполе $T \subset E$, что $[E:T]=2$ и имеется бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с делением с E/T-инволюцией и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E.*

Этот результат может найти применение при изучении родов унитарных алгебраических групп.

Ниже используются следующие обозначения: $Alg_2(F)$ — множество классов изоморфности кватернионных алгебр с делением над полем F; $Ext_2(F)$ — множество классов изоморфности квадратичных расширений поля F. Для расширения полей E/F и центральной простой F-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_{\mathrm{E}}$ обозначается тензорное произведение $\mathcal{A}\otimes_{\mathrm{F}}\mathrm{E}$, $\mathrm{res}_{E/F}:\mathrm{Br}(F)\longrightarrow\mathrm{Br}(E)$ обозначает гомоморфизм ограничения. Противоположная алгебра обозначается через $\mathcal{A}^{op}$, $\mathcal{A}^m$ обозначает $\mathcal{A}\otimes_F\cdots\otimes_F\mathcal{A}$ (m раз). Для сепарабельного квадратичного расширения F/K через $\mathrm{cor}_{F/K}$ обозначается гомоморфизм коограничения из $\mathrm{Br}(F)$ в $\mathrm{Br}(K)$. Известно, что $\mathrm{cor}_{F/K}([\mathcal{A}_F])=[\mathcal{A}^2]$ для центральной простой K-алгебры $\mathcal{A}$ ([13, Proposition 3.13 (5)]). Напомним, что центральная простая F-алгебра $\mathcal{A}$ обладает F/K-инволюцией тогда и только тогда, когда $\mathrm{cor}_{F/K}([\mathcal{A}])=0$ ([13, Theorem 3.1 (2)]). Расширение полей E/F называется регулярным, если E/F сепарабельно и F алгебраически замкнуто в E.

2. Вспомогательные результаты

Следующая лемма немного в других обозначениях доказана в [27]. Для удобства читателя приведем доказательство здесь.

Лемма 1. *Пусть n — натуральное число, F — поле характеристики, не делящей $2n$, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F, $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n и L/F — циклическое расширение полей степени n. Тогда существуют такие регулярное расширение полей $F_{(K,L,\mathcal{A})}/F$ и подполе $K_{(L,\mathcal{A})}\subset F_{(K,L,\mathcal{A})}$, что $[F_{(K,L,\mathcal{A})}:K_{(L,\mathcal{A})}]=2$ и*

(1) $F_{(K,L,\mathcal{A})}=K_{(L,\mathcal{A})}F$ и нетривиальный $K_{(L,\mathcal{A})}$-автоморфизм $\bar\sigma$ поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ продолжает автоморфизм σ;

(2) композит полей $F_{(K,L,\mathcal{A})}L$ расщепляет алгебру $\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$;

(3) гомоморфизм ограничения $res_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F}:Br(F)\longrightarrow Br(F_{(K,L,\mathcal{A})})$ инъективен;

Доказательство. Пусть $F(x)$ — чисто трансцендентное расширение поля F степени трансцендентности 1. Пусть также ϕ — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(L(x)/F(x))$ и

$$\mathcal{C}:=\mathcal{A}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{F}(\mathrm{x})}\otimes_{\mathcal{F}(\mathrm{x})}(\mathcal{L}(\mathrm{x})/\mathcal{F}(\mathrm{x}),\phi,\mathrm{x}),$$

где $(L(x)/F(x), \phi, x)$ — циклическая $F(x)$-алгебра степени n. Пусть также M — поле функций многообразия Севери-Брауэра алгебры $\mathcal{C}$. Заметим, что ядро гомоморфизма

$$\mathrm{res}_{M/F(x)} : \mathrm{Br}(F(x)) \longrightarrow \mathrm{Br}(M)$$

порождается классом $[\mathcal{C}]$ (см, например, [25, Cor. 13.16]).

Пусть $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра экспоненты $m > 1$. Предположим, что алгебра $\mathcal{B}$ расщепляется полем M. Тогда $[\mathcal{B}_{\mathcal{F}(\mathrm{x})}] = [\mathcal{C}^{\mathrm{i}}]$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $i < n$, то $F(x)$-алгебра $\mathcal{C}^i$ ветвится в дискретном нормировании (тривиальном на F) поля $F(x)$, определяемом многочленом x, но алгебра $\mathcal{B}_{F(x)}$ неразветвлена в этом нормировании. Следовательно, $[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^i]$. Так как экспонента алгебры $\mathcal{B}_{F(x)}$ есть $m > 1$, то $[\mathcal{B}_{F(x)}] \neq [\mathcal{C}^n] = [F(x)]$. Таким образом, алгебра $\mathcal{B}_{F(x)}$ не расщепляется полем M. Откуда получаем инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(M)$.

Так как поле M расщепляет алгебру $\mathcal{C}$, то

$$[\mathcal{A}_M] = [(L(x)/F(x), \phi, x)_M] = [(ML/M, \phi', x)],$$

где ϕ' — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(ML/M)$. Таким образом, композит полей ML расщепляет алгебру $\mathcal{A}_M$.

Заметим, что M/F — регулярное расширение поля $F(x)$. Следующая конструкция трансфера регулярного расширения описана в [24, p. 220]).

Пусть σ также обозначает $K(x)$-автоморфизм поля $F(x)$, продолжающий автоморфизм σ поля F. Автоморфизм σ поля $F(x)$ может быть продолжен до изоморфизма (который также будем обозначать через σ) поля M и другого регулярного расширения поля $F(x)$, обозначаемого через M_σ. Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"] & F(x) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"] & M \arrow[d, "\sigma"] \\ F \arrow[r, hook] & F(x) \arrow[r, hook] & M_\sigma . \end{tikzcd} \tag{1}$$

Пусть $F_{(K,L,\mathcal{A})} = MM_\sigma$ — свободный композит над F полей M и M_σ. Этот композит F-изоморфен полю функций многообразия Севери-Брауэра $M_\sigma(y)$-алгебры

$$\mathcal{A}^{op}_{M_\sigma(y)} \otimes_{M_\sigma(y)} (M_\sigma L(y)/M_\sigma(y), \psi', y),$$

где y — трансцендентный над M_σ элемент (мы заменили в алгебре x на y, поскольку композит полей свободный) и ψ' — образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(M_\sigma L(y)/M_\sigma(y))$. Поле $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ является регулярным расширением поля F. Изоморфизмы $\sigma : M \longrightarrow M_\sigma$ и $\sigma^{-1} : M_\sigma \longrightarrow M$ имеют единственное продолжение до автоморфизма $\bar{\sigma}$ порядка 2 поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$. Пусть $K_{(L,\mathcal{A})} := T_{K/F}(M)$ — трансфер поля M относительно расширения полей $F \supset K$, т.е. $K_{(L,\mathcal{A})}$ — подполе поля $F_{(K,L,\mathcal{A})}$, состоящее из элементов, неподвижных при действии автоморфизма $\bar{\sigma}$. Заметим, что композит полей $K_{(L,\mathcal{A})}F$ совпадает с полем $F_{(K,L,\mathcal{A})}$, $[F_{(K,L,\mathcal{A})} : K_{(L,\mathcal{A})}] = 2$, а автоморфизм $\bar{\sigma}$ продолжает σ.

Алгебра $\mathcal{A}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}$ расщепляется полем $F_{(K,L,\mathcal{A})}L$, так как алгебра $\mathcal{A}_M$ расщепляется полем ML.

Наконец, диаграмма (1) индуцирует следующую коммутативную диаграмму для соответствующих групп Брауэра:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Br}(F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Br}(F(x)) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Br}(M) \arrow[d, "\cong"] & \\ \mathrm{Br}(F) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Br}(F(x)) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Br}(M_\sigma) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Br}(F_{(K,L,\mathcal{A})}) . \end{tikzcd}$$

Инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F}$ влечет инъективность гомоморфизма $\mathrm{res}_{M_\sigma/F}$. Более того, гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/M_\sigma}$ инъективен ввиду тех же аргументов, что и для гомоморфизма $\mathrm{res}_{M/F}$, только основное поле F заменяется полем M_σ. Следовательно, гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,L,\mathcal{A})}/F}$ также инъективен.
■

Замечание 8. *Пусть $F_{(K,L,\mathcal{A})}$ — поле, построенное в лемме 1. Если $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра с F/K-инволюцией θ, то формула*

$$\theta_{F_{(K,L,\mathcal{A})}}(a \otimes e) := \theta(a) \otimes \bar{\sigma}(e), a \in \mathcal{B}, e \in F_{(K,L,\mathcal{A})},$$

определяет $F_{(K,L,\mathcal{A})}/K_{(L,\mathcal{A})}$-инволюцию, продолжающую θ, на алгебре $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$.

Далее доказательства из [2] адаптированы для кватернионных алгебр с унитарными инволюциями.

Предложение 1. *Пусть F — поле характеристики не 2, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F, $A \subset Alg_2(F)$ и $S \subset Ext_2(F)$. Тогда существут такие регулярное расширение полей $F_{(K,S,A)}/F$ и подполе $K_{(S,A)} \subset F_{(K,S,A)}$, что $[F_{(K,L,A)} : K_{(S,A)}] = 2$ и*

(1) $F_{(K,S,A)} = K_{(S,A)}F$ и нетривиальный $K_{(S,A)}$-автоморфизм поля $F_{(K,S,A)}$ продолжает автоморфизм σ;

(2) всякая алгебра из образа $res_{F_{(K,S,A)}/F}(A)$ расщепляется композитом полей $F_{(K,S,A)}L$ для всех $L \in S$;

(3) гомоморфизм $res_{F_{(K,S,A)}/F} : Br(F) \longrightarrow Br(F_{(K,S,A)})$ инъективен;

(4) для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ алгебра $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$ имеет $F_{(K,S,A)}/K_{(S,A)}$-инволюцию $\theta_{F_{(K,S,A)}}$, продолжающую θ.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} := \{(L,\mathcal{D}) | L \in S \text{ и } \mathcal{D} \in A\}$ — множество пар. Пусть также $<$ — полный порядок на множестве $\mathcal{P}$ и пусть $t_0 = (L_0, \mathcal{D}_0)$ обозначает наименьший элемент множества $\mathcal{P}$. Выберем представителей (обозначаемых теми же символами) классов изоморфности в обоих множествах S и A. Положим $E_{t_0} := F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$ и $T_{t_0} := K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$, где поля $F_{(K,L_0,\mathcal{D}_0)}$ и $K_{(L_0,\mathcal{D}_0)}$ построены в лемме 1. Для $t = (L,\mathcal{D}) \in \mathcal{P}$ положим

$$E^{<t} := \bigcup_{t'<t} E_{t'},\ T^{<t} := \bigcup_{t'<t} T_{t'} \text{ и } E_t := E^{<t}{}_{(T^{<t}, E^{<t}L, \mathcal{D}_{E^{<t}})},\ T_t := T^{<t}{}_{(E^{<t}L, \mathcal{D}_{E^{<t}})},$$

где поля E_t и T_t получены применением леммы 1 к квадратичному расширению полей $E^{<t}/T^{<t}$, циклическому расширению $E^{<t}L/E^{<t}$ и $E^{<t}$-алгебре $\mathcal{D}_{E^{<t}}$. Также определим

$$F_{(K,S,A)} := \bigcup_{t\in\mathcal{P}} E_t \text{ и } K_{(S,A)} := \bigcup_{t\in\mathcal{P}} T_t.$$

Тогда $F_{(K,S,A)}$ — квадратичное расширение поля $K_{(S,A)}$ и $F_{(K,S,A)} = K_{(S,A)}F$. Таким образом, поле $F_{(K,S,A)}$ имеет $K_{(S,A)}$-автоморфизм порядка 2, который продолжает σ. Тогда для F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ определим $F_{(K,S,A)}/K_{(S,A)}$-инволюцию на алгебре $\mathcal{B}_{F_{(K,S,A)}}$, как в формуле из замечания 8.

Из леммы 1 и трансфинитной индукции гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_{(K,S,A)}/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(F_{(K,S,A)})$ инъективен и $F_{(K,S,A)}/F$ — регулярное расширение полей.

Наконец, пусть $\mathcal{D} \in A$, $L \in S$ и $t = (L,\mathcal{D})$. Из леммы 1 композит полей E_tL расщепляет алгебру $\mathcal{D}_{E_t}$, следовательно, алгебра $\mathcal{D}_{F_{(K,S,A)}}$ расщепляется полем $F_{(K,S,A)}L$.
■

3. Основная теорема

Теорема 2. *Пусть F — поле характеристики не 2, F/K — квадратичное расширение полей, σ — нетривиальный K-автоморфизм поля F и $A \subset Alg_2(F)$. Тогда существуют такие расширение полей F_A/F и подполе $K_A \subset F_A$, что $[F_A : K_A] = 2$ и*

(1) $F_A = K_A F$ и нетривиальный K_A-автоморфизм поля F_A продолжает автоморфизм σ;

(2) алгебры в образе $res_{F_A/F}(A)$ имеют одинаковые наборы максимальных подполей;

(3) гомоморфиз $res_{F_A/F} : Br(F) \longrightarrow Br(F_A)$ инъективен;

(4) для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{B}$ с F/K-инволюцией θ алгебра $\mathcal{B}_{F_A}$ имеет F_A/K_A-инволюцию θ_{F_A}, продолжающую θ.

Доказательство. Пусть $M_0 := F$ и $N_0 := K$. Определим рекурсивно поля

$$M_i := M_{i-1(N_{i-1},S_{i-1},\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A))} \text{ и } N_i := N_{i-1(S_{i-1},\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A))},$$

$i \in \mathbb{Z}_{>0}$, применяя предложение 1 к квадратичному расширению M_{i-1}/N_{i-1}, множеству $\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A) \subset Alg_2(M_{i-1})$ и множеству S_{i-1} всех максимальных подполей алгебр из $\mathrm{res}_{M_{i-1}/F}(A)$.

Пусть $F_A := \bigcup_{i\geqslant 0} M_i$ и $K_A := \bigcup_{i\geqslant 0} N_i$. С помощью математической индукции и предложения 1 получаем, что гомоморфизм $\mathrm{res}_{F_A/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(F_A)$ инъективен. Более того, $F_A = K_A F$, $[F_A : K_A] = 2$ и нетривиальный K_A-автоморфизм поля F_A продолжает автоморфизм σ. Если $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра с F/K-инволюцией, определим F_A/K_A-инволюцию на алгебре $\mathcal{B}_{F_A}$, как в формуле из замечания 8.

Предположим, что $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in A$ и L — максимальное подполе алгебры $\mathcal{A}_{F_A}$. Тогда найдется такое $i \geqslant 0$, что $L = F_A L'$, где L' — квадратичное расширение поля M_i, расщепляющее алгебру $\mathcal{A}_{M_i}$. Так как $\mathcal{A}_{M_i} \in \mathrm{res}_{M_i/F}(A)$, тогда $L' \in S_i$. Из предложения 1 поле $M_{i+1}L'$ расщепляет алгебру $\mathcal{B}_{M_{i+1}}$. Следовательно, L расщепляет $\mathcal{B}_{F_A}$. Аналогично всякое максимальное подполе алгебры $\mathcal{B}_{F_A}$ расщепляет $\mathcal{A}_{F_A}$. Таким образом, алгебры $\mathcal{A}_{F_A}$ и $\mathcal{B}_{F_A}$ имеют одинаковы наборы подполей.

■

Замечание 9. *Если рассмотреть такие поле F и подполе $K \subset T$, что найдется бесконечно много неизморфных кватернионных F-алгебр с F/K-инволюциями, то, применяя предыдущую теорему, получим поле, над которым есть бесконечно много неизомоморфных кватернионных алгебр с унитарными инволюциями, имеющих одинаковые подполя. Например, в качестве K можно взять поле $\mathbb{Q}(x)$, чисто трансцендентное расширение поля рациональных чисел, а в качетстве поля F — поле $K(\sqrt{2})$. Тогда для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ кватернионные F-алгебры $(-1, x+\alpha)$ попарно неизоморфны и имеют F/K-инволюции. Действительно, эти алгебры ветвятся в различных дискретных нормированиях (тривиальных на $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) поля F, определяемых многочленами $x + \alpha$. Кроме того, эти алгебры имеют тривиальное коограничение до K, поскольку $cor_{F/K}([(-1, x+\alpha)]) = [(-1, x+\alpha)^2] = 0$. Однако теорема 1, сформулированная во введении, говорит больше: все кватернионные алгебры с инволюциями должны расщепляться любым квадратичным расширением центра.*

Доказательство теоремы 1. Пусть F и K — такие поля, что $[F : K] = 2$ и существует бесконечно много неизоморфных кватернионных F-алгебр с делением с F/K-инволюцией. Пусть также $A_0 \subset Alg_2(F)$ — помножество, состоящее из алгебр с F/K-инволюцией.

Положим $E_0 := F$ и $T_0 := K$. Для $i \geqslant 0$ рекурсивно определим

$$E_{i+1} := E_{i(T_i,Ext_2(E_i),A_i)} \text{ и } T_{i+1} := T_{i(Ext_2(E_i),A_i)},$$

где $A_i \subset Alg_2(E_i)$ — подмножество, состоящее из алгебр с F_i/K_i-инволюцией. Пусть $E := \bigcup_{i\geqslant 0} E_i$ и $T := \bigcup_{i\geqslant 0} T_i$.

Как при доказательстве теоремы 2 заключаем, что гомоморфизм $\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$ инъективен.

Пусть L/E — квадратичное расширение, $\mathcal{A}$ — кватернионная E-алгебра с E/T-инволюцией. Тогда найдется такое $i \geqslant 0$, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_E$ для некоторой кватернионной E_i-алгебры $\mathcal{A}'$. Более того, поскольку $\mathcal{A}$ имеет E/T-инволюцию, то $\mathrm{cor}_{E_k/T_k}([\mathcal{A}'_{E_k}]) = 0$.

Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Br}(E_i) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}} \\ \mathrm{Br}(T_i) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Br}(T) \end{array}$$

коммутативна (см, например, [25, Theorem 8.1 d]), то $\mathrm{cor}_{E_k/T_k}([\mathcal{A}'_{E_k}]) = 0$ для некоторого $k \geqslant i$, следовательно, $\mathcal{A}'_{E_k}$ имеет E_k/T_k-инволюцию.

Также найдется такое $j \geqslant 0$, что $L = E_jL'$ для некоторого квадратичного расширения L' поля E_j. Из конструкции поля E следует, что для n, большего чем j и k, алгебра $\mathcal{A}'_{E_n}$ расщепляется полем E_nL'. Следовательно, L расщепляет $\mathcal{A}$.

Наконец, как и в доказательстве теоремы 2 получаем, что всякая алгебра из $\mathrm{res}_{E/F}(A_0)$ имеет E/T-инволюцию. Более того, так как множество A_0 бесконечно и гомоморфизм

$$\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{Br}(E)$$

инъективен, то имеется бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с делением с E/T-инволюцией. ■

4. Заключение

В статье строится такое поле E, что существует бесконечно много неизоморфных кватернионных E-алгебр с унитарными инволюциями и все такие алгебры расщепляются любым квадратичным расширением поля E. Полученные результаты могут найти применение при изучении родов унитарных алгебраических групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусов В. И., Рапинчук А. С., Рапинчук И. А. Алгебры с делением, имеющие одинаковые максимальные подполя // Успехи математических наук. 2015. Том 70, Вып. 1. С. 89-122. (English transl.: Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Division algebras with the same maximal subfields // Russian Math. Surveys. 2015. Vol. 70, Issue 1. P. 83-112.)

2. Тихонов С. В. Алгебры с делением простой степени с бесконечным родом // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 264-267. (English transl.: Tikhonov S.V. Division algebras of prime degree with infinite genus // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. P. 264-267.)

3. Amitsur S. A. Generic splitting fields of central simple algebras // Ann. of Math. (2). 1955. Vol. 62, № 1. P. 8-43.

4. Beli C., Gille P., Lee T.-Y. Examples of algebraic groups of type G_2 having the same maximal tori // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 16-25 и Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 292. P. 10-19.

5. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On the genus of a division algebra // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 2012. Vol. 350, № 17-18. P. 807-812.

6. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. The genus of a division algebra and the unramified Brauer group // Bull. Math. Sci. 2013. Vol. 3, № 2. P. 211-240.

7. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On the size of the genus of a division algebra // Труды МИАН. 2016. Том 292. С. 69–99 и Proc. Steklov Inst. of Math. 2016. Vol. 292, № 1. P. 63-93.

8. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On some finiteness properties of algebraic groups over finitely generated fields // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2016. Vol. 354. P. 869-873.

9. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Spinor groups with good reduction // Compos. Math. 2019. Vol. 155, № 3. P. 484-527.

10. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and generalizations // Israel J. Math. 2020. Vol. 236, № 2. P. 747-799.

11. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Simple algebraic groups with the same maximal tori, weakly commensurable Zariski-dense subgroups, and good reduction // Adv. Math. 2024. Vol. 438. Paper № 109437.

12. Garibaldi S., Saltman D. Quaternion Algebras with the Same Subfields // Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology. Dev. math. 18, Springer, New York, 2010. P. 225-238

13. Knus M.-A., Merkurjev A. S., Rost M., Tignol J.-P. The Book of Involutions. — Colloquium Publications. Vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998, +593 pp.

14. Krashen D., McKinnie K. Distinguishing algebras by their finite splitting fields // Manuscripta Math. 2011. Vol. 134, № 1-2. P. 171-182.

15. Krashen D., Matzri E., Rapinchuk A., Rowen L., Saltman D. Division algebras with common subfields // Manuscripta Math. 2022. Vol. 169, № 1-2. P. 209-249.

16. Meyer J. S. Division algebras with infinite genus // Bull. London Math. Soc. 2014. Vol. 46, № 3. P. 463-468.

17. Prasad G., Rapinchuk A. S. Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces // Publ. math. IHES. 2009. Vol. 109. P. 113-184.

18. Prasad G., Rapinchuk A. S. Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution // Comment. Math. Helv. 2010. Vol. 85. P. 583-645.

19. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. On division algebras having the same maximal subfields // Manuscripta Math. 2010. Vol. 132, № 3-4. P. 273-293.

20. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Linear algebraic groups with good reduction // Res. Math. Sci. 2020. Vol. 7, № 3. Paper № 28.

21. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Recent developments in the theory of linear algebraic groups: Good reduction and finiteness properties // Notices Amer. Math. Soc. 2021. Vol. 68, № 6. P. 899-910.

22. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Some finiteness results for algebraic groups and unramified cohomology over higherdimensional fields // J. Number Theory. 2022. Vol. 233. P. 228-260.

23. Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. Properness of the global-to-local map for algebraic groups with toric connected component and other finiteness properties // Math. Res. Lett. 2023. Vol. 30, № 3. P. 913–943.

24. Roquette P. Isomorphisms of generic splitting fields of simple algebras // J. Reine Angew. Math. 1964. Vol. 214/215. P. 207-226.

25. Saltman D. J. Lectures on Division Algebras. — Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1999, + 120 pp.

26. Tikhonov S. V. On genus of division algebras // Manuscripta Math. 2021. Vol. 164, № 1. P. 321-325.

27. Tikhonov S. V. Outer forms of type A_2 with infinite genus // Documenta Math. 2024. Vol. 29. № 4. P. 805–814. См. также arXiv:2305.01606.

REFERENCES

1. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2015, "Division algebras with the same maximal subfields", *Russian Math. Surveys*, vol. 70, issue 1, pp. 83-112.

2. Tikhonov, S. V. 2016, "Division algebras of prime degree with infinite genus", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 292, pp. 264-267.

3. Amitsur, S. A. 1955, "Generic splitting fields of central simple algebras", *Ann. of Math. (2)*, vol. 62, no. 1, pp. 8-43.

4. Beli, C., Gille, P. & Lee, T.-Y. 2016, "Examples of algebraic groups of type G_2 having the same maximal tori", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 292, pp. 10-19.

5. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2012, "On the genus of a division algebra", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I.*, vol. 350, no. 17-18, pp. 807-812.

6. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2013, "The genus of a division algebra and the unramified Brauer group", *Bull. Math. Sci.*, vol. 3, no. 2, pp. 211-240.

7. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2016, "On the size of the genus of a division algebra", *Proc. Steklov Inst. of Math.*, vol. 292, no. 1, pp. 63-93.

8. Chernousov V. I., Rapinchuk A. S., Rapinchuk I. A. 2016, "On some finiteness properties of algebraic groups over finitely generated fields", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.*, vol. 354, pp. 869-873.

9. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2019, "Spinor groups with good reduction", *Compos. Math.*, vol. 155, no. 3, pp. 484-527.

10. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2020, "The finiteness of the genus of a finite-dimensional division algebra, and generalizations", *Israel J. Math.*, vol. 236, no. 2, pp. 747-799.

11. Chernousov, V. I., Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2024, "Simple algebraic groups with the same maximal tori, weakly commensurable Zariski-dense subgroups, and good reduction", *Adv. Math.*, vol. 438, paper no. 109437.

12. Garibaldi, S. & Saltman, D. 2010, “Quaternion Algebras with the Same Subfields”, Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology. Dev. math. 18, Springer, New York, pp. 225-238

13. Knus, M.-A., Merkurjev, A. S., Rost, M. & Tignol, J.-P. 1998, “The Book of Involutions”, Colloquium Publications. vol. 44, Amer. Math. Soc., +593 pp.

14. Krashen, D. & McKinnie, K. 2011, “Distinguishing algebras by their finite splitting fields”, *Manuscripta Math.*, vol. 134, no. 1-2, pp. 171-182.

15. Krashen, D., Matzri, E., Rapinchuk, A., Rowen, L. & Saltman, D. 2022, “Division algebras with common subfields”, *Manuscripta Math.*, vol. 169, no. 1-2, pp. 209-249.

16. Meyer, J. S. 2014, “Division algebras with infinite genus”, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 46, no. 3, pp. 463-468.

17. Prasad, G. & Rapinchuk, A. S., 2009, “Weakly commensurable arithmetic groups and isospectral locally symmetric spaces”, *Publ. math. IHES.*, vol. 109, pp. 113-184.

18. Prasad, G. & Rapinchuk, A. S. 2010, “Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 85, pp. 583-645.

19. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2010, “On division algebras having the same maximal subfields”, *Manuscripta Math.*, vol. 132, no. 3-4, pp. 273-293.

20. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2020, “Linear algebraic groups with good reduction”, *Res. Math. Sci.*, vol. 7, no. 3, paper no. 28.

21. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2021, “Recent developments in the theory of linear algebraic groups: Good reduction and finiteness properties”, *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 68, no. 6, pp. 899-910.

22. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2022, “Some finiteness results for algebraic groups and unramified cohomology over higherdimensional fields”, *J. Number Theory.*, vol. 233, pp. 228-260.

23. Rapinchuk, A. S. & Rapinchuk, I. A. 2023, “Properness of the global-to-local map for algebraic groups with toric connected component and other finiteness properties”, *Math. Res. Lett.*, vol. 30, no. 3, pp. 913–943.

24. Roquette, P. 1964, “Isomorphisms of generic splitting fields of simple algebras”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 214/215, pp. 207-226.

25. Saltman, D. J. 1999, “Lectures on Division Algebras”, *Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, + 120 pp.

26. Tikhonov, S. V. 2021, “On genus of division algebras”, *Manuscripta Math.*, vol. 164, no. 1, pp. 321-325.

27. Tikhonov, S. V. 2024, “Outer forms of type A_2 with infinite genus”, *Documenta Math.*, Vol.29, № 4, pp. 805–814.

Получено: 17.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024