ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.518.83 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-177-186

Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом

А. И. Козко

Козко Артём Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Аннотация

В теории приближений хорошо известны задачи о нахождении оценки наилучшего приближения через структурные свойства самой приближаемой функции. Работа посвящена таким задачам в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительными весами.

Ключевые слова: несимметричная норма, знакочувствительный вес, теоремы Джексона–Стечкина, модуль непрерывности, модуль гладкости, наилучшее приближение.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
Козко, А. И. Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 177–186.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.518.83 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-177-186

Estimates of approximations of functions by trigonometric polynomials in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight

A. I. Kozko

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow center of fundamental and applied mathematics (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Abstract

In approximation theory, the problems of finding an estimate of the best approximation through the structural properties of the approximated function are well known. The work is devoted to such problems in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weights.

Keywords: asymmetric norm, sign-sensitive weight, Jackson—Stechkin theorems, modulus of continuity, modulus of smoothness, best approximation.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Kozko, A. I. 2024, "Estimates of approximations of functions by trigonometric polynomials in spaces with an asymmetric norm and sign-sensitive weight" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 177–186.

1. Введение и основной результат

Работа посвящена вопросам наилучшего приближения тригонометрическими полиномами 2π-периодических действительнозначных функций в пространствах с несимметричной нормой. Напомним классические результаты С.Б.Стечкина [1], [2] и М.Ф. Тимана [3] об оценке наилучших приближений функций в «стандартных» пространствах C и L_p через значения модуля гладкости произвольного порядка.

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, реализованный как отрезок $[-\pi;\pi]$ с отождествлёнными точками $-\pi$ и π. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < +\infty$ обозначим пространство действительнозначных на $\mathbb{T}$ функций, суммируемых в p-ой степени, с нормой

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = +\infty$ предполагается, что $f \in C(\mathbb{T})$ и $\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$.

Обозначим

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x+kt) \tag{1}$$

разность порядка $r \in \mathbb{N}$ функции f в точке x с шагом t и положим

$$\omega_r(f;h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^r f\|_p. \tag{2}$$

В [2] была приведена следующая конструкция оценки сверху приближения функций тригонометрическими полиномами через значения модуля непрерывности произвольного порядка. Приближающие полиномы получались в виде линейной комбинации свёрток функции с неотрицательными чётными полиномами по системе косинусов.

Пусть заданы натуральное число r и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = +\infty$, $\{a_{k,n} |\ k,n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$ — множество действительных чисел, определяющие ядра

$$K_1(t) \equiv 1, \quad K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n} \cos(kt),$$

обладающие двумя свойствами:

- $K_n(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [-\pi;\pi]$,

- $C_m = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{2(\lambda_n)^m}{\pi}\int_0^\pi t^m K_n(t)\,dt\right) < +\infty$, $1 \leqslant m \leqslant r$.

Заметим, что определённая выше константа C_m при $m = 0$ равна 1. Тогда для p-нормы (при любом $p \in [1; +\infty]$ и $n \in \mathbb{N}$) разность между функцией f и тригонометрическим полиномом

$$T_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\binom{r}{m}f(x+mt)\right)K_n(t)\,dt$$

(было доказано С.Б. Стечкиным и М.Ф. Тиманом), что $T_n(f;x)$ — тригонометрический полином степени $\leqslant n-1$ и справедлива оценка

$$\|f - T_n(f)\|_p \leqslant C\omega_r\left(f;\frac{1}{\lambda_n}\right)_p, \tag{3}$$

где

$$C = \sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}C_m. \tag{4}$$

Замечание 1. В качестве ${\lambda_n}^{-1}$ обычно берут $\frac{\tau}{n}$ или $\frac{\tau}{n+\gamma}$, $\tau > 0$, $\gamma > 0$. В [2] рассмотрено ${\lambda_n}^{-1} = \frac{1}{n}$, но в ряде других работ изучались другие методы приближения, где аргументы модуля непрерывности брались в виде $\tau/(n+\gamma)$. Например, в [4] брались ${\lambda_n}^{-1} = \frac{2\pi}{3(n+1/2)}$. Особый интерес изучения различных λ_n вызван в связи с нахождением так называемой точки Черныха, начиная с которой наилучшая константа в неравенстве (3) выходит на глобальный минимум см. [5]. Поясним на примере: для наилучшей константы $C = C(\lambda_n, p, r)$ в неравенстве (3) для $p = 2$ и $r = 1$ см. [6], [7] справедливо $C(\lambda_n, 2, 1) = 1/\sqrt{2}$, $0 < \lambda_n \leqslant n/\pi$ и $C(\lambda_n, 2, 1) > 1/\sqrt{2}$, $\lambda_n > n/\pi$, т.е. для $p = 2$ и $r = 1$ точка Черныха равна $\lambda_n = n/\pi$. Задача о нахождении точки Черныха сложная, но тем не менее такого сорта результаты все же были получены при некоторых значениях параметров (найденные λ_n зависит от r, p, n). В конце работы процитируем ещё несколько результатов.

В данной работе рассматриваются более общие разности, чем (1) и достаточно широкий класс несимметричных норм. В соответствии с этим определяются модули непрерывности функций в несимметричных пространствах. Ставится вопрос: какова оценка сверху нормы разности $f - T_n(f)$ в этих пространствах через модули непрерывности порядка r. Насколько она хуже оценки (3)? Доказано, что оценка (3) в изучаемом общем случае заменяется на следующую:

$$\|f - T_n(f)\| \leqslant A\cdot C\cdot\Omega_{a,r}\left(f;\frac{1}{\lambda_n}\right)_{\|\cdot\|}. \tag{5}$$

В (5) постоянная та же, что и в (4), $\|\cdot\|$ - произвольная норма рассматриваемого класса, а для постоянной $A > 1$, определяемой рассматриваемой несимметричной нормой с ограниченными знакочувствительными весами, получено явное выражение. В следующем параграфе будут изложены необходимые сведения из теории несимметричных норм со знакочувствительными весами и определена величина A, а также $\Omega_{a,r}$.

Определение 1. *Для $r \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $h \in \mathbb{R}$ определим обобщённый разностный оператор порядка r:*

$$\Delta_h^{a,r}(f,x) = \Delta_h\Delta_{ah}\dots\Delta_{a^{r-1}h}(f,x), \tag{6}$$

где $\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h)$.

Заметим, что "классический" разностный оператор Ньютона–Грегори

$$\Delta_h^{1,r}f(\cdot) = \Delta_h^r f(\cdot) = \left(\Delta_h\right)^r f(\cdot) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k C_r^k f(\cdot + kh)$$

и разность Туэ–Морса

$$\Delta_h^{2,r}(f,x) = \Delta_h \Delta_{2h} \dots \Delta_{2^{r-1}h}(f,x) \tag{7}$$

являются частными случаями обобщённого разностного оператора при $a = 1$ и $a = 2$ соответсвенно. Основные свойства обобщённого разностного оператора порядка r можно найти в [8], [9]. Существенное отличие разности Туэ–Морса от разностного оператора Ньютона–Грегори состоит в том, что все константы перед функцией $f(\cdot + kh)$ по модулю равны единице. Т.е., например, для $r = 2$ разность Туэ–Морса принимает вид:

$$\Delta_h^{2,2}(f,x) = \Delta_h \Delta_{2h}(f,x) = f(x) - f(x+h) - f(x+2h) + f(x+3h).$$

2. Несимметричные нормы и основной результат

Определение 2. *Обозначим, через Ψ класс норм на плоскости, для которых выполнены следующие пять свойств. Таким образом $\psi \in \Psi$ означает*

i) $\psi(\mathbf{w}) \geqslant 0,$ *для любого* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2,$ *причём* $\psi(\mathbf{w}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{w}w = (0;0)$ *для* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$;

ii) $\psi(\alpha\mathbf{w}) = |\alpha|\psi(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2, \ \alpha \in \mathbb{R};$

iii) $\psi(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \psi(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \leqslant \psi(\mathbf{w}_1) + \psi(\mathbf{w}_2) = \psi(u_1, v_1) + \psi(u_2, v_2), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^2.$

Будем говорить, что норма ψ симметричная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$iv) \ \psi(u,v) = \psi(v,u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что норма ψ монотонная, если выполнены i)-iii) и свойство

$$v) \ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}: \ |u_1| \leq |u_2|, \ |v_1| \leq |v_2| \Longrightarrow \psi(u_1, v_1) \leqslant \psi(u_2, v_2).$$

Приведём примеры наиболее распространённых монотонных, симметричных норм на плоскости: $\psi(u,v) = |u| + |v|$; $\psi(u,v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$ (Евклидова норма); $\psi(u,v) = \max\{|u|, |v|\}$; $\psi(u,v) = (|u|^p + |v|^p)^{1/p}$, $p \in [1; +\infty)$; $\psi(u,v) = |u| + |v| + |u - v|$.

Определение 3. *Будем рассматривать несимметричную норму $\psi_{\varrho,\mathbf{p}}$ и будем писать $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$, если несимметричная норма порождается функцией $\psi \in \Psi$, обладающей свойствами i)-v), парой $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ элементов расширенной числовой прямой $(1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant +\infty)$ и знакочувствительным весом $\varrho = (\varrho_+(x), \varrho_-(x))$ – парой произвольных неотрицательных измеримых функций ϱ_+ и ϱ_-, которые могут, вообще говоря, принимать и бесконечные значения. Эта "норма" задается формулой*

$$\psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f) = \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f^+, f^-) = \psi\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varrho_+(x)(f^+(x))^{p_1}\,dx\right)^{\frac{1}{p_1}}, \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varrho_-(x)(f^-(x))^{p_2}\,dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\right) =$$
$$= \psi\left(\|f^+(\cdot)\|_{\varrho_+,p_1}, \|f^-(\cdot)\|_{\varrho_-,p_2}\right). \tag{8}$$

Различным задачам теории приближения в несимметричных пространствах посвящено много работ см. [10]–[14] и список цитируемой литературы там. Но, здесь мы ограничемся лишь определением.

Модуль гладкости в случае несимметричной нормы $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$ определим в виде:

$$\Omega_{a,r}(f,\delta)_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}} = \sup_{|h| \leqslant \delta} \psi_{\varrho,\mathbf{p}}\left(\Delta_h^{a,r}(f,\cdot)\right).$$

Поскольку все нормы на плоскости эквиваленты между собой, то для нормы $\psi \in \Psi$ и нормы $|u| + |v| \in \Psi$ существуют такие положительные константы C_ψ, C_ψ^* $(0 < C_\psi < C_\psi^* < +\infty)$, что

$$C_\psi \cdot (|u| + |v|) \leqslant \psi(u, v) \leqslant C_\psi^* \cdot (|u| + |v|)$$

для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Например, эти константы можно определить следующим образом:

$$C_\psi = \inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{\psi(u, v)}{|u| + |v|} = \inf_{(u^*,v^*)\in S^2} \frac{\psi(u^*, v^*)}{|u^*| + |v^*|} > 0, \tag{9}$$

и

$$C_\psi^* = \sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} \frac{\psi(u, v)}{|u| + |v|} = \sup_{(u^*,v^*)\in S^2} \frac{\psi(u^*, v^*)}{|u^*| + |v^*|} < +\infty,$$

здесь S^2 — сфера на плоскости.

Если предположить, что знакочувствительные веса почти всюду ограничены сверху и снизу положительными константами, то оказывается, что всё-таки можно получить прямой аналог теоремы Джексона-Стечкина об оценке наилучшего приближения через соответствующий модуль гладкости в несимметричном пространстве со знакочувствительными весами. Сформулируем результат.

Теорема 1. *Пусть* $n, a, r \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— возрастающая последовательность положительных чисел,* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = +\infty$ *и задана несимметричная норма* $\psi_{\varrho,\mathbf{p}} \in \Psi_{\varrho,\mathbf{p}}$, p_1, $p_2 \in [1; +\infty]$ *такая, что для знакочувствительных весов почти всюду выполняются неравенства* $0 < \alpha \leqslant \varrho_\pm(x) \leqslant \beta < +\infty$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}$, p_1, $p_2 \in [1; +\infty]$ *справедливо*

$$E_n(f)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot C \cdot \frac{C_\psi^*}{C_\psi} \cdot \Omega_{a,r}\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}},$$

где положительные константы C, C_ψ, C_ψ^* *определены выше см.* (4), (9).

Доказательство. Справедливо тождество

$$\Delta_{nh}^{a,r}(f, x) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta_h^{a,r}(f, x + k_1 h + a k_2 h + \cdots + a^{r-1} k_r h),$$

которое для $r = 1$ очевидно, а для $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ доказывается индукцией по r с применением равенства $\Delta_h^{a,r}(f, x) = \Delta_h^{a,r-1}(f, x) - \Delta_h^{a,r-1}(f, x + a^{r-1}h)$. Данное тождество вместе с неравенством $\psi_{\varrho,\mathbf{p}}(F + G) \leqslant \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(F) + \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(G)$ позволяет получить:

$$\begin{aligned}
&\psi_{\varrho(\cdot),\mathbf{p}}(\Delta_{nh}^{a,r}(f, x)) \leqslant \beta\psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_{nh}^{a,r}(f, x)) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f, x + k_1 h + a k_2 h + \cdots + a^{r-1} k_r h)) \leqslant \\
&\qquad\quad \leqslant \beta \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{1,\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f, x)) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \psi_{\varrho(\cdot),\mathbf{p}}(\Delta_h^{a,r}(f, x)).
\end{aligned}$$

Здесь под обозначением $\psi_{1,\mathbf{p}}$ понимается, что весовая функция отсутствует, т.е. $\varrho_+ = \varrho_- \equiv 1$. Таким образом, для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $p \in (0; +\infty]$ выполнено неравенство

$$\Omega_{a,r}(f, n\delta)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \cdot n^r \Omega_{a,r}(f, \delta)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}$$

при любых $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geqslant 0$. Из последнего неравенства и оценки $t \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\left([\lambda_n t]+1\right)$, получаем

$$\Omega_{a,r}(f,t)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot(\lambda_n t+1)^r\Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}. \tag{10}$$

Из неравенства на положительную часть

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x,t)\,dt\right)^+ = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^+(x,t)-f^-(x,t)\,dt\right)^+ \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^+(x,t)\,dt$$

и обощенного неравенства Минковского $\|\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot,t)\|_p\,dt$ для L_p – норм $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$, получаем

$$\left\|\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\right)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_p \leqslant \left\|\int_{-\pi}^{\pi} f^+(\cdot,t)\varrho_+(\cdot)\,dt\right\|_p \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\|f^+(\cdot,t)\varrho_+(\cdot)\|_p\,dt.$$

Аналогичное неравенство выполнено и для отрицательной части функции с весом $\varrho_-(x)$. Откуда получаем:

$$\begin{aligned}\psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big) &= \psi\left(\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_{p_1},\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^-\varrho_-(\cdot)\right\|_{p_2}\right)\leqslant\\ &\leqslant C_\psi^*\left(\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^+\varrho_+(\cdot)\right\|_{p_1}+\left\|\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot,t)\,dt\Big)^-\varrho_-(\cdot)\right\|_{p_2}\right)\leqslant\\ &\leqslant C_\psi^*\int_{-\pi}^{\pi}\left(\|f(\cdot,t)^+\|_{\varrho_+,p_1}+\|f(\cdot,t)^-\|_{\varrho_-,p_2}\right)\,dt \leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot,t)\|_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}\,dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Оценим разность функции $f(x)$ с тригонометрическим полиномом $T_n(f)$ в несимметричной норме со знакочувствительным весом.

$$\begin{aligned}E_n(f)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}} &\leqslant \psi_{\varrho,\mathbf{p}}(f(\cdot)-T_n(f,\cdot)) = \psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\int_{\mathbb{T}}(\Delta_t^{a,r}(f,x))\,K_{n,r}(t)\,dt\Big)\leqslant\\ &\leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{\mathbb{T}}\Big(\psi_{\varrho,\mathbf{p}}\Big(\Delta_t^{a,r}(f,\cdot)\Big)\Big)\,K_{n,r}(t)\,dt \leqslant \frac{C_\psi^*}{C_\psi}\int_{\mathbb{T}}\Omega_{a,r}(f,|t|)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}\cdot K_{n,r}(t)\,dt\leqslant\\ &\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{C_\psi^*}{C_\psi}\cdot\Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}\cdot\int_{\mathbb{T}}(\lambda_n t+1)^r K_{n,r}(t)\,dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{C_\psi^*}{C_\psi}\cdot C\cdot\Omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема доказана.

Для $a=1$, $r=1$, $\lambda_n=1/n$ в случае классического разностного оператора 1-го порядка при $p_1=p_2=p$ с нормой на плоскости $\psi(u,v)=(|u|^p+|v|^p)^{1/p}$ в пространствах $L_{\varrho,p}(\mathbb{T})$ в работе [15] была получена следующая оценка $E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})}\leqslant 12\cdot\Omega_{1,1}(f,1/n)_{L_{\psi_{\varrho,\mathbf{p}}}}$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Для получения этого результата авторы использовали ядро Джексона $K_n(t)=t(x)/\gamma_n$, где $t(x)=\left(\frac{\sin((n+1)t/4)}{\sin(t/2)}\right)^4$, $\gamma_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}t(x)\,dx$.

Приведём следствие из теоремы 1 при отсутствии знакочувствиельных весов $\varrho_+(x) = \varrho_-(x)\equiv 1$, при $p_1=p_2=p\in[1;+\infty]$ и для нормы на плоскости $\psi(u,v)=(|u|^p+|v|^p)^{1/p}$. Т.е. для случая, когда обощенный модуль гладкости переходит в модуль гладкости r-го порядка в $L_p(\mathbb{T})$ пространствах. Легко заметить, что в этом случае в неравенстве (11) отношение констант $\frac{C_\psi^*}{C_\psi}$ можно заменить константой 1. Поэтому имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Следствие 1. Для любого $r,n,a\in\mathbb{N}$, $f\in L_p$, $p\in[1;+\infty]$ справедливо*

$$E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})}\leqslant C\omega_{a,r}(f,\lambda_n^{-1})_p,\quad 1\leqslant p\leqslant+\infty. \tag{13}$$

с положительной константой C, определённой в (4).

Условие $K_n(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [-\pi;\pi]$ было принципиально важно для получения результата теоремы для пространств с несимметричными нормами. Для обычных норм данное условие неотрицательности ядра $K_n(t)$ необязательно, и поэтому в следствие 1, если доказывать его напрямую (не используя теорему 1), условие не нужно. А следовательно, при получении неравенств вида (13) можно использовать ядра, которые не обладают свойством знакопостоянства.

Для $a = 1$, т.е. для классического модуля непрерывности r-го порядка в обычных $L_p(\mathbb{T})$ пространствах, следствие 1 было получено С.Б. Стечкиным в 1949 г. [1] и опубликовано с полным доказательством в [2] в 1951 г. Он интересовался случаем $p = +\infty$, хотя его методы дают возможность без труда получить это утверждение при любом $p \in [1;+\infty]$. В то же время появились публикации М.Ф. Тимана [3], где такое же утверждение (для классического модуля непрерывности в $L_p(\mathbb{T})$ пространствах) было доказано для $1 < p < +\infty$. С.Б. Стечкин в своей работе для $r \in \mathbb{N}$ использовал ядра вида $K_n(t) = b_p J_n(t)$, где $J_n(t) = \left(\frac{\sin(pt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2k_0}$, где k_0 — целое, не зависит от n, $2k_0 \geqslant r+2$, натуральное p определяется из неравенств $\frac{n}{2k_0} < p \leqslant \frac{n}{2k_0}+1$, а b_p выбирается из условия $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$.

Для $a = 1$ и $r = 1$, в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ следствие 1 см. [16] было получено Д. Джексоном в следущем виде $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 12\omega_{1,1}(f, n^{-1})_\infty$. Константа 12 была получена на ядре Джексона $K_n(t) = t(x)/\gamma_n$, где $t(x)$ и γ_n были определены выше. Более точно Д.Джексон получил $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n+1})_\infty$ для нечетных n и $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant 6\omega_{1,1}(f, \frac{2}{n})_\infty$ для четных n.

Отметим ещё несколько случаев оценок вида (13), которые были получены другими методами, отличным от изложенного нами.

Случай $a = 1$ и $r = 1$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 2nk$, $k \in \mathbb{N}$ был изучен в работах Н.П. Корнейчука [17], [18], в которых он доказал, что точная константа $C_{1,k}$ в неравенстве $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_{1,k}\omega_{1,1}(f, \frac{1}{2kn})_\infty$ удовлетворяет $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{k+1}{2} \leqslant C_{1,k} \leqslant \frac{k+1}{2}$. Оценка сверху в данном результате можно получить как при помощи теорем сравнения, так и при помощи приближения вспомогательным классом функций. Оценка снизу получена Н.П. Корнейчуком на специальной последовательности функций.

Случай $a = 1$ и $r = 2$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 4n$ был получен в работе В.В. Жука и В.А. Шалаева (см. [19], гл. 8, §3, теорема 3 и комментарий к гл. 8, §3]). $E_n(f)_{L_\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_1\omega_{1,2}(f, \frac{1}{4n})_\infty$, причём они доказали, что точная константа C_1 удовлетворяет неравенству $1 - 1/2n \leqslant C_1 \leqslant 1$.

Для случая $a \in \mathbb{N}$ нечётно, $a \geqslant 3$ и $p = 2$ оценка на наилучшую константу в неравенстве (13) $C = C(a, r, 2, \lambda_n)$ для $\lambda_n = \frac{n}{\gamma\pi}$, $\gamma \geqslant 1$ получена в работе [9]:

$$\frac{1}{\sqrt{2^r}} \leqslant C(a, r, 2, \lambda_n) \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{[\gamma]}}\,\frac{1}{\sqrt{2^r}}.$$

Утверждение следствия 1 для произвольного $a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, по-видимому, публикуется впервые.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Доклады АН СССР. 1949. Том 71. № 2. С. 135–137.

2. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Известия АН СССР. Сер. матем. 1951. Том 15. С. 219–242.

3. Тиман М.Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ // Матем. сб. 1958. Том 46(88). №1. С. 125–132.

4. Гаврилюк В. Т., Стечкин С.Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Исследования по теории функций многих действительных переменных и приближению функций, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его восьмидесятилетию // Тр. МИАН СССР. 1985. Том. 172. С. 107–127; Proc. Steklov Inst. Math. 1987. V. 172. P. 119–142.

5. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах// Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Том. 62. №6. 27–52.

6. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. 1967. Том. 88. С. 71–74.

7. Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2-approxiшatioп of periodic functioп by trigonometric polynoшials // Approximatioп aпd functioп spaces. Proc. Iпter. Coпf. (Gdaпsk, 1979). Aшsterdaш: North-Hollaпd. 1981. P. 95–43.

8. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона с обощённым модулем непрерывности // Математические заметки. 2003. Том. 73. №5. С. 783–788.

9. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сб. 2004. Том. 195 №8. С. 3—46.

10. Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Том. 62. №6. С. 125–142.

11. Козко А.И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Матем. сб. 1998. Том. 189. №9. С. 85–106.

12. Козко А.И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Матем. заметки. 1997. Том. 61. № 5. С. 687–699.

13. Козко А.И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом // Современная математика и ее приложения. 2005. Том. 24. С. 135–147.

14. Козко А.И. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Том. 66. №1. С. 103–132.

15. Рамазанов А.-Р.К., Ибрагимова Б.М. Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона // Вестник Дагестанского государственного университета. 2010. Вып. 6. 51–54.

16. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. // Из-во Тех-Теорит. Литературы М. 1949. 688 с.

17. Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Том. 145. № 3. С. 514–515.

18. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // М.: Наука. 1987. 424.

19. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. //Л.: ЛГУ. 1982. 366 с.

REFERENCES

1. Stechkin, S. B. 1949, "On the order of best approximation of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* vol. 65 (135), pp. 135–137. (In Russ.)

2. Stechkin, S.B. 1951, "On the order of best approximation of continuous functions", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* vol. 15 (3), pp. 219–242. (In Russ.)

3. Timan M. F. 1958, "Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$", *Mat. Sb. N.S.* vol 46(88), pp. 125–132. (In Russ.)

4. Gavrilyuk V. T. and Stechkin S. B. 1987, "Approximation of Continuous Periodic Functions by Fourier Sums", *Proc. Steklov Inst. Math.* vol 172, pp. 119—142.

5. Babenko A. G. 1998, "An exact Jackson–Stechkin inequality for L^2 -approximation on the interval with the Jacobi weight and on projective spaces", *Izv. Math.* vol. 62:6, pp. 1095—1119.

6. Chernykh N. I. 1967, "Jackson's inequality in L_2", *Trudy Mat. Inst. Steklov [Proc. Steklov Inst. Math.]* vol. 88, pp. 71–74.

7. Arestov V. V., Chernykh N. I. 1981, "On the L_2-approxiшatioп of periodic functioп by trigonometric polynoшials", *Approximation and function spaces. Proc. Inter. Conf. (Gdansk, 1979). Aшsterdaш: North-Holland.* pp. 95–43.

8. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. 2003, "On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity", *Math. Notes* Vol. 73 (5-6), pp. 736–741.

9. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. 2004, "On Jackson's inequality for a generalized modulus of continuity in L_2", *Sb. Math.* vol. 195:8, pp. 1073–1115.

10. Kozko A.I. 1998, "Fractional derivatives and inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetric norms", *Izvestiya: Mathematics* vol. 62 (6), pp. 1189–1206. DOI: 10.1070/im1998v062n06ABEH000223

11. Kozko A.I. 1998, "Multidimensional inequalities between distinct metrics in spaces with an asymmetric norm", *Sb. Math.* vol. 189:9, pp. 1361–1383.

12. Kozko A.I. 1997, "Analogs of the Jackson–Nikol'skii inequalities for trigonometric polynomials in spaces with asymmetric norms", *Math. Notes* vol. 61 (5), pp. 574—584. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02355078

13. Kozko A.I. 2006, "Completeness of orthogonal systems in asymmetric spaces with sign-sensitive weight", *Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publishers (United States)*, vol. 139 (6), pp. 7151–7164.

14. Kozko A.I. 2002, "On the order of the best approximation in spaces with asymmetric norm and sign-sensitive weight on classes of differentiable functions", *Izv. Math.* vol. 66 (1), pp. 103–132. DOI: https://doi.org/10.4213/im373

15. Ramazanov A.-R.K., Ibragimova B.M. 2010, "An asymmetric integral modulus of continuity and an analogue of Jackson's first theorem", *Bulletin of Dagestan State University.* vol 6, pp. 51–54. (In Russ.)

16. Natanson, I. P. 1964, "Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation. Translated by Alexis N. Obolensky.", *New York: Frederick Ungar Publishing Co.* IX, 232 p.

17. Korneichuk N. P. 1962, "The exact constant in D. Jackson's theorem on best uniform approximation of continuous periodic functions", *Doklady Akademii Nauk SSSR* vol. 145 (3), pp. 514–515.

18. Korneichuk N. P. 1991, "Exact constants in approximation theory", *Approximation theory Publisher Cambridge ; New York : Cambridge University Press.* 452 p.

19. Zhuk V. V. 1982, "Approximation of periodic functions. (Approksimatsiya periodicheskikh funktsij). (Russian)", *Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta.* 368 p.

Получено: 07.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024