

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 514.122.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-158-176

Задача Аполлония для двух объектов и её исследование

А. С. Кашина, Л. М. Цыбуля

Кашина Анна Сергеевна — ГБОУ Школа № 597 «Новое Поколение» (г. Москва).*e-mail: Aniusik01@mail.ru***Цыбуля Лилия Михайловна** — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).*e-mail: liliya-kinder@mail.ru*

Аннотация

Как известно, классическая задача (проблема) Аполлония о построении с помощью циркуля и линейки окружности, касающейся трёх данных, обладает конечным числом решений, либо не имеет решений, если заданные окружности концентрические. При этом допускаются так называемые *вырожденные* случаи: любая из данных окружностей может являться точкой, то есть окружностью нулевого радиуса, или прямой, то есть окружностью бесконечного радиуса.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи Аполлония не для трёх окружностей, а для двух, включая вырожденные случаи. Представлена классификация всех случаев рассматриваемой задачи в зависимости от вида заданных объектов (точки, прямой или окружности) и от их взаимного расположения на вещественной координатной плоскости. В каждом из приведённых случаев были не только найдены все решения, но и указаны некоторые их взаимосвязи.

Подходы к решению полученных в классификации случаев основаны на понятии геометрического места точек, равноудалённых от заданных объектов задачи, и на условиях равенств расстояний от предполагаемого центра искомой касательной окружности до каждого из заданных объектов.

Отметим, что в отличие от классической задачи Аполлония решение всегда существует, более того, число решений бесконечно.

Ключевые слова: задача Аполлония, линия второго порядка.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Кашина, А. С., Цыбуля, Л. М. Задача Аполлония для двух объектов и её исследование // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 158–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 514.122.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-158-176

The Apollonius problem for two objects and study of it

A. S. Kashina, L. M. Tsybulya

Kashina Anna Sergeevna — SBEI School № 597 “New Generation” (Moscow).*e-mail: Aniusik01@mail.ru***Tsybulya Liliya Mikhailovna** — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).*e-mail: liliya-kinder@mail.ru*

Abstract

It is well known that the classical Apollonius's problem to construct a circle tangent to three given circles using a compass and straightedge has finite number of solutions or has no solutions if the given circles are concentric. The so called *degenerate* cases are also included in the consideration: any of the circles may be a point (a zero-radius circle) or a straight line (a circle of infinite radius).

In this paper we consider the Apollonius problem not for three circles but for only two, with the degenerate cases also considered. We classify all cases of the problem for all possible objects (points, lines or circles) and for all cases of their mutual arrangements on the real coordinate plane. For every case not only all solutions are provided but also some of their interdependencies are shown.

The approaches for solutions of the classified cases are based on the notion of locus of the points being equidistant from the given objects and on the equality of distances from the center of the sought tangent circle to each of the given objects.

Unlike the classical Apollonius's problem the solution always exists, moreover, the number of solutions is infinite.

Keywords: Apollonius's problem, second-order curve

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Kashina, A. S., Tsybulya, L. M. 2024, “Apollonius problem for two objects and its research”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 158–176.

1. Введение

Одним из главных вопросов задач на построение является вопрос о возможности построения циркулем и линейкой. С точки зрения алгебры этот вопрос звучит следующим образом, см., например, в [1], [2]: можно ли найти решение алгебраического уравнения, используя только рациональные алгебраические операции и операции извлечения корня? Связь между геометрическими построениями и алгебраическими операциями определяется следующим критерием.

ТЕОРЕМА 1 (критерий построения точки, [3]). *На числовой прямой можно построить циркулем и линейкой точку, соответствующую действительному числу a , тогда и только тогда, когда это число принадлежит некоторому квадратичному расширению поля рациональных чисел.*

Одной из задач на построение циркулем и линейкой является *проблема (задача) Аполлония*: даны три объекта, каждый из которых может быть точкой, прямой или окружностью; требуется провести окружность, которая проходила бы через каждую из данных точек и касалась бы каждой из данных прямых или окружностей.

Стоит отметить, что задача Аполлония для трёх окружностей (кроме случаев, когда хотя бы одна из окружностей находится внутри другой) и её частные случаи обладают конечным количеством решений, [4]. Алгебраические обоснования данного факта достаточно объёмные, поэтому приведём геометрическое обоснование.

Рассмотрим на примере классической задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных окружностей. Введём следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. При этом касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной, и внешним касанием, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной.*

Из этого определения следует, что существуют три точки, являющиеся точками касания искомой окружности с каждой из данных. Эти три точки не лежат на одной прямой, следовательно, задают плоскость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [5], [6]). *Множество всех точек пространства, равноудалённых от трёх данных точек, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная плоскости этих точек и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в данных точках.*

Рассматривая проекцию перпендикулярной прямой из предложения 1 на плоскость, определённую тремя точками касания, получаем одну единственную точку. Эта точка будет являться центром окружности, описанной около треугольника, определённого точками касания. Следовательно, эта окружность – искомая, и она единственная. Учитывая возможность внутреннего или внешнего касания для каждой из трёх окружностей, получим всего 8 решений классической задачи, [7]. Аналогичным образом можно доказать конечность числа решений задачи Аполлония и для её частных случаев. Кроме того, в современной математике были рассмотрены типы задачи Аполлония, число заданных объектов которых больше трёх, и также доказана конечность числа решений этих задач, [8]. Намного ранее же в одной из статей [9] были сформулированы и доказаны теоремы и их следствия для следующего обобщения задачи Аполлония: построить окружность, пересекающую три данные окружности под углами A , A' и A'' соответственно.

В данной работе будут рассмотрены задачи Аполлония для двух объектов, каждый из которых является точкой, прямой или окружностью. Также для каждого из частных случаев будут даны ответы на вопросы: возможно ли построить окружность, касающуюся двух данных объектов циркулем и линейкой, и является ли количество решений этих задач конечным?

2. Задача Аполлония для двух объектов

В зависимости от количества заданных объектов и от их взаимного расположения на вещественной координатной плоскости можно разделить исследуемую задачу на следующие группы.

1. Две точки.
2. Две прямые:

- параллельны;
 - пересекаются.
3. Прямая и точка:
- точка лежит на прямой;
 - точка не лежит на прямой.
4. Точка и окружность:
- точка лежит на окружности;
 - точка лежит внутри окружности;
 - точка лежит вне окружности.
5. Прямая и окружность:
- окружность и прямая не имеют общих точек;
 - прямая касается окружности;
 - прямая пересекает окружность.
6. Две окружности:
- окружности не имеют общих точек и ни одна из них не находится внутри другой;
 - окружности касаются внешним образом;
 - окружности пересекаются;
 - окружности касаются внутренним образом;
 - одна окружность находится внутри другой.

Введём следующие обозначения на действительной координатной плоскости:

- 1) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ – данные точки;
- 2) $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $m: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения заданных прямых l и m ;
- 3) ω_1 , ω_2 – данные окружности с центрами $M(m_1, m_2)$, $K(k_1, k_2)$ и радиусами r_1 , r_2 ;
- 4) $O(x_0, y_0)$ – искомые центры касательных окружностей;
- 5) r_0 – радиусы искомых касательных окружностей.

Также отметим, что уравнение вида $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$, где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$, есть общее уравнение линии второго порядка, [10].

Далее рассмотрим каждую из групп приведённой классификации и выведем формулы для центров и радиусов множества касательных окружностей.

2.1. Задача о двух прямых

В задаче для двух прямых на вещественной координатной плоскости возможны два случая их взаимного расположения: данные прямые параллельны или пересекаются. Для этих случаев, как хорошо известно из [11] и [5], справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть даны две параллельные прямые на координатной плоскости Oxy . Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть прямая, параллельная данным и равноудалённая от них. При этом радиус будет постоянен и равен расстоянию от прямой центров до одной из данных прямых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть даны две пересекающиеся прямые на координатной плоскости Oxy . Тогда множество центров семейства окружностей, касающихся данных прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, являющихся биссектрисами углов, образованных данными прямыми, без одной точки – точки пересечения этих биссектрис.

2.2. Задача об окружности и прямой и её следствие

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны окружность и прямая на координатной плоскости Oxy . Тогда
а) если окружность и прямая не имеют общих точек либо имеют ровно две общие точки, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть пара парабол (см. рис. 1) .

б) если прямая касается заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой, есть парабола без точки – её вершины – и прямая, проходящая через центр данной окружности и точку касания окружности и прямой, без двух точек – центра данной окружности и точки касания заданной окружности и данной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_1 – данная окружность с центром $M(m_1, m_2)$ и радиусом r_1 .
 $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ – заданная прямая.

Искомые центры окружностей должны быть равноудалены от данной прямой l и от данной окружности. Тогда должно выполняться равенство:

$$OM \pm r_1 = \rho((x_0, y_0), l). \quad (*)$$

Запишем это равенство через формулы расстояния между точками и расстояния от точки до прямой:

$$\sqrt{(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2} \pm r_1 = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Раскрыв модуль в числителе правой части равенства по определению, получаем:

$$\pm \sqrt{(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2} \mp r_1 = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Перенесём значение радиуса в правую часть равенства и возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x_0 - m_1)^2 + (y_0 - m_2)^2 = \left(\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm r_1 \right)^2. \quad (1)$$

Введем обозначения

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = P, \quad \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = Q, \quad \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = T \quad (2)$$

и заметим, что $P^2 + Q^2 = 1$.

Раскроем квадрат в правой части равенства (1) и сгруппируем слагаемые относительно переменных x_0, y_0 :

$$x_0^2(P^2 - 1) + 2PQx_0y_0 + y_0^2(Q^2 - 1) + 2x_0(m_1 + P(T \pm r_1)) + 2y_0(m_2 + Q(T \pm r_1)) + (T \pm r_1)^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 0. \quad (3)$$

Полученные уравнения (3) задают множество всех центров касательных окружностей и являются общими уравнениями линий второго порядка. Определим вид полученных линий, см. например [12], [13].

$$1. \left| \begin{array}{cc} P^2 - 1 & PQ \\ PQ & Q^2 - 1 \end{array} \right| = P^2 Q^2 - (P^2 + Q^2) + 1 - P^2 Q^2 = 0 \Rightarrow \text{параболический тип линии};$$

2.

$$\begin{cases} (P^2 - 1)x + PQy + (m_1 + P(T \pm r_1)) = 0, \\ PQx + (Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1)) = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения переменную x и подставим полученное выражение в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} (P^2 - 1) \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} + PQy + (m_1 + P(T \pm r_1)) = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \left(\frac{(P^2 - 1)(1 - Q^2)}{PQ} + PQ \right) + \frac{Pm_1 + Qm_2 + (P^2 + Q^2)(T \pm r_1)}{P} = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \frac{Pm_1 + Qm_2 + (T \pm r_1)}{P} = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ}. \end{cases} \quad (**)$$

$Pm_1 + Qm_2 + (T \pm r_1) = 0 \Leftrightarrow Pm_1 + Qm_2 + T = \mp r_1$. Рассмотрим каждый из случаев.

Пусть $Pm_1 + Qm_2 + T = r_1$. Тогда

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \frac{r_1 \pm r_1}{P} = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_1 \pm r_1}{P} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2r_1 = 0, \\ r_1 - r_1 = 0. \end{cases}$$

Второе равенство совокупности всегда верно, значит первое равенство системы (**) обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, система (**) будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров. Первое же равенство совокупности никогда не выполнится, поскольку $r_1 > 0$. Тогда система уравнений (**) не будет иметь решений, а значит линия второго порядка не имеет центров. В этом случае множество центров будет являться параболой.

Перейдем к случаю $Pm_1 + Qm_2 + T = -r_1$. Тогда

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \frac{-r_1 \pm r_1}{P} = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + Q(T \pm r_1))}{-PQ} \end{cases} \Rightarrow \frac{-r_1 \pm r_1}{P} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2r_1 = 0, \\ -r_1 + r_1 = 0. \end{cases}$$

Второе равенство совокупности всегда верно, значит первое равенство системы (**) обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, система (**) будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров. Первое же равенство совокупности никогда не выполнится, поскольку $r_1 > 0$. Тогда система уравнений (**) не будет иметь решений, а значит линия второго порядка не имеет центров. В этом случае множество центров будет являться параболой.

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = m_2$, тогда

$$x = \frac{Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1}{-P} + m_1.$$

Подставим полученные координаты в уравнение (3):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1}{-P} + m_1 \right)^2 (P^2 - 1) + 2PQ \left(\frac{Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1}{-P} + m_1 \right) m_2 + \\ & + m_2^2(Q^2 - 1) + 2 \left(\frac{Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1}{-P} + m_1 \right) (m_1 + P(T \pm r_1)) + \\ & + 2m_2(m_2 + Q(T \pm r_1)) + (T \pm r_1)^2 - (m_1^2 + m_2^2) = 0, \\ & -\frac{1}{P^2} (Pm_1 + Qm_2 + T \pm r_1) = 0. \end{aligned}$$

В силу $Pm_1 + Qm_2 + T = \mp r_1$ полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые.

Поскольку рассмотрены все случаи, то теорема доказана.

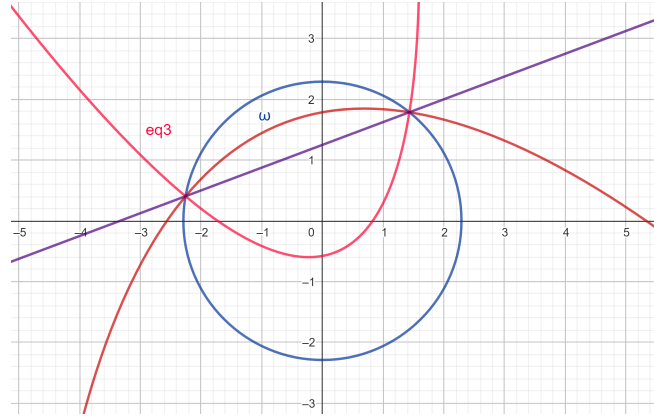


Рис. 1: Случай пересечения прямой и окружности. Искомое множество центров есть пара парабол.

Пусть теперь заданная окружность вырождается в точку, то есть в окружность нулевого радиуса. Тогда справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть даны точка и прямая на координатной плоскости Oxy . Тогда

а) если точка не лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой и проходящих через эту точку, есть парабола, для которой данная точка является фокусом, а данная прямая – директрисой;

б) если точка лежит на заданной прямой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной прямой в этой точке, есть прямая, перпендикулярная данной прямой, проходящая через данную точку и не включающая эту же точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, легко заметить, что все формулы, начиная с (*) по (**), и сопутствующие рассуждения остаются верными для прямой и окружности нулевого радиуса $r_1 = 0$. Запишем соответствующую формуле (**) систему

$$\begin{cases} y \cdot 0 + \frac{Pm_1 + Qm_2 + T}{P} = 0, \\ x = \frac{(Q^2 - 1)y + (m_2 + QT)}{-PQ}. \end{cases}$$

Используя обозначения (2) и формулу расстояния от точки M до прямой l

$$\frac{A_1m_1 + B_1m_2 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$

получаем

$$\frac{Pm_1 + Qm_2 + T}{P} = 0 \Leftrightarrow Pm_1 + Qm_2 + T = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1m_1 + B_1m_2 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = 0 \Leftrightarrow M \in l.$$

Если $M \notin l$, то система уравнений не имеет решений, и полученная линия не имеет центров. Из пунктов 1 – 2 в доказательстве теоремы 2 получаем, что линия, заданная уравнением (3), есть парабола. Если $M \in l$, то система будет иметь бесконечно много решений, то есть получаем прямую центров.

Проверка принадлежности точки прямой центров полученной линии второго порядка осуществляется точно также, как было сделано выше в теореме 2. Следствие доказано.

2.3. Задача о двух окружностях и её следствия

Пусть ω_1, ω_2 – данные окружности с центрами $M(m_1, m_2)$, $K(k_1, k_2)$ и радиусами r_1, r_2 соответственно. Условимся, что радиусы заданных окружностей различны.

Пусть далее $r_1 > r_2$. Искомые центры касательных окружностей должны быть равноудалены от каждой из заданных окружностей. Следовательно, должно выполняться равенство отрезков $OK \pm r_2 = OM \pm r_1$, если искомые окружности касаются данных только внешним или только внутренним образом, и $OK \mp r_2 = OM \pm r_1$, если искомые окружности касаются одной из данных окружностей внешним образом, а второй – внутренним.

Запишем первое равенство через формулу расстояния между точками:

$$\sqrt{(x_0 - k_1)^2 + (y_0 - k_2)^2} \pm r_2 = \sqrt{(m_1 - x_0)^2 + (m_2 - y_0)^2} \pm r_1.$$

Уединим один из радикалов и возведём обе части равенства в квадрат:

$$\begin{aligned} (x_0 - k_1)^2 + (y_0 - k_2)^2 &= (m_1 - x_0)^2 + (m_2 - y_0)^2 \pm \\ &\pm 2(r_1 - r_2)\sqrt{(m_1 - x_0)^2 + (m_2 - y_0)^2} + (r_1 - r_2)^2. \end{aligned}$$

Повторно уединим радикал, возведём в квадрат обе части равенства и сгруппируем слагаемые относительно переменных x_0, y_0 :

$$\begin{aligned} &(4(m_1 - k_1)^2 - 4(r_1 - r_2)^2)x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0y_0 + (4(m_2 - k_2)^2 - \\ &- 4(r_1 - r_2)^2)y_0^2 + (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 - r_2)^2)(m_1 - k_1) + 8(r_1 - r_2)^2m_1)x_0 + \\ &+ (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 - r_2)^2)(m_2 - k_2) + 8(r_1 - r_2)^2m_2)y_0 + \\ &+ (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 - r_2)^2)^2 - 4(r_1 - r_2)^2(m_1^2 + m_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом преобразуем второе равенство:

$$\begin{aligned} &(4(m_1 - k_1)^2 - 4(r_1 + r_2)^2)x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0y_0 + (4(m_2 - k_2)^2 - 4(r_1 + r_2)^2)y_0^2 + \\ &+ (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 + r_2)^2)(m_1 - k_1) + 8(r_1 + r_2)^2m_1)x_0 + \\ &+ (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 + r_2)^2)(m_2 - k_2) + 8(r_1 + r_2)^2m_2)y_0 + (k_1^2 + k_2^2 - \\ &- m_1^2 - m_2^2 - (r_1 + r_2)^2)^2 - 4(r_1 + r_2)^2(m_1^2 + m_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученные уравнения (4) и (5) задают множества всех центров касательных окружностей и являются общими уравнениями линий второго порядка.

Для определения типа полученных линий выпишем соответствующие им выражения вида $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$:

$$\begin{aligned}\Delta_{(4)} &= \begin{vmatrix} 4(m_1 - k_1)^2 - 4(r_1 - r_2)^2 & 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2) \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2) & 4(m_2 - k_2)^2 - 4(r_1 - r_2)^2 \end{vmatrix} = \\ &= 16(r_1 - r_2)^2((r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2)), \\ \Delta_{(5)} &= \begin{vmatrix} 4(m_1 - k_1)^2 - 4(r_1 + r_2)^2 & 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2) \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2) & 4(m_2 - k_2)^2 - 4(r_1 + r_2)^2 \end{vmatrix} = \\ &= 16(r_1 + r_2)^2((r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2)).\end{aligned}$$

Поскольку произведение $16(r_1 \pm r_2)^2 > 0$, то за знак выражений $\Delta_{(4)}$ и $\Delta_{(5)}$ будет отвечать только знак второго множителя:

$$(r_1 \pm r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2). \quad (***)$$

Рассмотрим все возможные ситуации взаимного расположения окружностей на вещественной координатной плоскости.

а) Если окружности не имеют общих точек и ни одна не находится внутри другой, то расстояние между центрами заданных окружностей больше суммы радиусов этих окружностей на некоторое положительное действительное число c , то есть $\rho(M, K) = r_1 + r_2 + c$.

Рассмотрим знаки выражений $\Delta_{(4)}$ и $\Delta_{(5)}$ в зависимости от знака множителя (***):

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - (r_1 + r_2 + c)^2 = (2r_1 + c) \cdot (-2r_2 - c) < 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;
2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2 + c)^2 = (2r_1 + 2r_2 + c) \cdot (-c) < 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} < 0$ – гиперболический тип линии.

б) В случае касания заданных окружностей внешним образом расстояние между их центрами есть сумма радиусов этих окружностей. Отсюда находим:

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 = -4r_1r_2 < 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;
2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} = 0$ – параболический тип линии.

в) Если окружности пересекаются друг с другом, то расстояние между центрами заданных окружностей меньше суммы радиусов данных окружностей на положительное действительное число c , то есть $\rho(M, K) = r_1 + r_2 - c$. Снова получаем:

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - (r_1 + r_2 - c)^2 = (2r_1 - c)(c - 2r_2) < 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} < 0$ – гиперболический тип линии;
2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 + r_2 - c)^2 = (2r_1 + 2r_2 - c) \cdot c > 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} > 0$ – эллиптический тип линии.

г) При касании заданных окружностей внутренним образом расстояние между их центрами есть разность радиусов этих окружностей. В таком случае имеем:

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} = 0$ – параболический тип линии;

2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 > 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} = 0$ – эллиптический тип линии.

д) Наконец рассмотрим случай, когда одна из окружностей находится внутри другой. При этом он распадается на две возможные ситуации: заданные окружности не являются или же являются концентрическими. В первой ситуации расстояние между центрами заданных окружностей меньше разности радиусов этих окружностей на некоторое положительное действительное число c , то есть $\rho(M, K) = r_1 - r_2 - c$. Тогда

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - (r_1 - r_2 - c)^2 = (2r_1 - 2r_2 - c) \cdot c > 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} > 0$ – эллиптический тип линии;
2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2 - c)^2 = (2r_1 - c)(2r_2 + c) > 0 \Rightarrow \Delta_{(5)} > 0$ – эллиптический тип линии.

Во второй ситуации центры концентрических окружностей совпадают, то есть расстояние между их центрами равно нулю. Здесь

1. $(r_1 - r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 - r_2)^2 - 0 > 0 \Rightarrow \Delta_{(4)} > 0$ – эллиптический тип линии;
2. $(r_1 + r_2)^2 - ((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = (r_1 + r_2)^2 - 0 > 0 \Rightarrow \Delta_{(5)}$ – эллиптический тип линии.

Перейдем к изучению центров полученных линий второго порядка, заданных уравнениями (4) и (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Решение системы вида:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$$

есть пара (x, y) , имеющая следующие координаты (см., например, [14]):

$$\begin{cases} x = \frac{a_{22}a_{10} - a_{12}a_{20}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}, \\ y = \frac{a_{11}a_{20} - a_{12}a_{10}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}. \end{cases}$$

В соответствии с замечанием 1 центры линий будут задаваться системой:

$$\begin{cases} x = \frac{(r_1 \pm r_2)^2(m_1 + k_1)((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 \pm r_2)^2)}{2(r_1 \pm r_2)^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 \pm r_2)^2)}, \\ y = \frac{(r_1 \pm r_2)^2(m_2 + k_2)((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 \pm r_2)^2)}{2(r_1 \pm r_2)^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 \pm r_2)^2)}. \end{cases}$$

Соответствующие множители можем сократить, так как $r_1 \neq r_2$. Однако, если заданные окружности касаются внешним образом, то можем сократить только множитель вида $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$, а если данные окружности касаются внутренним образом – только множитель вида $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - (r_1 + r_2)^2$. Тогда во всех случаях, кроме двух ситуаций при касании, решение системы примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 + k_1}{2}, \\ y = \frac{m_2 + k_2}{2}. \end{cases}$$

Получаем координаты точек, являющихся центрами линий второго порядка для гиперболического и эллиптического типа линий. При этом данные точки не принадлежат полученным линиям. Значит, линии этих типов являются гиперболами и эллипсами соответственно.

Рассмотрим отдельно решение системы для линий параболического типа:

$$\begin{cases} 4((m_1 - k_1)^2 - (r_1 \mp r_2)^2)x + 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)y + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - \\ - (r_1 \mp r_2)^2)(m_1 - k_1) + 4(r_1 \mp r_2)^2 m_1 = 0, \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x + 4((m_2 - k_2)^2 - (r_1 \mp r_2)^2)y + 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)y + \\ + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - (r_1 \mp r_2)^2)(m_2 - k_2) + 4(r_1 \mp r_2)^2 m_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x , подставим полученное выражение во второе уравнение системы. Упростив, получим:

$$\begin{cases} x = \frac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(2y - m_2 - k_2)}{4(r_1 \mp r_2)^2 - 4(m_1 - k_1)^2} + \frac{m_1 + k_1}{2}, \\ 16(r_1 \mp r_2)^2((r_1 \mp r_2)^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2)y + \\ + 8(r_1 \mp r_2)^2(m_2 + k_2)((r_1 \mp r_2)^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы тождественно равно нулю, так как для линий параболического типа выражение

$$(r_1 \mp r_2)^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2 \quad (****)$$

равно нулю. Следовательно, имеем линию центров:

$$x = \frac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(2y - m_2 - k_2)}{4(r_1 \mp r_2)^2 - 4(m_1 - k_1)^2} + \frac{m_1 + k_1}{2}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = (m_2 + k_2)/2$, тогда $x = (m_1 + k_1)/2$. Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и упростим его:

$$(r_1 \mp r_2)^2((r_1 \mp r_2)^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2) = 0.$$

Поскольку снова выражение (****) равно нулю, то полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые.

Таким образом была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть на координатной плоскости Oxy даны две окружности. Тогда

а) если они не имеют общих точек, и ни одна из них не находится внутри другой, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара гипербол;

б) если они касаются внешним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания;

в) если они пересекаются, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и эллипс (см. рис. 2);

г) если они касаются внутренним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая, проходящая через центры данных окружностей, без трёх точек – центров данных окружностей и точки их касания;

д) если одна из данных окружностей находится внутри другой (или они являются концентрическими), то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара эллипсов (или пара концентрических окружностей).

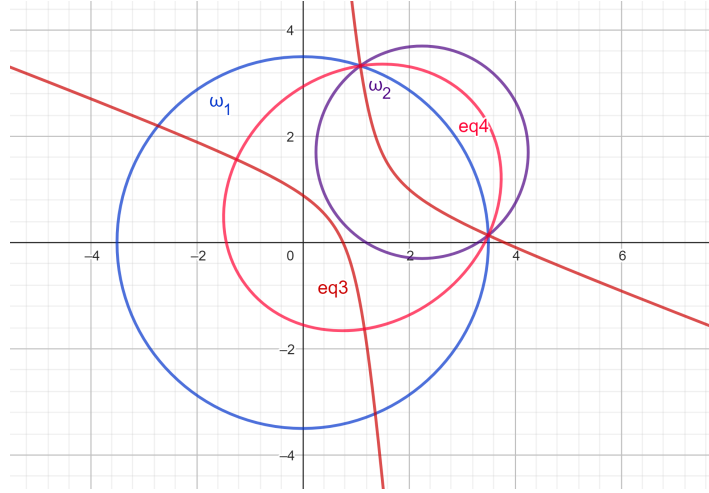


Рис. 2: Случай пересечения двух окружностей различного радиуса. Искомое множество центров есть эллипс и гипербола.

Стоит отметить, что если одна из окружностей вырождается в точку, то задача для двух не взаимодействующих, касающихся или расположенных одна внутри другой окружностей, сводится к задаче для точки, лежащей вне, непосредственно на или внутри окружности, соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть даны точка и окружность на координатной плоскости Oxy , тогда

а) если точка расположена вне заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть гипербола;

б) если точка лежит на заданной окружности, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности в этой точке, есть прямая, соединяющая центр данной окружности и данную точку, без двух точек – центра данной окружности и заданной точки;

в) если точка лежит внутри заданной окружности и не совпадает с её центром, то множество центров семейства окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через эту точку, есть эллипс. Причём центр данной окружности и данная точка будут являться фокусами полученного эллипса. Если точка совпадает с центром данной окружности, то множество центров семейства окружностей есть окружность с центром в этой точке и радиусом, равным половине радиуса данной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при вырождении одной из окружностей в точку, уравнения (4) и (5) совпадут и примут вид:

$$\begin{aligned}
 & (4(m_1 - k_1)^2 - 4r_2^2)x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0y_0 + (4(m_2 - k_2)^2 - 4r_2^2)y_0^2 + \\
 & + (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_1 - k_1) + 8r_2^2m_1)x_0 + \\
 & + (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_2 - k_2) + 8r_2^2m_2)y_0 + \\
 & + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2(m_1^2 + m_2^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

При этом выражение для $\Delta_{(4)}$ примет следующий вид:

$$\Delta_{(6)} = 16r_2^4 - 16r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2).$$

Легко видеть, что выражение $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2$ есть квадрат расстояния от точки с координатами $M(m_1, m_2)$ до центра окружности ω_2 . В таком случае:

а) если точка M расположена вне окружности ω_2 , то $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 > r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)} = 16r_2^4 - 16r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) < 0$ – гиперболический тип линии;

б) если точка M расположена на окружности ω_2 , то $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 = r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)} = 16r_2^4 - 16r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) = 0$ – параболический тип линии;

в) если точка M расположена внутри окружности ω_2 , то $(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 < r_2^2$, то есть $\Delta_{(6)} = 16r_2^4 - 16r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) > 0$ – эллиптический тип линии.

Исследуем центры полученной линии второго порядка, заданной уравнением (6).

В соответствии с замечанием 1 центры линий эллиптического и гиперболического типов будут задаваться системой:

$$\begin{cases} x = \frac{r_2^2(m_1 + k_1)((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - r_2^2)}{2r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - r_2^2)}, \\ y = \frac{r_2^2(m_2 + k_2)((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - r_2^2)}{2r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 - r_2^2)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m_1 + k_1}{2}, \\ y = \frac{m_2 + k_2}{2}. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в уравнение (6):

$$\begin{aligned} & ((m_1 - k_1)^2 - r_2^2)(m_1 + k_1)^2 + 2(m_1^2 - k_1^2)(m_2^2 - k_2^2) + ((m_2 - k_2)^2 - r_2^2)(m_2 + k_2)^2 + \\ & + (2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_1 - k_1) + 4r_2^2 m_1)(m_1 + k_1) + \\ & + (2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_2 - k_2) + 4r_2^2 m_2)(m_2 + k_2) + \\ & + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2(m_1^2 + m_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Получим выражение $r_2^4 - r_2^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2)$, которое не равно нулю для эллиптического и гиперболического типа линий. Следовательно, центр не принадлежит линии второго порядка. Для эллиптического типа искомая линия будет являться эллипсом, а для гиперболического – гиперболой.

Отдельно исследуем центры линии параболического типа.

$$\begin{cases} 4((m_1 - k_1)^2 - r_2^2)x + 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)y + \\ + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_1 - k_1) + 4r_2^2 m_1 = 0, \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x + 4((m_2 - k_2)^2 - r_2^2)y + \\ + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - r_2^2)(m_2 - k_2) + 4r_2^2 m_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x , подставим полученное выражение во второе уравнение системы и упростим:

$$\begin{cases} x = \frac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(2y - m_2 - k_2)}{4r_2^2 - 4(m_1 - k_1)^2} + \frac{m_1 + k_1}{2}, \\ 16r_2^2(r_2^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2)y + 8r_2^2(m_2 + k_2)(r_2^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку для линий параболического типа $r_2^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2 = 0$, то второе уравнение системы тождественно равно нулю. Следовательно, имеем линию центров:

$$x = \frac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(2y - m_2 - k_2)}{4r_2^2 - 4(m_1 - k_1)^2} + \frac{m_1 + k_1}{2}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = (m_2 + k_2)/2$, тогда $x = (m_1 + k_1)/2$. Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и преобразуем его:

$$r_2^2(r_2^2 - (m_1 - k_1)^2 - (m_2 - k_2)^2) = 0.$$

Так как второй множитель этого равенства есть ноль, то полученное равенство тождественно равно нулю. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые. Следствие доказано.

Кроме того, если обе заданные окружности вырождаются в точки, то естественным образом получаем решение задачи для двух точек на вещественной координатной плоскости.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть даны две точки на координатной плоскости Oxy . Тогда множество центров семейства окружностей, проходящих через данные точки, есть прямая, являющаяся серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему эти точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в задаче для двух точек уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} 4(m_1 - k_1)^2 x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0 y_0 + \\ + 4(m_2 - k_2)^2 y_0^2 + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1)x_0 + \\ + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2)y_0 + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

А значение $\Delta_{(4)}$ станет равным нулю. Таким образом получим параболический тип линии.

Исследуем центры этой линии.

$$\begin{cases} 4(m_1 - k_1)^2 x + 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)y + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1) = 0, \\ 4(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x + 4(m_2 - k_2)^2 y + 2(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2) = 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную x , подставим полученное выражение во второе уравнение системы и упростим:

$$\begin{cases} x = \frac{-(m_2 - k_2)y}{m_1 - k_1} - \frac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}, \\ \frac{-2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)^2}{m_1 - k_1} - \frac{2(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2(m_1 - k_1)} + 2(m_2 - k_2)^2 y + \\ + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы обращается в тождество $0 = 0$. Следовательно, ордината искомым центров $y \in \mathbb{R}$. А поскольку абсцисса x зависит от ординаты y , то и она будет принимать значения на всём множестве действительных чисел. Следовательно, имеем линию центров:

$$x = \frac{-(m_2 - k_2)y}{m_1 - k_1} - \frac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}.$$

Проверим принадлежность произвольной точки (x, y) прямой центров полученным линиям второго порядка. Пусть $y = 0$, тогда

$$x = -\frac{k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2}{2(m_1 - k_1)}.$$

Подставим полученные координаты в уравнение линии второго порядка и упростим его:

$$\begin{aligned} 4(m_1 - k_1)^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}{4(m_1 - k_1)^2} + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1) \frac{-(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)}{2(m_1 - k_1)} + \\ + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Получаем тождество $0 = 0$. Следовательно, выбранная произвольно точка линии центров принадлежит линии второго порядка. Получаем, что эта линия есть две совпавшие прямые, что и требовалось доказать.

Пусть теперь радиусы заданных окружностей совпадают, то есть $r_1 = r_2 = r_0$. Тогда возможны три варианта их взаимного расположения на плоскости: окружности не имеют общих точек, касаются внешним образом или пересекаются. Сформулируем соответствующие утверждения как следствия из утверждений а) – в) теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть даны две окружности с равными радиусами на координатной плоскости Oxy . Тогда

а) если окружности не имеют общих точек, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть гипербола и прямая;

б) если окружности касаются внешним образом, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых проходит через центры данных окружностей. При этом исключаются три точки этой прямой: центры данных окружностей и точка их касания;

в) если окружности пересекаются, то множество центров семейства окружностей, касающихся данных окружностей, есть эллипс и прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, легко заметить, что все рассуждения остаются верными и для окружностей одинакового радиуса $r_1 = r_2 = r_0$.

Для этих задач уравнения (4) и (5) примут вид:

$$4(m_1 - k_1)^2 x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0 y_0 + 4(m_2 - k_2)^2 y_0^2 + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_1 - k_1)x_0 + 4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)(m_2 - k_2)y_0 + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 = 0. \quad (8)$$

$$(4(m_1 - k_1)^2 - 16r_0^2)x_0^2 + 8(m_1 - k_1)(m_2 - k_2)x_0 y_0 + (4(m_2 - k_2)^2 - 16r_0^2)y_0^2 + (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - 4r_0^2)(m_1 - k_1) + 32r_0^2 m_1)x_0 + (4(k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - 4r_0^2)(m_2 - k_2) + 32r_0^2 m_2)y_0 + (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2 - 4r_0^2)^2 - 16r_0^2(m_1^2 + m_2^2) = 0. \quad (9)$$

Поскольку уравнение (8) полностью совпадает с уравнением (7), то полученная в уравнении (8) линия есть две совпавшие прямые.

Отметим, что значение $\Delta_{(5)}$ станет равным:

$$\begin{aligned} \Delta_{(9)} &= (4(m_1 - k_1)^2 - 16r_0^2)(4(m_2 - k_2)^2 - 16r_0^2) - 16(m_1 - k_1)^2(m_2 - k_2)^2 = \\ &= -64r_0^2((m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2) + 256r_0^4. \end{aligned}$$

Для уравнения (9) исследование типа линии и её центров являются аналогичными исследованиям уравнения (5) в пунктах а) – в) доказательства теоремы 3. Таким образом, если окружности не имеют общих точек, то искомое множество центров, заданное уравнением (9), есть гипербола; если окружности касаются – две совпавшие прямые; если окружности пересекаются – эллипс. Следствие доказано.

3. Заключение

При решении каждого из типов задачи были использованы базовые формулы аналитической геометрии: уравнение прямой по точке и направляющему вектору, уравнение прямой по двум точкам, уравнение биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, формула расстояния от точки до прямой и т.д. Аналитическое решение задач заключалось в решении систем уравнений и самих уравнений, степень каждого из которых не превышала двух. Следовательно, решения задач исследованных типов можно построить циркулем и линейкой.

В каждой из решённых задач было определено множество центров окружностей: прямые, окружности, эллипсы, гиперболы и параболы. В силу континуальности точек на прямых и кривых, количество возможных центров искомых касательных окружностей бесконечно. Поскольку окружность определяется своим центром и радиусом, то всевозможных окружностей, касающихся двух объектов, каждый из которых является точкой, прямой или окружностью, бесконечно много, [15]. Отобразим результаты исследования в таблице 1.

Таблица 1: Результаты исследования

Радиус ω_1	Радиус ω_2	Взаимное расположение на плоскости	Множество искомых центров
∞	∞	Параллельны	Прямая, параллельная данным и равноудалённая от них
		Пересекаются	Пара взаимно перпендикулярных прямых без точки их пересечения
r_1	∞	Нет общих точек или две общие точки	Пара парабол
		Одна общая точка	Парабола без вершины и прямая, проходящая через центр окружности и точку касания, без самого центра и точки касания
0	∞	Точка не лежит на прямой	Парабола
		Точка лежит на прямой	Прямая, перпендикулярная данной, проходящая через данную точку и не включающая её
r_1	r_2	Нет общих точек и ни одна не находится внутри другой	Пара гипербол
		Касаются внешним образом	Гипербола и прямая, проходящая через центры окружностей, без точки касания и самих центров
		Пересекаются	Гипербола и эллипс
		Касаются внутренним образом	Эллипс и прямая, проходящая через центры окружностей, без точки касания и самих центров
		Одна находится внутри другой (концентрические)	Пара эллипсов (пара концентрических окружностей)

0	r_2	Точка вне окружности	Гипербола
		Точка лежит на окружности	Прямая, проходящая через данную точку и центр окружности, без этих двух точек
		Точка лежит внутри окружности произвольно (совпадает с центром)	Эллипс (окружность с центром в этой же точке)
0	0	Не совпадающие точки	Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки
r_0	r_0	Не имеют общих точек	Гипербола и прямая
		Касаются	Пара взаимно перпендикулярных прямых, одна из которых проходит через центры окружностей, без самих центров и точки касания
		Пересекаются	Эллипс и прямая

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов – 9-е изд., исправленное, М.: МЦНМО, 2019. 564 с.
2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
3. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. Учебное пособие для студентов-заочников III-IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. – Просвещение, 1980 г. – 175 с.
4. Muirhead R. F. On the Number and Nature of the Solutions of the Apollonian Contact Problem, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Volume 14, 2009, С. 135-147.
5. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2008. – 223 с.
6. Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. общеобразоват. учреждений. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 1995. – 383 с.
7. Блинков А. Д., Блинков Ю. А. Геометрические задачи на построение. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2017. – 152 с.
8. Морозов Е. А. Обобщенная задача Аполлония // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2019. С. 80–111.
9. Котельников К. Обобщение задачи Аполлония Пергамского // Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики. Вып. 107, 1890 г. С. 206-210.
10. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
11. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов педагогических институтов. – М., Учпедгиз, 1957. 268 с.

12. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
13. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320 с.
14. Парамонова И. М. Лекции по алгебре для учителей математики. – М.: МЦНМО, 2017. – 128 с.
15. Кашина А. С., Цыбуля Л. М. Исследование задачи Аполлония для двух объектов // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2023, с. 233–236.

REFERENCES

1. Richard Courant, Herbert Robbins. “What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods”, *M.: ICNMO*, Second Edition. 592 p.
2. Kulikov, L. Ya. 1979, “Algebra and number theory: Textbook for pedagogical institutes”, *M.: Vysshaya shkola*, 1979. – 559 p. (In Russian)
3. Vinberg, E. B. 1980, “The algebra of polynomials. Textbook for part-time students of the III-IV courses of physics and mathematics faculties of pedagogical institutes”, *Prosvyesheniye*, 175 p. (In Russian)
4. Muirhead, R. F. 2009, “On the Number and Nature of the Solutions of the Apollonian Contact Problem”, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol. 14, pp. 135–147.
5. Potoskuev, Ye. V., Zvavich L. I. 2008, “Geometry. 10-th grade: studies. for general education. institutions with in-depth and specialized study of mathematics”, *M.: Drofa*,. – 223 p. (In Russian)
6. Pogorelov, A. V. 1995, “Geometry: Studies for grades 7-11. general education. institutions (Geometriya: Ucheb. dlya 7-11 kl. obsheobrazovat. uchrezhdeniy)”, *M.: Prosveshchenie*, 5 Ed. 1995. - 383 p. (In Russian)
7. Blinkov, A. D., Blinkov Yu. A. 2017, “Geometric construction tasks”, *M.: MTsNMO*, 4 Ed., stereotip., 152 p. (In Russian).
8. Morozov, E. A. “The generalized Apollonius problem”, *Matematicheskoye prosveshcheniye*. Ser. 3. Vol. 23. M.: MTsNMO, 2019. P. 80–111. (In Russian)
9. Kotel’nikov, K. “Generalization of the problem of Apollonius of Pergamon”, *Vestnik Opitnoy Fiziki i Elementarnoy Matematiki*. Vol. 107, 1890 g. P. 206–210. (In Russia)
10. Vygodskie, M. Ya. “Handbook of higher mathematics”, *M.: AST: Astrel*’, 2006. – 991 p. (In Russian)
11. Argunov, B.I., Balk M.B. “Geometric constructions in the plane. Manual for students of pedagogical institutes”, *M., Uchpedgiz*, 1957. 268 p. (In Russian)

12. Atanasyan, L. S., Bazylev V. T. “Geometry. In 2 parts. Part. I. Textbook for students of physical and mathematical faculties of pedagogical institutes”, *M.: Prosveschenie*, 1986. – 336 p. (In Russian)
13. И'ин, В. А., Kim, G. D. “Linear Algebra and Analytical Geometry: Textbook”, *M.: Izd-vo Mosk. un-ta*, 1998. – 320 p. (In Russian)
14. Paramonova, I. M. “Lectures on algebra for math teachers”, *M.: MTsNMO*, 2017. – 128 p. (In Russian)
15. Kashina, A. S., Tsybulya, L. M. 2023, “Investigation of the Apollonius problem for two objects”, *Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: Modern problems, applications and problems of history: Proceedings of the XXII International Conference devoted to the 120-th anniversary of the birth of Academician A. N. Kolmogorov and the 60-th anniversary of the opening of boarding school No. 18 at Moscow University*, Tula: Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, p. 233–236. (In Russian)

Получено: 17.12.2023

Принято в печать: 04.09.2024