ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-213-225

Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений

А.И. Нижников, О.Э. Яремко, Н.Н. Яремко

Нижников Александр Иванович — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Яремко Олег Эммануилович — Московский государственный технический университет «Станкин» (г. Москва).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Яремко Наталья Николаевна — Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» (г. Москва).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Аннотация

Для одного класса полиномов Аппеля, ассоциированного с дифференциальным уравнением параболического типа, получены формулы коэффициентов разложения в ряд полиномов. Установлено, что полиномы Аппеля участвуют в формулах разложения решения задачи Коши для уравнений параболического типа в ряд производных фундаментального решения. Предложен новый метод решения задачи Коши, суть которого состоит в применении разложения в ряды по полиномам Аппеля. Результаты обобщают метод решения уравнения теплопроводности на действительной оси разложением в ряд полиномов Эрмита. Исследована связь преобразования Фурье и рядов по ассоциированным полиномам Аппеля. Изучен вопрос применения полиномов Эрмита для преобразования Лапласа.

Ключевые слова: Полином Аппеля, фундаментальное решение, полином Эрмита, преобразование Фурье, задача Коши.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Нижников, А. И., Яремко, О. Э., Яремко, Н. Н. Полиномы Аппеля, ассоциированные с преобразованиями Фурье, и их применение для дифференциальных уравнений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 213–225.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.44 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-213-225

Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations

A. I. Nizhnikov, O.E. Yaremko, N.N. Yaremko

Nizhnikov Alexander Ivanovich — Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: nizhnikov.ai@mail.ru
Yaremko Oleg Emmanuilovich — Moscow State Technical University “Stankin” (Moscow).
e-mail: yaremki8@gmail.com
Yaremko Natalya Nikolaevna — National Research Technological University “MISiS” (Moscow).
e-mail: yaremki@yandex.ru

Abstract

Formulas for the coefficients of the expansion into a series of Appel polynomials associated with a differential equation of parabolic type are obtained. It has been established that Appel polynomials are involved in the formulas for the expansion of the solution to the Cauchy problem for equations of parabolic type into a series of derivatives of the fundamental solution. A new method for solving the Cauchy problem is proposed, the essence of which is to use series expansion in Appel polynomials. The results generalize the method for solving the heat equation on the real axis by expanding it into a series of Hermite polynomials. The connection between the Fourier transform and series in associated Appel polynomials is studied. The issue of using Hermite polynomials for the Laplace transform has been studied.

Keywords: Appel polynomial, fundamental solution, Hermite polynomial, Fourier transform, Cauchy problem.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Nizhnikov, A. I., Yaremko, O.E., Yaremko, N.N. 2024, “Appel polynomials associated with Fourier transforms and their applications to differential equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 213–225.

1. Введение

Пусть задана некоторая последовательность $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ комплексных чисел. Полиномы Аппеля [3,7,10] определяются $p_n(x)$ формулой

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, n = 0, 1, ...$$

Приведем основное свойство полиномов Аппеля [7] $p'_n(x) = np_{n-1}(x), n \geq 1$. Экспоненциальная производящая функция последовательности многочленов Аппеля [7] $p_n(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} t^n = A(t) \exp(xt)\,, \tag{1}$$

где $A(t)$ некоторый степенной ряд по t. Будем считать далее, что

$$A(t) = e^{-\beta p(it)}, \beta > 0,$$

где $p(z)-$ многочлен, для которого выполнено условие $Rep(\lambda) \geq 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!}(i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(ix\lambda)\,. \tag{2}$$

Полиномы Эрмита служат важным примером полиномов Аппеля. Полиномы Эрмита можно применять для решения дифференциальных уравнений

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \beta y$. Будем искать решение задачи в виде ряда полиномов Эрмита [4,9]

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x).$$

Имеем

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) H_{k-2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1) H_k(x).$$

Из единтственности разложения в ряд полиномов Эрмита получим $a_{k+2}(k+2)(k+1) = \beta a_k$. Значит,

$$a_{2k} = \frac{\beta^k a_0}{(2k)!}, a_{2k+1} = \frac{\beta^k a_1}{(2k+1)!}.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{(2k)!} H_{2k}(x) + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x).$$

Из разложения гиперболических функций [9] в ряд полиномов Эрмита следует, что решение можно записать в виде

$$y = a_0 e^{-\frac{\beta}{2}} ch\sqrt{\beta x} + a_1 e^{-\frac{\beta}{2}} \frac{sh\sqrt{\beta}x}{\sqrt{\beta}}.$$

Замечание 3. *Обычно для решения дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами применяют метод Лапласа. Однако, при вычислении оригинала приходится находить вычеты в полюсах, решая для этого алгебраические уравнения высоких степеней. Применение рядов Эрмита не требует знания полюсов. Преобразование Фурье для рассмотренной задачи применять нельзя.*

Функции Эрмита [4] представляют собой набор собственных функций интегрального преобразования Фурье [11]. Это обстоятельство позволило установить связь интегральных преобразований Фурье и рядов по функциям Эрмита [4,9]. Было найдено новое представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на действительной оси. Метод разложения в ряд по функциям Эрмита [8,12,15] позволил предложить новый подход к решению ретроспективной задачи [5] для уравнения теплопроводности. Таким образом, задача распространения метода разложения по полиномам Эрмита на случай полиномов Аппеля актуальна. В настоящей работе будет доказано, что метод разложения в ряды полиномов Аппеля есть альтернатива методу интегральных преобразований Фурье.

2. Задача Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u$

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения [6]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t < T, \\ u(x,\ 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи Коши может быть найдено методом Фурье и выражается формулой [14]

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x-\xi) f(\xi) d\xi, \tag{4}$$

где

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Поставим цель найти решение задачи (3) в виде разложения по полиномам Аппеля.

3. Интегральное преобразование Фурье и разложения в ряд производных фундаментального решения

Запишем теорему разложения [6] для функция $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda,$$

Преобразуем формулу разложения к виду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda, \tag{5}$$

где $\beta > 0$. Положим $t = -i\lambda$ в формуле (5) , тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!}(-i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(-i\xi\lambda)\,. \tag{6}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\beta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x}(-i\lambda)^n d\lambda, \tag{7}$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f(\xi)\, d\xi\,. \tag{8}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в формуле (7) заметим, что функция

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda \equiv G(t,x)$$

является фундаментальным решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u.$$

Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} (i\lambda)^n d\lambda = \frac{\partial^n G(\beta, x)}{\partial x^n}. \qquad (9)$$

Формула (7) принимает вид

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\beta} \frac{\partial^n G(\beta, x)}{\partial x^n}. \qquad (10)$$

Формула (10) представляет теорему разложения в ряд производных фундаментального решения. Коэфициенты ряда вычисляют через полином Аппеля, ассоциированный с дифференциальным уравнением (3).

4. Интегральное преобразование Фурье и разложения по полиномам Аппеля

Пусть функция $f\,(x)$ есть оригинал Фурье. Запишем теорему разложения [6]:

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \xi} f\,(\xi)\, d\xi \right) d\lambda,$$

Преобразуем формулу к виду

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda \xi} f\,(\xi)\, d\xi \right) d\lambda, \qquad (11)$$

где $\beta > 0$. Из формулы (2) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{p_n(x, \beta)}}{n!} (i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(ix\lambda)\,,$$

здесь $\overline{p_n(x, \beta)}$ комплексное сопряжение. Перейдем в обеих частях формулы (11) к комплексно сопряженным величинам. Учтем при этом, что $\overline{f(x)} = f(x)$. Получаем

$$f\,(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x, \beta)}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda \xi} (-i\lambda)^n d\lambda f(\xi) d\xi. \qquad (12)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в формуле (12) заметим, что выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda \xi} d\lambda \equiv G(t, \xi)$$

является фундаментальным решением [14] задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u.$$

Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda \xi} (-i\lambda)^n d\lambda = (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta, \xi)}{\partial \xi^n}.$$

Формула (12) принимает вид

$$f\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi, \beta)}{n!} f_{n,\beta}, \qquad (13)$$

где

$$f_{n,\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

Таким образом, формула (13) представляет теорему разложения в ряд полиномов Аппеля. Коэфициенты ряда вычисляют через производные фундаментального решения, ассоциированного с дифференциальным уравнением.

5. Интегральное преобразование Фурье и разложение по полиномам Аппеля

5.1. Вычисление коэффициентов разложения в ряд полиномов Аппеля через изображение Фурье

Найдем коэффициенты f_j разложения функции $f(x)$ в ряд полиномов Аппеля по известному образу Фурье $\Phi(\lambda)$. Перепишем формулу (8) для f_j в виде

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} \Phi(\lambda) d\lambda d\xi.$$

Изменим порядок интегрирования и воспользуемся формулой (9) Тогда получим

$$f_{n,\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n G(\beta,\xi)}{\partial \xi^n} e^{i\lambda\xi} d\xi d\lambda,$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} \Phi(\lambda) d\lambda. \tag{14}$$

5.2. Вычисление изображения Фурье по коэффициентам разложения в ряд Аппеля

Даны коэффициенты f_j разложения функции $f(x)$ в ряд полиномов Аппеля. Найти образ Фурье $\Phi(\lambda)$ функции $f(x)$. Имеем

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

Запишем последнюю формулу в виде

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(\lambda)\beta} e^{p(\lambda)\beta} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

Воспользуемся формулой (6), тогда получим

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n \int_{-\infty}^{\infty} p(n,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Из формулы (14) получаем нужный результат

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta}. \tag{15}$$

Замечание 4. *Свойства разложений в ряды полиномов Аппеля можно получить из свойств преобразования Фурье.*

В качестве примера получим формулу для коэффициентов производной данной функции $f(x)$.

Следствие 1. *Пусть* $g(x) = f^{(n)}(x)$ *тогда* $g_{j,\beta} = (-1)^n f_{j+n,\beta}$.

Доказательство. Применим формулу для коэффициентов разложения по полиномам Аппеля

$$g_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} G(\lambda) d\lambda.$$

По свойству преобразования Фурье производной имеем

$$G(\lambda) = (i\lambda)^n \Phi(\lambda).$$

Значит,

$$g_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\beta p(\lambda)} (i\lambda)^n \Phi(\lambda) d\lambda = (-1)^n f_{j+n,\beta}.$$

6. Решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u$

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения [2]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t < T, \\ u(x,\ 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{gathered} \tag{16}$$

Решение задачи Коши выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \Phi(\lambda) d\lambda, \tag{17}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi.$$

6.1. Решение задачи Коши разложением в ряд полиномов Аппеля

Преобразуем формулу (16), таким образом, чтобы решение задачи Коши представлялось в форме суммы ряда произведений: полинома Аппеля $p_n(x,\beta)$ на неизвестный множитель переменного t. При этом второй множитель конструируется из разложения в ряд полиномов Аппеля начального условия.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ из пространства быстро убывающих функций [1], тогда решение задачи Коши $u(t,x)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых по переменной $t, t \geq 0$ быстро убывающих по переменной x функций существует, единственно и имеет вид [13]*

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} f_{n,t+\beta}, \tag{18}$$

где

$$f_{n,t+\beta} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(t+\beta,\xi)}{\partial \xi^n} f(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Применим формулу (17). Тогда имеем

$$\Phi(\lambda) = e^{p(\lambda)\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta}.$$

Следовательно, на основании формулы (17) имеем равенство

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x} \sum_{n=0}^{\infty} (-i\lambda)^n f_{n,\beta} d\lambda.$$

Учитывая формулу (14), получим формулу (18).

Замечание 5. *Чтобы получить разложение в ряд полиномов Аппеля решения рассматриваемой задачи Коши, надо найти разложение начального условия в ряд полиномов Аппеля. Затем, в формулах коэффициентов выполнить замену параметра $\beta \longrightarrow t + \beta$.*

6.2. Решение задачи Коши разложением в ряд производных фундаментальных решений

Мы покажем, что коэффициенты разложения в ряд производных фундаментальных решений вычисляются по формулам с участием полиномов Аппеля.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ из пространства быстро убывающих функций, тогда решение задачи Коши $u(t,x)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых по переменной $t, t \geq 0$ быстро убывающих по переменной x функций существует, единственно и имеет вид*

$$u\,(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_{n,\beta} \frac{\partial^n G(t+\beta,x)}{\partial x^n}, \tag{19}$$

где

$$f_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!}\, f\,(\xi)\, d\xi\,.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, решение задачи Коши выражается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tp(\lambda)} e^{\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Воспользуемся следствием из формулы (6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} (-i\lambda)^n = e^{-\beta p(\lambda)} \exp(-\xi\lambda)\,.$$

Тогда получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x} (-i\lambda)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f(\xi) d\xi d\lambda.$$

Осталось заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+\beta)p(\lambda)} e^{i\lambda x} (-i\lambda)^n = (-1)^n \frac{\partial^n G(t+\beta, x)}{\partial x^n}.$$

Примем обозначение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} f(\xi)\, d\xi = f_{n,\beta}.$$

Формула (19) доказана.

Замечание 6. *Чтобы получить разложение в ряд производных фундаментальных решений решения рассматриваемой задачи Коши, надо найти разложение начального условия в ряд полиномов Аппеля. Затем, в формулах производных фундаментальных решений выполнить замену параметра $\beta \longrightarrow t+\beta$, оставив при этом неизменными формулы для коэффициентов разложения.*

7. Решение обратной задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u$

Обратная задача Коши для уравнения (16) заключается в определении начального условия $f(x)$ по решению $u(\tau, x)$. Как известно решение обратной задачи существует, единственно. Однако не обладает устойчивостью [5]. Т.о. задача не корректна, однако формулу для такого решения можно найти. Она будет полезной в теоретическом плане. Кроме того, можно предположить, что на основе такой формулы можно построить практические регуляризационные алгоритмы. Займемся поиском решения. Метод Фурье дает формулу решения обратной задачи Коши

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tp(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} u(t,\xi) d\xi d\lambda.$$

Считая выполненным условие $\beta > \tau$ перепишем последнюю формулу в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta-t)p(\lambda)} e^{-\beta p(\lambda)} e^{i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} u(\tau,\xi) d\xi d\lambda.$$

Дословно повторяя выкладки п.6 получим две формулы для решения обратной задачи. Первая формула с помощью ряда полиномов Аппеля. Она имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x,\beta)}{n!} u_{n,\beta-\tau}, \tau < \beta, \tag{20}$$

где

$$u_{n,\beta-\tau} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G(\beta-\tau,\xi)}{\partial \xi^n} u(\tau,\xi) d\xi.$$

Вторая формула представляет решение ретростпективной задачи Коши [11] в виде разложения в ряд производных фундаментальной функций

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n,\beta} \frac{\partial^n G(\beta-\tau, x)}{\partial x^n}, \tau < \beta, \tag{21}$$

где

$$u_{n,\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(\xi,\beta)}{n!} u(\tau,\xi)\, d\xi .$$

8. Обсуждение результатов

Имеется всего пять ортогональных с весом последовательностей полиномов Аппеля на действительной оси [7,10]. Последовательность полиномов Эрмита одна из них. Выберем в формуле (2) многочлен $p(\lambda) = -\lambda^2$. Тогда получим

$$e^{\lambda^2\beta}e^{i\lambda x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^j \beta^{\frac{j}{2}}}{j!} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}}\right), \tag{22}$$

Таким образом, полиномы Аппеля есть масштабированные полиномы Эрмита. Формула (9) преобразовывается к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda)^j e^{-\lambda^2\beta} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\beta}}}{2\sqrt{\pi\beta}} \frac{1}{(2\sqrt{\beta})^j} H_j\left(\frac{x}{2\sqrt{\beta}}\right).$$

Значит, производная порядка j фундаментального решения $G(t,x)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности на действительной оси есть j функция Эрмита. Следовательно, результаты полученные в статье действительно обобщают результаты работ [8,12,15]. Наметим пути развития результатов статьи. Откажемся от ассоциации полиномов Эрмита с дифференциальным уравнением. Будем считать, что экспоненциальная производящая функция последовательности многочленов Аппеля p_n имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} z^n = A(-iz)\exp(xz), \tag{23}$$

где $z = i\lambda$, а $A(\lambda)$ некоторый степенной ряд по λ, удовлетворяющий условиям:

- функция $A(\lambda) \neq 0, \lambda \in R$,
- функция $A^{-1}(\lambda)$ есть образ Фурье функции убывающей вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$.

Приведем формальный вывод формул для коэффициентов в приведенных предположениях. Пусть функция $y = f(x)$ может быть разложена в ряд полиномов Аппеля

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k p_k(x),$$

тогда формулу разложения для преобразования Фурье запишем в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} A(\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda.$$

Учитывая формулу (23) получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^n \frac{e^{-i\lambda\xi}}{A(\lambda)} d\lambda f(\xi)\, d\xi.$$

Примем обозначение для преобразования Фурье функции $\frac{1}{A(\lambda)}$:

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} d\lambda.$$

Тогда выполнено

$$G^{(n)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} (-i\lambda)^n d\lambda.$$

Значит,формула разложения функции по полиномам Аппеля приобретает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n G^{(n)}(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Тогда получаем разложение в ряд полиномов Аппеля

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} f_n, \tag{24}$$

где f_n– коэффициент при полиноме $p_n(x)$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(n)}(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Замечание 7. *Строгое обоснование разложения в ряд (24) будет предложено в последующих работах.*

9. Заключение

Основная идея работы заключается в использовании преобразования Фурье для изучения рядов по полиномов Аппеля. Удалось найти формулы для коэффициентов разложения, в которых участвуют функции ассоциированные с рядом полиномов Аппеля. Установлено, также что с каждым рядом Аппеля можно связать некоторый ассоциированный ряд, коэффициенты которого вычисляются с помощью полиномов Аппеля. Развита техника решения уравнений математической физики с помощью рядов по полиномам Аппеля. Главный результат состоит в том, что достаточно разложить в ряд полиномов Аппеля начальное условие, тогда решение задачи Коши получается заменой параметра $\beta \longrightarrow \beta + t$ в разложении начального условия. Точно также, чтобы найти решение ретроспективной задачи Коши надо в выражении температурного поля в момент t выбрать параметр $\beta > t$, а затем выполнить замену $\beta \longrightarrow \beta - t$. В результате получим выражение начального распределения температурного поля в момент $t = 0$.

10. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-2024-0007).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В. С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В. П. , Сидоров Ю.В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. 4-е изд., стереотип. Физматлит, 2003. 288 с.

2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М:, Физматлит, 2004.

3. Казьмин Ю. А.О разложениях в ряды по полиномам Аппеля. Матем. заметки, №5, вып.5, 1969, 509–520.

4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т.2.— М.-Л.: ГТТИ, 1945.— 620 с.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.

6. Тихонов А.Н. , Васильева А.Б., Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. — Физматлит, 2005.

7. Чубариков В. Н. Обобщённая формула бинома Ньютона и формулы суммирования. Чебышевский сб., №21, вып.4 , 2020, 270–301.

8. Яремко Н. Н., Селютин В. Д., Журавлева Е. Г. Новые формулы обращения для интегральных преобразований Лапласа, Вейерштрасса и Меллина. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2018, № 1, 24–35.

9. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. Hermite Polynomials. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.

10. Aigner, Martin. A Course in Enumeration. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 238. Springer, 2007.

11. Jeffreys H. and Jeffreys B. *Methods of Mathematical Physics*,3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956.

12. Sitnik S. M., Yaremko O., Yaremko N. Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems,*Springer Nature Switzerland*, 2020, pp.447-466.

13. Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. New York. McGraw-Hill. 1951.542 p.

14. Thambynayagam, R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. / McGraw-Hill Professional. 2011.

15. Yaremko, N. , Yaremko, O. On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation. DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

REFERENCES

1. Vladimirov, V. S., Vasharin, A. A., Karimova, H. H., Mikhailov, V. P.. Sidorov, Y.V., Shabunin, M.I. 1974, "Collection of Problems on Mathematical Physics Equations [in Russian]", *Nauka, Moscow.*

2. Vladimirov, V. S., Zharinov, V. V. 2004, "Equations of Mathematical Physics [in Russian]", *Fizmatlit, Moscow.*

3. Kazmin, Yu.A. 1969, Expansions in series of Appell polynomials Math. Notes , No. 5 : 5, pp. 304–311.

4. Courant, R. & Hilbert, D. 1962, "Methods of Mathematical Physics", *Vol. 2, Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, New York.*

5. Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Ya. 1977, "Methods for solutions of ill-posed problems", *N Y: Wiley*, 258 p.

6. Tikhonov, A. N., Vasil'eva, A. B., Sveshnikov, A. G. 1985, "Differential Equations", *Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag.*

7. Chubarikov, V. N. 2020, "A generalized Binomial theorem and a summation formulae", *Chebyshevskii Sb.[in Russian]*, № . 21:4, pp. 270–301.

8. Yaremko, N. N., Selyutin, V. D., Zhuravleva, E. G. 2018, "New conversion formulas for integral transformations of Laplace, Weierstrass and Mellin", *News of higher educational institutions. The Volga region. Physical and Mathematical Sciences. [in Russian]*, № . 1, 24-35.

9. Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. 1999, "Hermite Polynomials", *Cambridge, Cambridge University Press.*

10. Aigner, Martin. 2007, "A Course in Enumeration. Graduate Texts in Mathematics", *Vol. 238. Springer.*

11. Jeffreys, H. & Jeffreys, B. 1956, "Methods of Mathematical Physics", *3rd ed., Cambridge Univ. Press*, 1956.

12. Sitnik, S. M., Yaremko, O., Yaremko, N. 2020, "Transmutation Operators and Applications. Transmutation Operators Boundary Value Problems", *Springer Nature Switzerland*, pp.447-466.

13. Sneddon, I.N. 1951, "Fourier Transforms", *New York. McGraw-Hill*, 542 p.

14. Thambynayagam, R. K. M. 2011, "The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers", *McGraw-Hill Professional.* 2011.

15. Yaremko, N., Yaremko, O. "On a new formulas for a direct and inverse Cauchy problems of heat equation", DOI:10.48550/arXiv.1311.4442.

Получено: 22.05.2024
Принято в печать: 04.09.2024