ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-187-200

Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающих решение в квадратурах

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматриваются задачи, связанные с математической моделью экономического роста Рамсея – Касса – Купманса. Строится вспомогательная система дифференциальных уравнений, для которой удаётся получить решение в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления. Используя оценки сверху для функции потребления, мы находим максимальное значение временного промежутка, на котором существуют решения вспомогательной системы дифференциальных уравнений при рассматриваемых значениях параметров.

При специальном начальном условии нами показано, что существует решение задачи Коши $(K(t), C(t))$ на всем луче $t \in [0; +\infty)$, причём, обе компоненты возрастают и стремятся к найденым нами значениям.

Ключевые слова: математическая модель экономического роста, задача Рамсея — Касса — Купманса, монотонность функции сбережения и капитала, конкурентные домохозяйства, сепаратриса, стационарная норма сбережения.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:
Козко, А. И., Лужина, Л. М., Попов, А. Ю., Чирский, В. Г. Сведение математической модели некоторых задач математической экономики к системам дифференциальных уравнений, допускающим решение в квадратурах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 187–200.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-187-200

Reduction of the mathematical model of some problems of mathematical economics to systems of differential equations that can be solved in quadratures

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mikhailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru
Chirskii Vladimir Grigorievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article discusses the problems associated with the Ramsey — Kass — Koopmans mathematical model of economic growth. An auxiliary system of differential equations is being constructed, for which it is possible to obtain a solution in quadratures. Based on the obtained solution, the upper estimates of the consumption function are found. Using the upper estimates of the consumption function, we find the maximum value of the time interval in which there are solutions to the auxiliary system of differential equations for the considered parameter values.

Under a special initial condition, we show that there is a solution to the Cauchy problem $(K(t), C(t))$ on the entire ray $t \in [0; +\infty)$ and both components increase and tend to the values we found.

Keywords: mathematical model, Ramsey — Kass — Koopmans problem, monotony of the function of saving and capital, competitive households, stationary savings rate.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Kozko, A. I. , Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2024, “Reduction of the mathematical model of some problems of mathematical economics to systems of differential equations that can be solved in quadratures” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 187–200.

1. Постановка задачи и система дифференциальных уравнений

Цель статьи — привести наиболее значимые результаты относительно модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [20]), полученные в последнее время в работах авторов [3] – [11]. В работе мы ограничимся математической моделью и её описанием, а также получением свойств основных функций, входящих в модель, поэтому экономическое содержание мы рассматривать, по-возможности, не будем. Поставим экстремальную задачу. Наша задача состоит в том, чтобы найти траекторию $c(t)$, которая бы максимизировала полную полезность U:

$$U = \int_0^{+\infty} u(c(t))e^{-(\rho-n)t}\,dt \longrightarrow \max$$

при наличии бюджетного ограничения

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k},$$

неравенств $\hat{c} \geqslant 0$, $\hat{k} \geqslant 0$ и заданном начальном условии $\hat{k}(0)$ (здесь $\hat{k}(t) = k(t)\cdot e^{-xt}$, $\hat{c}(t) = c(t)\cdot e^{-xt}$). Предполагается, что производственная функция $f(\hat{k})$ и функция полезности $u(c)$ обладают неоклассическими свойствами и являются гладкими, монотонными, вогнутыми функциями, удовлетворяющими условиям Инады (далее мы эти функции выберем конкретными, поэтому не будем уточнять условия). Группа констант $(n,\ x,\ \delta,\ \theta)$ связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы, как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [12] – [17].

Применим принцип максимума Понтрягина для этой экстремальной задачи. Гамильтониан запишется в виде:

$$J = u(c(t))e^{-(\rho-n)t} + \lambda(t)\left(f(\hat{k}) - c(t)e^{-xt} - (x+n+\delta)\hat{k}\right)$$

условия первого порядка приводят к системе двух уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial c} = 0, \\ \dfrac{\partial J}{\partial \hat{k}} = -\dot{\lambda} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda(t) = e^{-(\rho-n-x)t}u'(c), \\ \lambda(f'(\hat{k}) - (x+n+\delta)) = -\dot{\lambda}. \end{array}\right.$$

В качестве u (функции полезности) обычно рассматривают (и мы в нашей работе тоже)

$$u(c) = u_\theta(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \quad c>0, \quad \theta>0.$$

В "особом" случае $\theta = 1$ функция полезности является логарифмической:

$$u_1(c) = \lim_{\theta\longrightarrow 1} u_\theta(c) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c.$$

Поскольку $u'(c) = c^{-\theta}$, то из первого уравнения первого порядка получаем $\lambda(t) = e^{-(\rho-n-x)t}c^{-\theta}$. Если полученное уравнение продифференцировать по времени t, то с учётом второго уравнения мы приходим к уравнению

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho).$$

Поскольку $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x$, то приходим к уравнению

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x).$$

Запишем уравнение трансверсальности $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\hat{k}(t)\lambda(t) = 0$ или

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\hat{k}\exp\left(-\int_0^t [f'(\hat{k}) - (x+n+\delta)]\,dt\right) = 0.$$

Таким образом мы получаем систему дифференциальных уравнений на функции $\hat{c}$, $\hat{k}$

$$\begin{cases} \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k}, \\ \dot{\hat{c}} = \theta^{-1}f'(\hat{k})\hat{c} - (\theta^{-1}(\delta+\rho)+x)\hat{c}. \end{cases}$$

Для краткости записи положим $C = \hat{c}$, $K = \hat{k}$. Далее будем использовать производственную функцию Кобба – Дугласа

$$f(K) = aK^{\alpha}. \tag{1}$$

Производственная функция (1) с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [13]). В работе [19] было замечено, что, например, при $\alpha = 0.3$ модель Рамсея — Касса — Купманса не представляет интереса. В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [1] – [20]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t (с производственной функцией Кобба – Дугласа):

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2C(t). \end{cases} \tag{2}$$

В систему входит набор констант a, α, θ и x_1, x_2, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру. Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x+n+\delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ). Подробно с ними и оценками на эти константы можно ознакомиться в [12] –[21]. Отметим, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

2. Некоторые аналитические решения и вспомогательная система

Система уравнений (2) является автономной, то есть при записи её в более кратком виде

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - C - x_1K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C - x_2C \end{cases} \tag{3}$$

временная переменная t в правые части системы (3) не входит. Это даёт возможность, отправляясь от начальных условий

$$C(0) = C_0, \quad K(0) = K_0 \tag{4}$$

и решая систему по соответствующим приближённым формулам, достигнув при некотором значении времени t_1 состояния

$$C(t_1) = C_1, \quad K(t_1) = K_1, \tag{5}$$

решать далее систему, осуществив сдвиг по времени, по тем же приближённым формулам, но с новыми начальными условиями (5).

В [3] нами обнаружено, что системы более общего вида чем (2)

$$\begin{cases} \dot{K} = aK^{\alpha} - bC - x_1K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha aK^{\alpha-1}C - x_2C, \end{cases} \tag{6}$$

где $b \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, но при наличии специальной связи между "экономическими" константами x_1, x_2, α, состоящей в выполнении равенства

$$\alpha x_1 = x_2. \tag{7}$$

Это соотношение соответствует экономическим структурам со стационарной нормой сбережения. Более того (это особенно важно!), полученные нами интегральные формулы, выражающие решения задачи Коши (4), (6) при условии (7), не очень сложны.

В подавляющем большинстве современных работ, где встречается система (2), изучают общий случай, когда равенство (7) не имеет места. Будем рассматривать модели, в которых

$$\xi = \alpha x_1 - x_2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Случай $\xi = 0$ равносилен (7) и полностью разобран в статье авторов [8].

Положим

$$x_3 = \frac{x_2}{\alpha}, \quad \xi = \alpha x_1 - x_2, \quad b = 1 + \frac{\xi K_0}{\alpha C_0}. \tag{9}$$

Если мы имеем общий случай ($\xi \neq 0$ и, значит, $x_3 \neq x_1$), то от системы (2) переходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K} = aK^{\alpha} - b\,C - x_3 K, \\ \dot{C} = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1} C - x_2 C, \quad \text{где} \quad b > 0, \end{array} \right. \tag{10}$$

после чего решаем в квадратурах задачу Коши (4), (10). Тем самым, мы трансформируем первое уравнение системы (2), изменив константу x_1 на x_3 и введя параметр b согласно (9). Таким образом, во-первых, полученная система допускает аналитическое и не слишком сложное по своей форме решение, а во-вторых, начальные значения правой части первого уравнения исходной системы (2) и правой части первого уравнения системы (10), несмотря на трансформацию самого уравнения, совпадают. Последнее обстоятельство влечёт за собой "малое"отличие решения задач Коши (2), (4) и (4), (10). Это подтверждают численные эксперименты. Также нами полученны аналитические результаты отличия решения задач Коши. Они готовятся к печати.

Изложим план решения в квадратурах задачи Коши (4), (10). Прежде всего от функций K, C переходим к функциям

$$v(t) = K(t)e^{x_3 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}. \tag{11}$$

Благодаря равенству $x_3 = x_2/\alpha$ система уравнений (10) переходит в значительно более простую систему уравнений относительно функций (11), из которой выводится обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$, явно решаемое в элементарных функциях. Далее мы находим множество значений w (оно определяется значением параметра θ и начальными условиями (4)). В итоге выписывается интегральная формула для функции $w(t)$, из которой явно определяется обратная к w функция — зависимость t от w. Она имеет достаточно простой вид:

$$\int_{C_0}^{w} \varphi(u)\, du = \lambda(e^{\varkappa t} - 1), \quad \text{где } \varkappa = x_3 - x_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) x_2, \tag{12}$$

φ — явно указанная элементарная функция, λ — постоянная, выражающаяся через α, a, θ, $\varkappa$. Соотношение (12) даёт возможность также определить максимальный временной отрезок, на котором существует решение исследуемой системы.

Подставив (11) в (10), после преобразований получим следующую систему уравнений на функции v и w:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = (av^{\alpha} - bw)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha a v^{\alpha-1} w e^{\varkappa t}. \end{array} \right. \tag{13}$$

Теорема 1. *Между функциями $v(t)$ и $w(t)$, выражающимися через решение $(K(t), C(t))$ задачи Коши (4), (10) (значение параметра b является произвольным положительным числом) по формулам (11), имеется зависимость*

$$v(w) = \Big(K_0^\alpha\Big(\frac{w}{C_0}\Big)^\theta + \frac{\theta b w^\theta}{a}\big(u_\theta(C_0) - u_\theta(w)\big)\Big)^{1/\alpha}. \tag{14}$$

Функция $w(t)$ превосходит C_0 во всех точках, кроме $t=0$, а верхняя граница для значений $w(t)$ задана неравенствами в случае $\theta \in (0,1)$

$$w < C_0\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{C_0}\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

и в случае $\theta = 1$

$$w < C_0 \exp\Big(\frac{f(K_0)}{bC_0}\Big).$$

В случае $\theta > 1$ при условии

$$bC_0 \leqslant \frac{\theta-1}{\theta} f(K_0)$$

функция $w(t)$ может неограниченно возрастать, а если $bC_0 > (1-1/\theta)f(K_0)$, то верхняя граница для $w(t)$ задается неравенством

$$w < C_0\left(\frac{1}{1-\frac{\theta-1}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{bC_0}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}.$$

Теорема 1 для $\xi = 0$ (в этом случае $b=1$) была доказана в работе [11], для случая $\xi > 0$ была доказана в работе [3]. Из теоремы 1 и тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для функции потребления $C(t)$ при всех значениях $t > 0$ верны следующие оценки сверху;*

$$C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t}\Big(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{C_0}\Big)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если} \ \ \theta \in (0;1),$$

$$C(t) \leqslant C_0 \exp\Big(\frac{f(K_0)}{bC_0} - x_2 t\Big), \quad \text{если} \ \ \theta = 1,$$

$$C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t}\left(\frac{1}{1-\frac{\theta-1}{\theta}\cdot\frac{f(K_0)}{bC_0}}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}, \quad \text{если} \ \ \theta > 1, \ bC_0 > (1-1/\theta)f(K_0).$$

Последняя теорема помогает в итоге (см. [3]) выразить t через w:

$$t = \frac{1}{\varkappa}\ln\left(1 + \frac{\theta\varkappa}{\alpha a^{1/\alpha}} J_\theta\left(\frac{w}{C_0};\alpha\right)\right), \tag{15}$$

где

$$J_\theta(Z;\alpha) = \int_1^Z \Big(f(K_0)z^\theta - \theta b z^\theta C_0 U_\theta(z)\Big)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \ \frac{dz}{z}. \tag{16}$$

Формулы (15), (16), (14) дают решение системы дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями $v(0) = K_0$, $w(0) = C_0$ в интегральной форме. Перейдя от функций $v(t)$, $w(t)$ к функциям $K(t)$, $C(t)$ (см. (11)), мы получим решение задачи Коши (4), (10). Трудности возникают при попытке найти более простое аналитическое выражение $t(w)$ чем (15), поскольку интеграл $J_\theta\left(Z;\alpha\right)$ при $\alpha \in (0;1)\setminus \cup_{n=2}^{+\infty}\{1/n\}$ не является элементарной функцией верхнего предела интегрирования z (кроме некоторых случаев, когда $f(K_0)$ и C_0 связаны специальными соотношениями). Интегралы $J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)$, $J_\theta\left(Z;\frac{1}{3}\right)$ и т.д. несложно вычисляются, но, как известно из теории экономического моделирования (см. [19] и [13]), производственная функция $f(K)=aK^\alpha$ при $\alpha \leqslant 2/3$ даёт экономически неэффективную модель, и такие значения показателя α не рассматриваются. Всё же, по мнению авторов, значения $\alpha \in [1/2;2/3]$ могут представлять теоретический интерес. Поэтому приведём значение $J_\theta(Z;\frac{1}{2})$.

При $\theta \neq 1$ имеем

$$J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)z^\theta-\theta b\,C_0\,z^\theta\cdot\frac{z^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\frac{dz}{z}=$$
$$=\int_1^Z\left(\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)z^{\theta-1}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}\right)dz=$$
$$=\left(f(K_0)+\frac{\theta}{1-\theta}b\,C_0\right)\frac{Z^\theta-1}{\theta}-\frac{\theta b\,C_0}{1-\theta}(Z-1), \quad (17)$$

а интегрирование возможно при любом значении $Z \geqslant 1$, если $\theta > 1$ и $f(K_0) > \frac{\theta}{\theta-1}b\,C_0$, а в других случаях имеются ограничения (см. теорему 1)

$$\begin{gathered}1\leqslant Z\leqslant\left(1-\frac{\theta-1}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta>1,\ \frac{f(K_0)}{b\,C_0}<\frac{\theta}{\theta-1},\\ 1\leqslant Z\leqslant\left(1+\frac{1-\theta}{\theta}\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)^{\frac{1}{1-\theta}},\ \text{если } \theta\in(0;1).\end{gathered} \quad (18)$$

В частности, выражение (17), если в него подставить верхние границы для переменной z из (18) даёт максимально возможное (при $\theta \in (0;1)$ или при $\theta \in (1;+\infty)$, если $f(K_0)/(b\,C_0) < \frac{\theta}{\theta-1}$) значение интеграла $J_\theta\left(Z;\frac{1}{2}\right)$. Если его подставить в (15), то получится максимальное значение временного промежутка, на котором существует решение при рассматриваемых значениях параметров.

При $\theta = 1$ имеем

$$J_1\left(Z;\frac{1}{2}\right)=\int_1^Z\left(f(K_0)-b\,C_0\,\ln z\right)dz=(Z-1)(f(K_0)+b\,C_0)-b\,C_0 Z\ln Z,$$

а длина максимального временного промежутка, на котором существует решение, равна (если $\alpha = 1/2$, то $\varkappa = x_2$)

$$T=\frac{1}{\varkappa}\ln\left(1+\frac{2\varkappa}{a^2}J_1\left(\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right);\frac{1}{2}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{x_2}\ln\left(1+\frac{2x_2}{a^2}\left(bC_0\exp\left(\frac{f(K_0)}{bC_0}\right)-f(K_0)-bC_0\right)\right).$$

3. Случай монотонного роста функций $K(t)$, $C(t)$ на всём луче $[0,\ +\infty)$

В связи с тем, что в предыдущем параграфе (см. [3]) мы решили в квадратурах задачу Коши для более общих систем, нежели (2) с соотношение (7), а именно (10), мы там же предложили в случае (8) заменить систему уравнений (2) системой уравнений (10), отличающейся от (2) множителем b перед C в правой части первого уравнения, равным

$$b=1+\frac{\xi K_0}{\alpha C_0}, \quad (19)$$

а также заменой x_1 на $\frac{x_2}{\alpha}$ в том же уравнении. Такой выбор параметра b обусловлен тем, что из равенства (19) следует совпадение значений правых частей первых уравнений систем (2) и (10) в начальный момент времени. А поскольку вторые уравнения этих систем одинаковы, то мы имеем “близость” решений задачи Коши для систем (2) и (10) с совпадающими начальными условиями (4) при “относительно небольших” временах.

В этом параграфе мы изучаем вопрос о монотонности функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши (10), (4). Данный вопрос постоянно привлекает внимание исследователей моделей экономического роста. Обычно рассматривают модели, в которых “заложено” возрастание компонент решения $(K(t),\ C(t))$ в самом начале процесса, и выясняют, каких значений могут достичь, возрастая, эти функции, и сколь долго будет длиться их возрастание. Из (10), (4) видно, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$\frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{K_0} > x_2, \tag{20}$$

Это условие в дальнейшем предполагается выполненным. Из (10), (4) также видно, что положительность $\dot{K}(0)$ равносильна справедливости неравенства

$$f(K_0) > bC_0 + x_3K_0,$$

а значит заведомо $f(K_0) > bC_0$. Обычно предполагают, что

$$f(K_0) \geqslant \frac{\theta}{\theta-1}bC_0, \tag{21}$$

(В частности, если $\theta = 2$, то $f(K_0) \geqslant 2bC_0$, а если $\theta = 3$, то $f(K_0) \geqslant 1.5bC_0$.)

Множитель $\frac{\theta}{\theta-1}$ (напомним, что у нас $\theta > 1$) появился в (21) не случайно. В случае, когда в (21) достигается равенство, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\theta > 1$, выполняется условие* (20) *и равенство*

$$f(K_0) = \frac{\theta}{\theta-1}bC_0. \tag{22}$$

Тогда решение $(K(t),\ C(t))$ задачи Коши (10), (4) *существует на всём луче $[0,\ +\infty)$, обе компоненты его возрастают и стремятся к следующим пределам:*

$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{\theta-1}{b}\left(\frac{a}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{x_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{23}$$

На луче $0 \leqslant t \leqslant +\infty$ справедливы тождества

$$C(t) = \frac{\theta-1}{b\theta}f(K(t)), \qquad \int\limits_{K_0}^{K(t)} \frac{du}{\theta^{-1}f(u) - (\frac{x_2}{\alpha})u} = t. \tag{24}$$

Теорема 2 была доказана в работе авторов [11].

Замечание 2. *Теорема 2 означает, что на фазовой плоскости (см. рис. 1) мы попадаем на сепаратрису — единственную интегральную кривую, обладающую свойством бесконечного монотонного возрастания сразу обеих функций $C(t)$ и $K(t)$ – компонент решения задачи Коши* (10), (4). *Таким образом мы попадаем в идеальную экономическую ситуацию, когда с ростом времени у нас растёт как потребление, так и капитал. Причём этот процесс продолжается до бесконечности и в итоге обе функциии стремятся к конечным значениям* (23) *с ростом времени до бесконечности.*

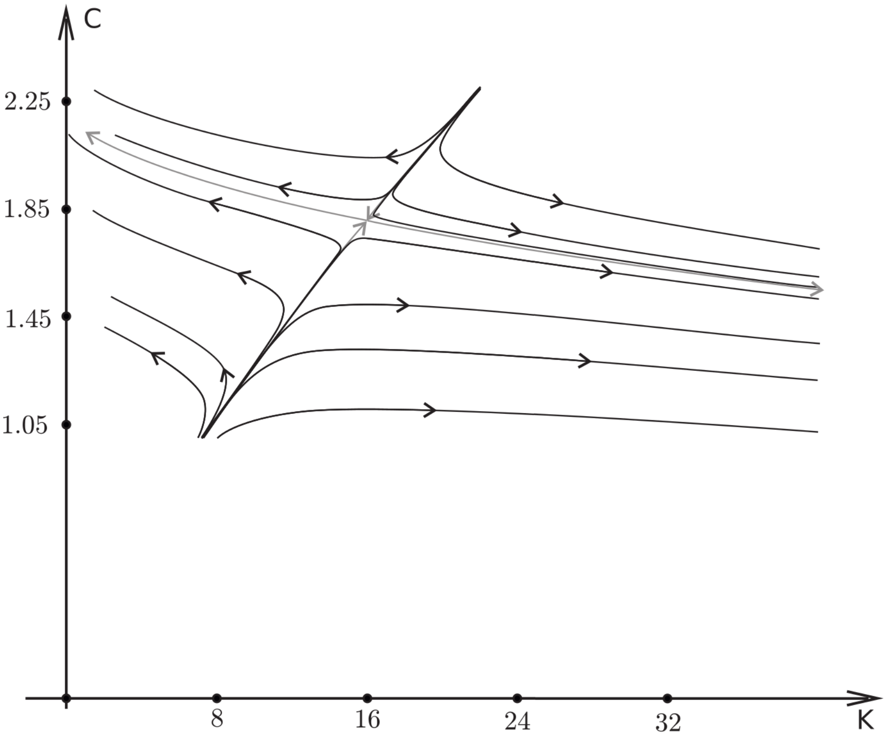

Рис. 1: Фазовый портрет. Построен для так называемых «эталонных значений»: $\alpha = 3/4$, $\theta = 3$, $n = 0.01$, $\delta = 0.05$, $x = 0.02$, $x_1 = 0.08$, $x_2 = 13/300$, $a = 26/75$.

Завершая параграф, выясним, во сколько раз увеличиваются значения $K(t)$ и $C(t)$ по сравнению с начальными значениями этих функций по завершении экономической деятельности (то есть при больших временах) при наличии специального соотношения (22) между K_0 и C_0 (случай, когда мы находимся на сепаратрисе). Ответ мы выразим через постоянную H, которую определим следующим образом

$$H = \frac{\alpha}{\theta}\frac{f(K_0)}{x_2 K_0}.$$

Напомним, что положительность $\dot{C}(0)$ равносильна неравенству $H > 1$.

Выше мы доказали, что предел при $t \longrightarrow +\infty$ функции $K(t)$ равен

$$K_+ = \left(\frac{a\alpha}{x_2\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha a K_0^\alpha}{\theta x_2 K_0^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha f(K_0)}{\theta x_2 K_0} K_0^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0. \tag{25}$$

Отношение предела $C_+ = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} C(t)$ к C_0 проще всего выразить, воспользовавшись не равенством (23), а только что выведенным равенством (25), затем первым тождеством (24) и равенством (22), согласно которому

$$\begin{gathered} C_+ = \frac{\theta-1}{b\theta} f(K_+) = \frac{\theta-1}{b\theta} a(H^{\frac{1}{1-\alpha}} K_0)^\alpha = \frac{\theta-1}{b\theta} a K_0^\alpha H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ \frac{\theta-1}{b\theta} f(K_0) H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = C_0 H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \end{gathered} \tag{26}$$

Отсюда заключаем, что первоначальное значение $C(t)$ умножается в пределе на $H^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, а первоначальное значение $K(t)$ умножается на $H^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

4. Заключение

Обсудим содержание и итоги проведенного исследования. Вопрос о монотонности компонент решения задачи Коши для системы уравнений (2) является актуальным и обсуждается во многих работах. Однако, нам не известны какие-либо результаты теоретического характера на эту тему: в основном, в упомянутых статьях анализируется поведение приближённых решений системы, найденных численными методами для различных значений экономических параметров.

Основная трудность в этой тематике состоит в том, что компоненты решения системы дифференциальных уравнений (2), судя по всему, в общем случае не могут быть записаны в удобной для изучения их поведения аналитической форме. Тем не менее, мы обнаружили, что если в системе уравнений (2) постоянную x_1 заменить на $\frac{x_2}{\alpha}$, то полученная система допускает решение в квадратурах, но не только она! В [3] мы выяснили, что после такой замены константы x_1 решение в квадратурах допускает целый класс систем, в которых вычитаемое C в первом уравнении заменено на bC, где b – произвольная положительная постоянная. Это обстоятельство даёт возможность заменить первое уравнение системы (2) первым уравнением решаемой в квадратурах системы (10) (вторые уравнения систем (2) и (10) при этом совпадают), выбрав величину b по формуле (19), чтобы обеспечить равенство значений правых частей этих уравнений в начальный момент времени. Последнее должно повлечь за собой малое отличие решений задач Коши для систем (2) и (10) с одинаковыми условиями (4). Теоретическая оценка уклонения решения задачи Коши (2), (4) от решения задачи Коши (10), (4) нами была недавно получена, и соотвествующий результат готовится к публикации. Проведенные нами численные эксперименты показывают, что при наиболее востребованных в приложениях значениях экономических параметров α, θ, x_1, x_2 и соотношениях между $f(K_0)$ и C_0 относительное отличие решений упомянутых задач Коши на довольно больших промежутках времени лежит в пределах $1\% - 2\%$. Эта погрешность, как часто бывает в математическом моделировании, сопоставима с погрешностью, даваемой самой моделью в описании реально происходящего процесса.

В этой работе мы продемонстрировали эффективность перехода от системы (2) к близкой ей системе (10) в вопросе изучения монотонности решений задачи Коши. Пока мы рассмотрели случай $\theta > 1$. В этом случае нами обнаружено “критическое соотношение” (22) для начальных условий (4), при выполнении которого обе компоненты решения задачи Коши (10), (4) возрастают на всей положительной полуоси (естественно, при выполнении условия (20)). Кроме того, $K(t)$ и $C(t)$ в случае равенства (22) ограничены; их пределы на бесконечности нами найдены.

Таким образом, при произвольном значении параметра $\theta > 1$, мы нашли соотношение между $f(K_0)$ и C_0, выполнение которого влечёт за собой возрастание обеих компонент решения задачи Коши (10), (4). Подчеркнём, что сформулированные выше результаты получены благодаря найденному в [3] интегральному тождеству, в которое входит функция $C(t)$.

В дальнейшем мы планируем продолжить исследование монотонности компонент решения задачи Коши (10), (4), в частности, изучить поведение компонент $C(t)$, $K(t)$ не только в случае $f(K_0) > \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0, но и $f(K_0) < \theta(\theta-1)^{-1}$ в C_0. Заслуживает внимания также задача нахождения или оценки максимальных значений (или точных верхних граней) $K(t)$ и $C(t)$ на положительной полуоси. Пока это сделано только при выполнении равенства (22).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Метод приближённого решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея — Касса — Купманса, основанный на решении в квадратурах одного подкласса сходных систем // Чебышевский сборник. 2022;23(4):115-125. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея — Касса — Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея — Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея — Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

7. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея — Касса — Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Том 20(4). С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

8. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник. 2022. Том 23(1). С. 118-129. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-118-129.

9. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности. Чебышевский сборник. 2021. Том 22(2). С.121-134. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

10. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения. Чебышевский сборник. 2021. Том 22(2). С. 501-509. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

11. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста. // Чебышевский сборник. 2023. Том 24(2). С. 256-265. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

12. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey — Cass — Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.

13. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

14. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

15. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2. 2010.

16. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

17. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

18. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

19. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

20. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey — Cass — Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

21. Эглит Я.Я., Эглите К.Я., Дудин В.С., Юрченко Е.А. Функция потребления и оценивание её параметров по эксперементальным данным // Транспортное дело России. 2022. No. 2. С. 7-9. DOI: 10.52375/20728689_2022_2_7.

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth”, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory”, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2022, “The method of approximate solution of a system of differential equations from the Ramsey — Kass — Koopmans model, based on the solution in quadratures of one subclass of similar systems”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol.23(4), September. pp. 115-125. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-115-125

4. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey — Kass — Koopmans problem with logarithmic utility function”, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey — Kass — Koopmans problem for consumer choice”, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

6. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey — Kass — Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

7. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey — Kass — Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

8. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2022, "The consumption function in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 23(1), September, pp. 118-129. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

9. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2021, "Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey — Kass — Koopmans problem tending to infinity of the power utility function", *Chebyshevskii Sbornik.* 2021;22(2):121-134. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

10. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. "Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function", *Chebyshevskii Sbornik.* 2021;22(2):501-509. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

11. Kozko, A.I., Luzhina, L.M., Popov, A.Yu., Chirskii, V.G. 2023, "About the ideal economic situation - the growth of capital and the function of consumption in some models of economic growth", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 24(2), pp. 256-265. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-2-256-265

12. Rahul, Giri. 2018, "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey — Cass — Koopmans Model", *http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

13. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

14. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

15. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, "When Economic Growth is Less than Exponential", *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.

16. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

17. Romer, D. 2006, "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.

18. Robert J., Barro. 1999, "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

19. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

20. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey — Cass — Koopmans Model”, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf.

21. Eglit, Y., Eglite, K., Dudin, V., Yurchenko, E. 2022, “Consumption function and estimation of its parameters from experimental data”, *Transport business in Russia.* vol. 2, pp. 7-9.

Получено: 06.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024