

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.957

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-201-212

**Изоспектральные и частично-изоспектральные операторы  
Дирака на конечном отрезке**

О. Э. Мирзаев, Т. Г. Хасанов

**Мирзаев Олим Эркинович** — кандидат физико-математических наук, Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова (г. Самарканд, Узбекистан).

*e-mail: olim-mirzaev@mail.ru*

**Хасанов Темур Гафурджанович** — аспирант, Ургенчский государственный университет (г. Ургенч, Узбекистан).

*e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru*

**Аннотация**

В данной работе предлагается алгоритм построения изоспектрального и частично-изоспектрального операторов Дирака на конечном отрезке. Этот алгоритм применяется к процессу нахождения решений смешанных задач, поставленных для систем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

*Ключевые слова:* собственные значения, нормирующие константы, обратные задачи, интегральные уравнения Фредгольма второго рода, изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака.

*Библиография:* 25 названий.

**Для цитирования:**

Мирзаев, О. Э., Хасанов, Т. Г. Изоспектральные и частично-изоспектральные операторы Дирака на конечном отрезке // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 201–212.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 517.957

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-201-212

**Isospectral and partially isospectral Dirac operators on the finite  
interval**

O. E. Mirzaev, T. G. Khasanov

**Mirzaev Olim Erkinovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Samarkand State University named after Sharof Rashidov (Samarkand, Uzbekistan).

*e-mail: olim-mirzaev@mail.ru*

**Khasanov Temur Gafurdjanovich** — postgraduate student, Urgench State University (Urgench, Uzbekistan).

*e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru*

### Abstract

In this paper, we propose an algorithm for constructing isospectral and partially isospectral Dirac operators on a finite interval. This algorithm is applied to the process of finding solutions to mixed problems posed for a system of partial differential equations of hyperbolic type with variable coefficients.

**Keywords:** eigenvalues, normalization constants, inverse problems, Fredholm integral equations of the second kind, isospectral and partially-isospectral Dirac operators.

**Bibliography:** 25 titles.

### For citation:

Mirzaev, O. E., Khasanov, T. G. 2024, "Isospectral and partially isospectral Dirac operators on the finite interval", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 201–212.

## 1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Краевые задачи для систем уравнений Дирака

$$D^0 y \equiv B y' = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (2)$$

и

$$D(p(x), q(x), \infty, \infty) y \equiv B y' + Q(x) y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0 \quad (4)$$

называются изоспектральными, если имеют одинаковые собственные значения, т.е.  $\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty)) = \sigma(D^0) = \{n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Краевые задачи (1)-(2) и (3)-(4) называются частично-изоспектральными, если собственные значения удовлетворяют условиям

$$\lambda_0 \neq \lambda_0^0; \quad \lambda_n = \lambda_n^0 \text{ при } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а  $p(x), q(x) \in C^1[0, \pi]$  - вещественные непрерывно дифференцируемые функции,  $\lambda$  - комплексный параметр,  $\lambda_n^0$  - собственные значения краевой задачи (1)-(2).

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач системы дифференциальных уравнений Дирака на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах [1-5]. М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев (см.[6]) показали, что оператор Дирака на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, а также ими найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач. М.Г.Гасымовом и Б.М.Левитаном (см.[7]) были найдены необходимые и достаточные условия восстановления оператора Дирака на полуоси по их спектральным функциям. При построении изоспектральных операторов Дирака на конечном отрезке с заданным спектром  $\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty)) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{Z}\}$  нами использован метод Гасымова-Левитана (см.[7]). Этот метод основан на восстановлении коэффициента оператора Дирака по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Следует отметить, что изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [8-16]. Частично-изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучались в работах [17-18]. Теория обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля и их приложения более подробно изложена в работах [19-25].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм восстановления семейства операторов Дирака  $D = D(p(x), q(x), \infty, \infty)$  и  $D = D(a)$  на конечном отрезке, спектры которых удовлетворяют соответственно условиям:

$$\sigma(D(p(x), q(x), \infty, \infty)) = \{\lambda_n = n, n \in Z\} \text{ и } \sigma(D(a)) = \{\lambda_0 = a, |a| < 1, \lambda_n = n, n \in Z \setminus \{0\}\}.$$

## 2. Некоторые сведения об обратной задаче для оператора Дирака на конечном отрезке

Обозначим через  $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$  решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1. \quad (5)$$

Известно [22], что решение  $\varphi(x, \lambda)$  задачи (3) с условиями (5) существует, единственно и для каждого фиксированного  $x \in [0, \pi]$  является целой вектор-функцией по  $\lambda$ . Кроме того, имеет место интегральное представление

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \quad (6)$$

при этом матрица-функция  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$  является решением задачи

$$BK'_x(x, t) + K'_t(x, t)B = -Q(x)K(x, t), \quad (7)$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -Q(x) \quad (8)$$

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что вектор-функция  $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$  при любом  $\lambda$  удовлетворяет граничному условию  $\varphi_1(0, \lambda) = 0$ . Поэтому собственные значения  $\lambda_n$ ,  $n \in Z$  задачи (3) с условиями (4) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi_1(\pi, \lambda) = 0. \quad (10)$$

Тогда  $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$ ,  $n \in Z$  является собственной вектор-функцией задачи (3) с условиями (4).

Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi [\varphi_1^2(x, \lambda_n) + \varphi_2^2(x, \lambda_n)] dx, \quad n \in Z. \quad (11)$$

Числа  $\alpha_n$ ,  $n \in Z$  называются нормировочными числами краевой задачи (3)-(4). Набор чисел  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (3)-(4).

**ТЕОРЕМА 2.1.** ([6]). Если  $p(x)$  и  $q(x)$  имеют производные  $k$ -порядка из  $L^2[0, \pi]$ , то для спектральных данных  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  задачи (3)-(4) справедливы равенства

$$\lambda_n = n + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{k,n}}{n^k}, \quad (12)$$

$$\alpha_n = \pi + \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{c_{k,n}}{n^k}. \quad (13)$$

где ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{k,n}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty$$

сходятся.

Следует отметить, что собственные вектор-функции  $\varphi(x, \lambda_n) = (\varphi_1(x, \lambda_n), \varphi_2(x, \lambda_n))^T$ ,  $n \in Z$  задачи (3)-(4), соответствующие различным собственным значениям ортогональны в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых двух компонентных вектор-функций  $L_2^2(0, \pi)$  и для произвольных вектор-функций  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[0, \pi]$  имеет место

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda_n) \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} \varphi^T(t, \lambda_n) f(t) dt \right\}.$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x, \lambda_n) \varphi^T(t, \lambda_n) = I \delta(x - t), \quad (14)$$

где  $I$ -единичная матрица,  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака. В частности, при  $p(x) \equiv 0$ ,  $q(x) \equiv 0$ , имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) = I \delta(x - t). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2.2. ([6]). Коэффициенты  $p(x)$  и  $q(x)$  краевой задачи (3)-(4) определяются однозначно по спектральным данным  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ .

ЛЕММА 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \varphi(x, \lambda_n) (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) = 0, \quad 0 < t < x < \pi. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 2.3. ([6]). Ядро  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$  оператора преобразования (6), удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, \quad (0 < t \leq x < \pi), \quad (17)$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} \sin \lambda_n x \\ -\cos \lambda_n x \end{pmatrix} (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) - \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 2.4. ([6]). Для того чтобы последовательность вещественных чисел  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $n \in Z$  была спектральными данными некоторой краевой задачи вида (3)-(4) с матричной функцией вида

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы для  $\lambda_n$ ,  $n \in Z$  и  $\alpha_n$ ,  $n \in Z$  выполнялись асимптотические формулы (12) и (13), где  $p(x)$  и  $q(x)$  имеют производные  $k$ -го порядка из  $L^2(0, \pi)$ .

Итак, пусть  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $n \in Z$  удовлетворяет условиям (12) и (13). Построим матричную функцию  $F(x, t)$  по формуле (18) и рассмотрим интегральное уравнение (17) относительно  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ . Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.5. ([6]). При каждом фиксированном  $x \in (0, \pi)$  интегральное уравнение (17) имеет единственное решение  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ .

Теперь, решая интегральное уравнение (17), находим матрицу-функций  $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ . Далее определим вектор-функцию  $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$  по формуле (6). Тогда нетрудно показать, что вектор-функция  $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$  удовлетворяет уравнению

$$B\varphi' + Q(x)\varphi = \lambda\varphi, \quad Q(x) = K(x, x)B - BK(x, x)$$

и начальным условиям  $\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1$ .

### 3. Алгоритм восстановления изоспектральных и частично-изоспектральных краевых задач

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть пара  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \alpha_n > 0, n \in \mathbb{Z}$  последовательностей действительных чисел удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda_n = n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} < \infty, \quad \gamma_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Тогда эта пара является спектральными данными граничной задачи, поставленной для оператора Дирака вида  $D(p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots), q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots), \infty, \infty) = D(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что последовательность  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \alpha_n > 0, n \in \mathbb{Z}$ , определенная формулами (19), удовлетворяет условиям (12)-(13).

Для этого определим матрицу-функций  $F(x, t)$  по формулам (18) и (19):

$$F(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x, t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} \varphi(x, n) (\sin nt, -\cos nt), \quad (21)$$

где

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, s) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \quad (22)$$

Известно ([6], [22]), что вектор-функция  $\varphi(x, \lambda)$  определенная по формуле (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), и начальным условиям  $\varphi_1(0, \lambda) = 0, \varphi_2(0, \lambda) = -1$ , где коэффициенты определяются по формулами

$$p(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} [\varphi_2(x, n) \sin nt - \varphi_1(x, n) \cos nt], \quad (23)$$

$$q(x, \dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2 + 1} [\varphi_1(x, n) \sin nt + \varphi_2(x, n) \cos nt].$$

Далее подставляя выражение (21) в формулу (22), имеем

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_p}{p^2 + 1} \varphi(x, p) \int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds. \quad (24)$$

Отсюда, получим собственную вектор-функцию

$$\varphi(x, n) = \begin{pmatrix} \frac{\sin nx}{1 + \frac{\gamma_n}{n^2+1}x} \\ -\frac{\cos nx}{1 + \frac{\gamma_n}{n^2+1}x} \end{pmatrix}, n \in Z,$$

соответствующую собственным значениям  $\lambda_n = n$ ,  $n \in Z$ , т.к.

$$\int_0^x (\sin ps, -\cos ps) \begin{pmatrix} \sin ns \\ -\cos ns \end{pmatrix} ds = \begin{cases} x, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

Легко проверяются выполнение граничных условий (4), т.е.  $\varphi_1(0, \lambda_n) = 0$ ,  $\varphi_1(\pi, \lambda_n) = 0$ ,  $\lambda_n = n$ ,  $n \in Z$ .

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства изоспектрального оператора Дирака вида  $D(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots)$ . В частности, если  $\gamma_0 > 0$ ,  $\gamma_n = 0$ ,  $n \in Z \setminus \{0\}$ , то имеем следующую изоспектральную краевую задачу:

$$D(\gamma_0)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0 x} \\ \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0 x} & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, 0 < x < \pi, \quad (25)$$

$$y_1(0) = 0, y_1(\pi) = 0.$$

Все собственные значения краевой задачи  $D(\gamma_0)$  состоят из заданных чисел  $\lambda_n = n$ ,  $n \in Z$ , а соответствующие им собственные функции находятся по формулам

$$\varphi_1(x, 0) = 0, \varphi_2(x, 0) = -1 + \ln(1 + \gamma_0 x),$$

$$\varphi_1(x, n) = \sin nx, \varphi_2(x, n) = -\cos nx + \frac{\gamma_0 \sin nx}{n(1 + \gamma_0 x)}, n \in Z \setminus \{0\}.$$

Теперь с помощью изоспектральных граничных задач (25) построим семейство смешанной задачи:

$$iu_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0 x} \\ \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0 x} & 0 \end{pmatrix} u, 0 < x < \pi, \gamma_0 > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T, u_1(0, t) = 0, u_1(\pi, t) = 0, u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Используя теорему 3.1, получим:

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** Решение смешанной задачи, поставленной для системы уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (26), выглядит следующим образом:

$$u(x, t) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \ln(1 + \gamma_0 x) \end{pmatrix} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} B_n e^{-int} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx + \frac{\gamma_0 \sin nx}{n(1+\gamma_0 x)} \end{pmatrix},$$

здесь  $B_0 = \int_0^\pi (-1 + \ln(1 + \gamma_0 x)) f_2(x) dx$ ,  $B_n = \int_0^\pi (y_{1n}(x) f_1(x) + y_{2n}(x) f_2(x)) dx$ ,  $n \in Z \setminus \{0\}$ .

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть пара  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^\infty$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $n \in Z$  последовательностей действительных чисел удовлетворяет следующим условиям

$$\lambda_0 = a, |a| < 1, \lambda_n = n, n \in Z \setminus \{0\}, \alpha_n = \pi, n \in Z. \quad (27)$$

Тогда эта пара является спектральными данными граничной задачи, поставленной для оператора Дирака вида  $D(p(x, a), q(x, a), \infty, \infty) = D(a)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что последовательность  $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $n \in Z$ , определенная формулами (19), удовлетворяет условиям (12)-(13).

Для этого определим матричную функцию  $F(x, t)$  по формулам (18) и (27):

$$F(x, t) = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix} (\sin at, -\cos at) - \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (0, -1). \quad (28)$$

Подставляя (28) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x, t) = -\frac{1}{\pi} g(x) (\sin at, -\cos at) + \frac{1}{\pi} f(x) (0, -1), \quad (29)$$

где

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, s) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ds, \quad (30)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, s) \begin{pmatrix} \sin as \\ -\cos as \end{pmatrix} ds. \quad (31)$$

Подставляя выражение (28) в формулы (30) и (31), имеем

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\sin ax}{a\pi} g(x) + \frac{x}{\pi} f(x), \quad (32)$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ -\cos ax \end{pmatrix} - \frac{x}{\pi} g(x) + \frac{\sin ax}{a\pi} f(x), \quad (33)$$

и

$$g(x) = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \pi (\pi - x) \sin ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \\ -\frac{a\pi [a(\pi - x) \cos ax + \sin ax]}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} \frac{a\pi \sin^2 ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \\ -\frac{a\pi [a(\pi - x) - \frac{\sin 2ax}{2}]}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Далее, учитывая формулы (29), (34) и (35), находим

$$K(x, t) = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 (\pi - x) \sin ax \sin at}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} & \frac{a^2 (\pi - x) \sin ax \cos at - a \sin^2 ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \\ \frac{a[a(\pi - x) \cos ax + \sin ax] \sin at}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} & -\frac{a[a(\pi - x) \cos ax + \sin ax] \cos at + a^2 (\pi - x) - \frac{a \sin 2ax}{2}}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \end{pmatrix}$$

$$K_{11}(x, x) = -\frac{a^2 (\pi - x) \sin^2 ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax}, \quad (35)$$

$$K_{12}(x, x) = \frac{a^2 (\pi - x) \frac{\sin 2ax}{2} - a \sin^2 ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax}, \quad (36)$$

$$K_{21}(x, x) = \frac{a^2 (\pi - x) \frac{\sin 2ax}{2} + a \sin^2 ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax}, \quad (37)$$

$$K_{22}(x, x) = \frac{a^2 (\pi - x) \sin^2 ax - a \sin 2ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax}. \quad (38)$$

Далее, учитывая формулы (8), (35), (36), (37) и (38), находим

$$p(x, a) = -(K_{12} + K_{21}) = \frac{a^2 (\pi - x) \sin 2ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax},$$

$$q(x, a) = K_{11} - K_{22} = \frac{2a^2 (\pi - x) \sin^2 ax + a \sin 2ax}{a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax}.$$

Таким образом, удалось найти все коэффициенты семейства частично-изоспектрального оператора Дирака вида  $D(a)$ :

$$D(a)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} \frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & -\frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix} y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi) = 0, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Все собственные значения краевой задачи  $D(a)$  состоят из заданных чисел  $\lambda_0 = a$ ,  $|a| < 1$ ,  $\lambda_n = n$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , а соответствующие им собственные функции находятся по формулам

$$\varphi_1(x, \lambda_0) = \frac{a^2(\pi^2 - x^2)\sin ax - a^2x(\pi - x)\sin ax + 2\sin^3 ax}{a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax},$$

$$\varphi_2(x, \lambda_0) = \frac{ax\sin ax - a^2(\pi^2 - x^2)\cos ax + a(\pi - x)[ax + \sin ax]}{a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax},$$

$$\varphi_1(x, \lambda_n) = \frac{4(a - n)^2 \sin^2 ax \sin nx - 4a^2n(\pi - x)\sin ax \sin(a - n)x}{n(a - n)[a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax]}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$\varphi_2(x, \lambda_n) = -\cos nx - \frac{a\sin(a - n)x[a(x - \pi)\cos ax + \sin ax]}{(a - n)[a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax]} +$$

$$+ \frac{\sin nx[-a(x - \pi)\cos ax + \frac{\sin ax}{2}]}{n[a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax]}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Теперь посмотрим следующие смешанную задачу:

$$iu_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} \frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \\ \frac{2a^2(\pi-x)\sin^2 ax+a\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} & -\frac{a^2(\pi-x)\sin 2ax}{a^2(\pi^2-x^2)+\sin^2 ax} \end{pmatrix} u, \quad 0 < x < \pi, \quad |a| < 1,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T, \quad u_1(0, t) = 0, \quad u_1(\pi, t) = 0, \quad u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Используя теорему 3.2, получим:

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Решение смешанной задачи поставленной для системы уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (40) выглядит следующим образом:

$$u(x, t) = B_0 e^{-iat} y_0(x) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} B_n e^{-int} y_n(x).$$

Здесь,

$$y_{10}(x) = \frac{a^2(\pi^2 - x^2)\sin ax - a^2x(\pi - x)\sin ax + 2\sin^3 ax}{a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax},$$

$$y_{20}(x) = \frac{ax\sin ax - a^2(\pi^2 - x^2)\cos ax + a(\pi - x)[ax + \sin ax]}{a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax},$$

$$y_{1n}(x) = \sin nx - \frac{a\sin ax}{a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax} \left[ \frac{a(\pi - x)\sin(a - n)x}{(a - n)} - \frac{\sin nx \sin ax}{n} \right], \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$y_{2n}(x) = -\cos nx - \frac{a\sin(a - n)x[a(x - \pi)\cos ax + \sin ax]}{(a - n)[a^2(\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax]} +$$



$$+ \frac{\sin nx \left[ -a(x - \pi) \cos ax + \frac{\sin ax}{2} \right]}{n \left[ a^2 (\pi^2 - x^2) + \sin^2 ax \right]}, n \in Z \setminus \{0\},$$

$$B_0 = \int_0^\pi y_{20}(x) f_2(x) dx, B_n = \int_0^\pi (y_{1n}(x) f_1(x) + y_{2n}(x) f_2(x)) dx, n \in Z \setminus \{0\}.$$

Таким образом, в этой статье построено семейство изоспектрального и частично-изоспектрального оператора Дирака,  $D(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots)$  и  $D(a)$  собственные значения которых совпадают соответственно с заданными числами:

$$\sigma(D(\dots, \gamma_{-n}, \dots, \gamma_0, \dots, \gamma_n, \dots)) = \{\lambda_n = n, n \in Z\}$$

и

$$\sigma(D(a)) = \{\lambda_0 = a, |a| < 1, \lambda_n = n, n \in Z \setminus \{0\}\}.$$

С помощью изоспектрального и частично-изоспектрального оператора Дирака найдено решение смешанных задач, поставленных для системы дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа с переменными коэффициентами.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян, Т. Н. Изоспектральные операторы Дирака // Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, 29, № 2, 1994, с.4-14.
2. Albeverio, S., Hryniv, R., Mykytyuk, Ya. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials // Russian Journal of Math Physics, 12(2005), 406-423.
3. Etibar, S., Panakhov, Tuba Gulsen. Isospectrality problem for Dirac system // National academy of sciences of Azerbaijan, v.40, Special issue, 2014, p.386-392.
4. Ashrafyan, Yu. A., Harutyunyan, T. N. Dirac operator with linear potential and its perturbations // Mathematical Inverse Problems, Vol.3, No.1 (2016), 12-25.
5. Ashrafyan, Y., Harutyunyan, T. Isospectral Dirac operators // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2017, № 4, 1-9.
6. Гасымов, М. Г., Джабиев, Т. Т. Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.
7. Гасымов, М. Г., Левитан, Б. М. Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР, -1966. –т.167, № 5. –с.967-970.
8. Poschel, J., Trubowitz, E. Inverse spectral theory // Academic Press, New York, 1987.
9. Jodeit, M., Levitan, B. M. The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.
10. Jodeit, M., Levitan, B. M.. The izospectrality problem fo some vector boundary problems // Russian journal of mathematical physics, vol.6, No.4, 1999, pp.375-393.
11. Ashrafyan, Y. A., Harutyunyan, T. N. Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, № 27, p.1-8.
12. Khasanov, A. B. Eigenvalues of the Dirac operator in the continuous spectrum // Theoretical and Mathematical Physics, 1994, 99(1), 396-401. <https://doi.org/10.1007/BF01018793>

13. Mirzaev, O. E., Khasanov, A. B. On families of isospectral Sturm–Liouville boundary value problems // *Ufa Math. J.* 12:2 (2020), 28–34. <https://doi.org/10.13108/2020-12-2-28>
14. Мирзаев, О. Э., Хасанов, А. Б. Изоспектральные операторы Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // *ДАН РУз.* 2020, № 3, с. 3–9.
15. Мирзаев, О. Э., Муродов, Ф. М. Изоспектральные операторы Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // *Научный журнал Самаркандского университета*, 2020, № 3(121), с. 50–55. <https://doi.org/10.59251/2181-1296.v3.1211.1083>
16. Мирзаев, О. Э. Изоспектральные операторы Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // *Научный журнал Самаркандского университета*, 2020, № 5(123), с. 60–64. <https://doi.org/10.59251/2181-1296.v5.1231.1436>
17. Мирзаев, О. Э. Частично-изоспектральные операторы Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // *Чебышевский сборник.* 2023, Т. 24, Выпуск 1(87), с. 104–113. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113>
18. Мирзаев, О. Э., Сувонова, М. Частично-изоспектральные операторы Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // *Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве. II Международный форум. 9 ноября 2022 г. Сборник тезисов докладов.* с. 23–27.
19. Амбарцумян, В. А. Über eine Frage Eigenwerttheori. // *Zeitschr. für Physik*, 53, 1929, pp. 690–695.
20. Алимов, Ш. А. О работах А. Н. Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма–Лиувилля // *УМН*, 6(192), 1976, с. 84–88.
21. Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1951, т. 15, № 4, с. 309–360.
22. Левитан, Б. М., Саргсян, И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака // М.: Наука, 1988.
23. Марченко, В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения // Киев «Наукова Думка» 1977.
24. Савчук, А. М., Шкаликов, А. А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма–Лиувилля // *Тр. МИАИ*, 2008, Т. 260., с. 227–247. <https://doi.org/10.1134/S0081543808010161>
25. Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач // М.: Физматлит, 2007, 284 с.

## REFERENCES

1. Arutjunjan, T. N. 1994, “Isospectral Dirac operators”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia. Mathematics*, 29, № 2, pp. 4–14.
2. Albeverio, S, Hryniv, R., Mykytyuk, Ya. 2005, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, *Russian Journal of Math Physics*, 12, pp. 406–423.
3. Etibar S. Panakhov, Tuba Gulsen. 2014, “Isospectrality problem for Dirac system”, *National academy of sciences of Azerbaijan*, Vol. 40, Special issue, pp. 386–392.

4. Ashrafyan, Yu. A., Harutyunyan, T. N. 2016, “Dirac operator with linear potential and its perturbations”, *Mathematical Inverse Problems*, Vol.3, No.1, pp. 12–25.
5. Ashrafyan, Y., Harutyunyan, T. 2017, “Isospectral Dirac operators”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, № 4, pp. 1–9.
6. Gasymov, M. G., Dzhabiev, T. T. 1975, “Determination of the system of Dirac differential equations from two spectra”, *Proceedings of the Summer School on the Spectral Theory of Operators and the Representation of Group Theory - Baku: Elm*, pp. 46–71.
7. Gasymov, M. G., Levitan, B. M. 1966, “Inverse problem for the Dirac system”, *DAN USSR*, v.167, № 5. pp.967–970.
8. Poschel, J., Trubowitz, E. 1987, “Inverse spectral theory”, *Academic Press*, New York.
9. Jodeit, M., Levitan, B. M. 1997, “The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation”, *Advances in differential equations*, v.2, № 2, pp. 297–318.
10. Jodeit, M., Levitan, B. M. 1999, “The izospectrality problem for some vector boundary problems”, *Russian journal of mathematical physics*, vol.6, No.4, pp. 375–393.
11. Ashrafyan, Y. A., Harutyunyan, T. N. 2015, “Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions”, *Electronic Journal of differential equations*, v. 2015, № 27, pp. 1–8.
12. Khasanov, A. B. 1994, “Eigenvalues of the Dirac operator in the continuous spectrum”, *Theoretical and Mathematical Physics*, 99(1), pp. 396–401. <https://doi.org/10.1007/BF01018793>
13. Mirzaev, O. E. Khasanov, A. B. 2020, “On families of isospectral Sturm–Liouville boundary value problems”, *Ufa Mathematical Journal*, 12:2, pp. 28–34. <https://doi.org/10.13108/2020-12-2-28>
14. Mirzaev, O. E., Hasanov, A. B. 2020, “Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval”, *DAN RUz.*, № 3, pp. 3–9.
15. Mirzaev, O. E., Murodov, F. M. 2020, “Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval”, *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University*, 3(121), pp. 50–55. <https://doi.org/10.59251/2181-1296.v3.1211.1083>
16. Mirzaev, O. E. 2020, “Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval”, *SCIENTIFIC JOURNAL Samarkand State University*, 5(123), pp. 60–64. <https://doi.org/10.59251/2181-1296.v5.1231.1436>
17. Mirzaev, O. E. 2023, “Partially-isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval”, *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 1(87), pp. 104–113. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-104-113>
18. Mirzaev, O. E., Suvonova, M. 2022, “Partially-isospectral Sturm-Liouville operators on the finite interval”, *Mathematical methods and models in high-tech production. II International Forum*. November 9, 2022, pp. 23–27.
19. Ambarzumjan, W. A. 1929, “On a Problem of the Theory of Eigenvalues”, *Zeitschr, für Physik*. 53, pp. 690–695.
20. Alimov, Sh. A. 1976, “The work of A. N. Tikhonov on inverse problems for the Sturm-Liouville equation”, *UMH*. 31:6(192), pp. 84–88. [*Russian Math. Surveys*, 31:6, pp. 87–92].

21. Gelfand, I. M., Levitan, B. M. 1951, “On the determination of a differential equation from its spectral function”, *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math.* 15 :4 , pp. 309–360.
22. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. 1988, “Sturm-Liouville and Dirac operators”, *Nauka. Moscow, [Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1990).]*
23. Marchenko, V. A. “Sturm-Liouville Operators and Applications”, *Kiev “Naukova Dumka” 1977. [Birkhäuser Verlag (1986).]*
24. Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A. 2008, “On the properties of maps connected with inverse Sturm-Liouville problems”, *Trudy MIAN.* 260, pp. 227–247 . *[Proc. Steklov Inst. Math. 260 , pp. 218–237 (2008).]* <https://doi.org/10.1134/S0081543808010161>
25. Yurko, V. A. 2007, “Introduction into the theory of inverse spectral problems”, *M.: Fizmatlit*, 284 p.

Получено: 08.01.2024

Принято в печать: 04.09.2024