

УДК 512.541

АБСОЛЮТНЫЕ ИДЕАЛЫ ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Компанцева, А. А. Фомин (г. Москва)

Аннотация

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, у которого аддитивная группа совпадает с G . Подгруппа группы G называется абсолютным идеалом, если она является идеалом любого кольца на группе G . Если любой идеал кольца является абсолютным идеалом его аддитивной группы, то такое кольцо называется AI -кольцом. Если на группе имеется хотя бы одно AI -кольцо, то такая группа называется RAI -группой. В данной статье мы рассматриваем кольца на почти вполне разложимых абелевых группах (ПВР-группах).

Абелева группа без кручения называется ПВР-группой, если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного ранга и конечного индекса. Всякая ПВР-группа G содержит регулятор A , который является вполне разложимой и вполне характеристической подгруппой. Конечная факторгруппа G/A называется регуляторным фактором группы G , порядок группы G/A называется регуляторным индексом. Если регуляторный фактор ПВР-группы является циклическим, то группа называется ЦРФ-группой. Если типы прямых слагаемых ранга 1 регулятора A попарно не сравнимы, то группы A и G называются жесткими. Если эти типы идемпотентны, то группа G называется группой кольцевого типа.

Главный результат данной статьи заключается в том, что любая жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа является RAI -группой. Кроме того, в работе полностью описаны главные абсолютные идеалы таких групп.

Пусть G — жесткая ПВР-группа кольцевого типа с регулятором A , циклическим регуляторным фактором $G/A = \langle d + A \rangle$ и регуляторным индексом n . Разложение $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} A_\tau$ регулятора A в прямую сумму групп

A_τ ранга 1 и типа τ определяет множество $T(G) = T(A)$ критических типов групп G и A . Из теории ПВР-групп известно, что при подходящем выборе элементов $e_\tau \in A_\tau$ ($\tau \in T(G)$) группу A можно представить в виде $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$, где R_τ ($\tau \in T(G)$) — подкольца с единицей по-

ля рациональных чисел. При этом определены натуральные инварианты m_τ ($\tau \in T(G)$) почти изоморфизма группы G такие, что в делимой оболочке

группы G любой элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau$,

где r_τ — элементы колец R_τ ($\tau \in T(G)$), однозначно определенные при фиксированном разложении регулятора A .

Для описания RAI -групп в некотором классе абелевых групп необходимо знать строение главных абсолютных идеалов групп из этого кольца. Главным абсолютным идеалом, порожденным элементом $g \in G$, называют наименьший абсолютный идеал $\langle g \rangle_{AI}$, содержащий g .

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа с фиксированным разложением регулятора, $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau \in G$. Тогда

$$\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus_{\tau \in T(G)} r_\tau A_\tau.$$

Заметим, что элементы r_τ ($\tau \in T(G)$) в представлении элемента $g \in G$ определены однозначно с точностью до множителя, обратимого в R_τ . Поэтому вид главного идеала $\langle g \rangle_{AI}$ не зависит от разложения регулятора.

ТЕОРЕМА 2. Любая жесткая ЦРФ-группа G кольцевого типа является RAI -группой. При этом для любого α , взаимно простого с n , существует AI -кольцо $(G, \times)$ такое, что в факторкольце $(G/A, \times)$ выполняется $\bar{d} \times \bar{d} = \alpha \bar{d}$, где $\bar{d} = d + A$, $G/A = \langle d \rangle$.

Ключевые слова: кольцо на абелевой группе, почти вполне разложимые группы, абсолютный идеал, RAI -группа.

Библиография: 16 названий.

ABSOLUTE IDEALS OF ALMOST COMPLETELY DECOMPOSABLE ABELIAN GROUPS

E. I. Kompantseva, A. A. Fomin (Moscow)

Abstract

A ring is said to be a ring on an abelian group G , if its additive group coincides with the group G . A subgroup of the group G is called the absolute ideal of G , if it is an ideal of every ring on the group G . If every ideal of a ring is an absolute ideal of its additive group, then the ring is called the AI -ring. If there exists at least one AI -ring on a group G , then the group G is called the RAI -group. We consider rings on almost completely decomposable abelian groups (acd-groups) in the present paper.

A torsion free abelian group is an acd-group, if it contains a completely decomposable subgroup of finite rank and of finite index. Every acd-group G contains the regulator A , which is completely decomposable and fully invariant. The finite quotient group G/A is called the regulator quotient of the group G , the order of the group G/A is called the regulator index. If the regulator quotient of an acd-group is cyclic, then the group is called the crq-group. If the types of the direct rank-1 summands of the regulator A are pairwise

incomparable, then the groups A and G are called rigid. If all these types are idempotent, then the group G is of the ring type.

The main result of the present paper is that every rigid crq-group of the ring type is an RAI -group. Moreover, the principal absolute ideals are completely described for such groups.

Let G be a rigid crq-group of the ring type. A subgroup A is the regulator of the group G , the quotient $G/A = \langle d + A \rangle$ is the regulator quotient and n is the regulator index. A decomposition $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} A_\tau$ of the regulator A into

a direct sum of rank-1 groups A_τ determines the set $T(G) = T(A)$ of critical types of the groups A and G . Then for every $\tau \in T(G)$, there exists an element $e_\tau \in A_\tau$ such that $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$, where R_τ ($\tau \in T(G)$) is a subring of the

field of rational numbers containing the unit.

Moreover, the definition of natural near-isomorphism invariants m_τ ($\tau \in T(G)$) of the group G naturally implies that every element $g \in G$ can be

written in the divisible hull of the group G in the following way $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau$,

where r_τ are elements of the ring R_τ which are uniquely determined by a fixed decomposition of the regulator A .

Every description of RAI -groups is based on a description of principal absolute ideals of the groups. The least absolute ideal $\langle g \rangle_{AI}$ containing an element g is called the principal absolute ideal generating by g . The following theorem describes principal absolute ideals.

THEOREM 1. Let G be a rigid crq-group of the ring type with a fixed decomposition of the regulator, $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau \in G$. Then

$$\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus_{\tau \in T(G)} r_\tau A_\tau.$$

Note that the elements r_τ ($\tau \in T(G)$) in the representation of the element $g \in G$ are determined uniquely up to an invertible factor of R_τ . Therefore, the representation of the principal absolute ideal doesn't depend on the decomposition of the regulator.

THEOREM 2. Every rigid crq-group G of the ring type is an RAI -group. In this case, for every integer α coprime to n there exists an AI -ring $(G, \times)$ such that the equality $\bar{d} \times \bar{d} = \alpha \bar{d}$ takes place in the quotient ring $(G/A, \times)$, where $\bar{d} = d + A$, $G/A = \langle d \rangle$.

Keywords: the ring on an abelian group, almost completely decomposable group, absolute ideal, RAI -group.

Bibliography: 16 titles.

1. Введение

Умножением на абелевой группе G называется любой гомоморфизм

$\mu: G \otimes G \rightarrow G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G . При исследовании многих свойств колец на группе G в первую очередь возникает вопрос о ее подгруппах, являющихся идеалами в любом кольце на G , такие подгруппы называют абсолютными идеалами группы G . Проблема изучения абсолютных идеалов абелевых групп сформулирована в [1], их изучению посвящены работы [1-11]. При этом важную роль в решении этой проблемы играет понятие главного абсолютного идеала, введенное в [8], так как любой абсолютный идеал является суммой главных.

Кольцо, в котором нет других идеалов, кроме абсолютных идеалов его аддитивной группы называется AI -кольцом. Л. Фукс сформулировал проблему описания абелевых групп, на которых существует хотя бы одно AI -кольцо [2, проблема 93]. Такие группы называют RAI -группами. В [8] показано, что кольцо является AI -кольцом тогда и только тогда, когда в нем любой главный идеал является главным абсолютным идеалом аддитивной группы. Это еще раз демонстрирует значение главных абсолютных идеалов при изучении зависимости свойств колец от строения их аддитивной группы.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа». Настоящая работа посвящена изучению колец на почти вполне разложимых группах. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой, если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Почти вполне разложимые группы изучаются давно, им посвящены исследования многих авторов, например, [12-15]. Любая почти вполне разложимая группа G содержит некоторую вполне характеристическую подгруппу A конечного индекса, которая является вполне разложимой и называется регулятором группы G . Факторгруппа G/A называется регуляторным фактором группы G , индекс подгруппы A в группе G — регуляторным индексом. Почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором часто называют ЦРФ-группами. Если типы прямых слагаемых ранга 1 регулятора A попарно не сравнимы, то группы G и A называются жесткими, если типы этих слагаемых идемпотентны, то G называется группой кольцевого типа. Кольца на жестких ЦРФ-группах кольцевого типа изучались в [17-18].

В работе доказано, что любая редуцированная жесткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором является RAI -группой, для этого описаны главные абсолютные идеалы из указанного класса.

2. Абсолютные идеалы почти вполне разложимых абелевых групп

Далее везде G — это редуцированная почти вполне разложимая жесткая группа кольцевого типа с регулятором A , циклическим регуляторным факто-

ром $G/A = \langle d+A \rangle$ и регуляторным индексом n . Приведем необходимые сведения о таких группах, систематически изложенные в [13]. Разложение $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} A_\tau$

регулятора A в прямую сумму групп A_τ ранга 1 и типа τ определяет множество $T(G) = T(A)$ критических типов групп G и A . Следующим образом определены инварианты m_τ ($\tau \in T(G)$) почти изоморфизма группы G : пусть $nd = \sum_{\tau \in T(G)} a_\tau$ ($a_\tau \in A_\tau$), тогда $m_\tau = o(a_\tau + nA)$ — порядок элемента $a_\tau + nA$ в группе A/nA . Можно выбрать элементы $e_\tau \in A_\tau$ ($\tau \in T(G)$) так, что $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$,

где R_τ — подкольца с единицей кольца $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, при этом выполняется

$$nd = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{n}{m_\tau} s_\tau e_\tau, \quad (1)$$

где $s_\tau \in \mathbb{Z}$, причем числа n, m_τ, s_τ ($\tau \in T(G)$) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $n = [m_\tau \mid \tau \in T(G)]$,
- 2) $(s_\tau, m_\tau) = 1$ для всех $\tau \in T(G)$,
- 3) $(p, s_\tau) = 1$ и $(p, m_\tau) = 1$, если $\tau(p) = \infty$

(здесь $[a, b]$ — наименьшее общее кратное, (a, b) — наибольший общий делитель $a, b \in \mathbb{Z}$). Равенство (1) называется стандартным представлением ЦРФ-группы G .

Так как в делимой оболочке $\overline{G} = \overline{A}$ группы G элемент d можно представить в виде $d = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_\tau$, а любой элемент $g \in G$ имеет вид $g = kd + a$ для некоторых

$k \in \mathbb{Z}$, $a \in A$, то в группе $\overline{G}$ элемент g можно представить в виде $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau$,

где $r_\tau \in R_\tau$. В дальнейшем будем использовать такое представление элементов группы G .

Умножение $\mu: G \otimes G \rightarrow G$ часто будем обозначать знаком $\times$, то есть

$$\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$$

для $g_1, g_2 \in G$. Кольцо на группе G , определенное этим умножением, обозначается $(G, \times)$. Очевидно в любом кольце $(G, \times)$ на жесткой группе G произведение $e_\tau \times e_\tau \in A_\tau$ при всех $\tau \in T(G)$ и $e_\tau \times e_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$.

Заметим, что если $(G, \times)$ — кольцо на G , то регулятор A и все его τ -однородные компоненты A_τ являются идеалами этого кольца. При этом кольцо $(\overline{G}, \times)$ вкладывается в качестве подкольца в кольцо $(\overline{A}, \times)$ на делимой оболочке $\overline{A}$ группы A . Поскольку для любых элементов $q_1 e_\tau, q_2 e_\tau \in A_\tau$ ($q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$) в кольце $(\overline{A}_\tau, \times)$ выполняется $(q_1 e_\tau) \times (q_2 e_\tau) = q_1 q_2 (e_\tau \times e_\tau)$, то это же верно в кольце $(G, \times)$. Поэтому для любых элементов $\mu_\tau \in R_\tau$ ($\tau \in T(G)$) существует кольцо $(A, \times)$, в котором $e_\tau \times e_\tau = \mu_\tau e_\tau$. Однако не любое умножение на A продолжается до умножения на G .

Будем говорить, что элементы $\mu_\tau \in R_\tau$ ($\tau \in T(G)$) определяют умножение на G относительно разложения $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$, если существует кольцо

$(G, \times)$, в котором $e_\tau \times e_\tau = \mu_\tau e_\tau$. В [16] показано, что элементы μ_τ ($\tau \in T(G)$) определяют умножение на G относительно разложения $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$ тогда и

только тогда, когда найдется $\alpha \in \mathbb{Z}$ такое, что при всех $\tau \in T(G)$ выполняется $\mu_\tau = m_\tau \delta_\tau$ и $\delta_\tau = \alpha s_\tau^{-1} + m_\tau t_\tau$ при некоторых $t_\tau \in R_\tau$ (здесь s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ).

Для описания RAI -групп в некотором классе абелевых групп необходимо знать строение главных абсолютных идеалов групп из этого кольца. Главным абсолютным идеалом, порожденным элементом $g \in G$, называют наименьший абсолютный идеал $\langle g \rangle_{AI}$, содержащий g .

Пусть $EndG$ — кольцо эндоморфизмов группы G , $Hom(G_1, G_2)$ — группа гомоморфизмов группы G_1 в группу G_2 . В [1] определено множество

$$M(G) = \langle \Phi(g) \mid g \in G, \Phi \in Hom(G, EndG) \rangle \subset EndG,$$

и доказано, что $M(G)$ является идеалом кольца $EndG$. В [8] показано, что если $g \in G$, то $\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + M(G)(g)$. Этот факт позволяет в следующей теореме описать главные абсолютные идеалы жесткой ЦРФ-группы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G — жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа со стандартным представлением (1), $g = \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau \in G$. Тогда

$$\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus_{\tau \in T(G)} r_\tau A_\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = \bigoplus_{\tau \in T(G)} r_\tau A_\tau$. Покажем, что $\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + L$.

Пусть $\varphi \in EndG$, тогда, согласно [13], найдутся $k \in \mathbb{Z}$ и $t_\tau \in R_\tau$ такие, что $\varphi(e_\tau) = (k + m_\tau t_\tau) e_\tau$ при всех $\tau \in T(G)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau\right) &= \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} \varphi(e_\tau) = \\ &= \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau(k + m_\tau t_\tau)}{m_\tau} e_\tau = k \sum_{\tau \in T(G)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau + \sum_{\tau \in T(G)} r_\tau t_\tau e_\tau = kg + \\ &+ \sum_{\tau \in T(G)} r_\tau t_\tau e_\tau \in \langle g \rangle + L. \end{aligned}$$

Так как $M(G) \subset EndG$, то $M(G)(g) \subset \langle g \rangle + L$, откуда

$$\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + M(G)(g) \subset \langle g \rangle + L.$$

Докажем обратное включение, для этого достаточно показать, что $L \subset \langle g \rangle_{AI}$. Пусть теперь $\tau \in T(G)$ и v_σ — целые числа, для которых $s_\sigma s_\sigma^{-1} + m_\sigma v_\sigma = 1$ ($\sigma \in T(G)$). Тогда определено кольцо $(G, \times)$, в котором $e_\sigma \times e_\sigma = m_\sigma (s_\sigma s_\sigma^{-1} + m_\sigma v_\sigma) e_\sigma$ для всех $\sigma \in T(G)$ [16]. Значит, $g \times t_\tau e_\tau = \frac{r_\tau t_\tau}{m_\tau} (e_\tau \times e_\tau) = r_\tau t_\tau (s_\tau s_\tau^{-1} + m_\tau v_\tau) e_\tau = r_\tau t_\tau e_\tau \in \langle g \rangle_\times \subset \langle g \rangle_{AI}$ при всех $t_\tau \in R_\tau$ (здесь $\langle g \rangle_\times$ — главный идеал кольца $(G, \times)$, порожденный элементом g). Следовательно, $\bigoplus_{\tau \in T(G)} r_\tau A_\tau \subset \langle g \rangle_{AI}$ и, значит, $\langle g \rangle + L \subset \langle g \rangle_{AI}$.

Заметим, что элементы r_τ ($\tau \in T(G)$) в представлении элемента $g \in G$ определены однозначно с точностью до множителя, обратимого в R_τ . Поэтому вид главного идеала $\langle g \rangle_{AI}$ не зависит от разложения $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$.

Перейдем к рассмотрению RAI -групп.

ТЕОРЕМА 2. *Любая жесткая ЦРФ-группа G кольцевого типа является RAI -группой. При этом для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с n , существует AI -кольцо $(G, \times)$ такое, что в фактор-кольце $(G/A, \times)$ выполняется $\bar{d} \times \bar{d} = \alpha \bar{d}$, где $\bar{d} = d + A$, $G/A = \langle d \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем регулятор A в виде $A = \bigoplus_{i=1}^k R_i e_i$, тогда

$$nd = \sum_{i=1}^k \frac{n}{m_i} s_i e_i$$

— стандартное представление группы G .

Заметим сразу, что для любых взаимно простых $a, m \in \mathbb{Z}$ и для любого целого $b > 1$ существует $c \in \mathbb{Z}$, для которого $c \equiv a \pmod{m}$ и $(c, b) = 1$. Действительно, пусть f — произведение простых чисел p , которые делят b и не делят a (если таких p не существует, то $f = 1$). Возьмем $c = a + fm$, тогда если p делит b , то p делит ровно одно слагаемое в правой части последнего равенства, то есть p не делит c . Следовательно, $(c, b) = 1$ и, очевидно, $c \equiv a \pmod{m}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$, $(\alpha, n) = 1$, тогда $(\alpha, m_i) = 1$ при всех $i = \overline{1, n}$, так как $n = [m_i | i = \overline{1, k}]$. Кроме того, $(s_i^{-1}, m_i) = 1$ при всех $i = \overline{1, n}$, где s_i^{-1} — целое число, обратное к s_i по модулю m_i .

По доказанному выше найдется $\delta_1 \in \mathbb{Z}$ такое, что $\delta_1 \equiv \alpha s_1^{-1} \pmod{m_1}$ и $(\delta_1, n) = 1$. Далее можно выбрать целые $\delta_2, \dots, \delta_k$ таким образом, что $\delta_{i+1} \equiv \alpha s_{i+1}^{-1} \pmod{m_{i+1}}$ и $(\delta_{i+1}, n \delta_1 \dots \delta_i) = 1$ при всех $i = \overline{1, k-1}$. Тогда элементы $\mu_i = m_i \delta_i$ ($i = \overline{1, k}$) определяют умножение $\times$ на G относительно разложения $A = \bigoplus_{i=1}^k R_i e_i$. Это значит, $e_i \times e_i = \mu_i e_i$ при всех $i = \overline{1, k}$. Покажем, что $(G, \times)$ является AI -кольцом.

Пусть $g = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{m_i} e_i$, по теореме 1 имеем $\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus_{i=1}^k r_i A_i$, где $A_i = R_i e_i$.

Рассмотрим $z = \sum_{i=1}^k r_i a_i e_i \in \bigoplus_{i=1}^k r_i A_i$, где $a_i \in R_i$, и покажем, что $z \in \langle g \rangle_{\times}$.

Пусть $i = \overline{1, k}$, элемент a_i можно представить в виде $a_i = \frac{a'_i}{b_i}$, где $a'_i, b_i \in \mathbb{Z}$ и b_i — обратимый элемент кольца R_i , то есть если простое число p делит b_i , то $pR_i = R_i$. Тогда $(b_i, m_i) = 1$. Пусть $d_i = (\mu_i, b_i) = (\delta_i, b_i)$, $\delta'_i = \frac{\delta_i}{d_i}$, $\mu'_i = m_i \delta'_i$, тогда $(\mu'_i, b_i) = 1$. Кроме того, $(\delta'_i, \delta'_j) = 1$ при всех $i \neq j$.

Рассмотрим систему сравнений

$$b_i x \equiv m_i a'_i \pmod{\mu'_i}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2)$$

Система (2) равносильна системе

$$x \equiv m_i a'_i b_i^{-1} \pmod{\mu'_i}, \quad i = \overline{1, k}. \quad (3)$$

Обозначим $m_{ij} = (m_i, m_j)$, тогда $(\mu'_i, \mu'_j) = (m_i \delta'_i, m_j \delta'_j) = m_{ij}$ при $i \neq j$. Следовательно, в силу обобщения китайской теоремы об остатках система (3) имеет решение $x \in \mathbb{Z}$, так как $m_i a'_i b_i^{-1} \equiv m_j a'_j b_j^{-1} \equiv 0 \pmod{m_{ij}}$ при $i \neq j$.

Из (2) получаем

$$b_i x = m_i a'_i - \mu'_i y'_i \quad (4)$$

при некоторых $y'_i \in \mathbb{Z}$ ($i = \overline{1, k}$). Так как b_i обратим в кольце R_i то $d_i = (\mu_i, b_i)$ также обратим в R_i . Поэтому элемент $y_i = \frac{y'_i}{b_i d_i}$ принадлежит R_i . Тогда из (4) получаем $x = m_i \frac{a'_i}{b_i} - \frac{\mu'_i y'_i}{b_i} = m_i a_i - \mu'_i d_i y_i = m_i a_i - \mu_i y_i$ при всех $i = \overline{1, k}$. Отсюда

$$x + \mu_i y_i = m_i a_i, \quad i = \overline{1, k} \quad (5)$$

Рассмотрим элемент $y = \sum_{i=1}^k y_i e_i \in A$. Используя (5), получим

$$\begin{aligned} xg + (g \times y) &= \sum_{i=1}^k \frac{x r_i}{m_i} e_i + \sum_{i=1}^k \frac{r_i y_i \mu_i}{m_i} e_i = \sum_{i=1}^k \frac{r_i (x + y_i \mu_i)}{m_i} e_i = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{r_i m_i a_i}{m_i} e_i = \sum_{i=1}^k r_i a_i e_i = z. \end{aligned}$$

Значит, $z \in \langle g \rangle_{\times}$, откуда $\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus_{i=1}^k r_i A_i \subset \langle g \rangle_{\times}$. Так как, очевидно, $\langle g \rangle_{\times} \subset \langle g \rangle_{AI}$, то $\langle g \rangle_{\times} = \langle g \rangle_{AI}$. Следовательно, кольцо $(G, \times)$ является AI -кольцом.

3. Заключение

В заключение заметим, что жесткая ПВР-группа, равная прямой сумме ЦРФ-групп, является RAI -группой. Это следует из того факта, что если $G = G_1 \oplus G_2$, где G_1, G_2 — абсолютные идеалы группы G , являющиеся RAI -группами, то G является RAI -группой.

Действительно, пусть $(G_1, \times_1), (G_2, \times_2)$ — AI -кольца на группах G_1 и G_2 соответственно. Определим кольцо $(G, \times)$ как прямую сумму колец $(G_1, \times_1)$ и $(G_2, \times_2)$. Для любых элементов $g \in G, g_i \in G_i (i = \overline{1, 2})$ обозначим: $\langle g \rangle$ — циклическая группа, порожденная g ; $\langle g \rangle_\times, \langle g_i \rangle_{\times_i}$ — главные идеалы в кольцах $(G, \times)$ и $(G_i, \times_i)$; $\langle g \rangle_{AI}^G, \langle g_i \rangle_{AI}^{G_i}$ — главные абсолютные идеалы в группах G и G_i соответственно. Пусть $g = g_1 + g_2 \in G, g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$. Тогда из того, что G_1 и G_2 — абсолютные идеалы и $(G_1, \times_1), (G_2, \times_2)$ являются AI -кольцами, получаем:

$$\begin{aligned} \langle g \rangle_{AI} &= \langle g \rangle + M(G)(g) \subset \langle g_1 \rangle + \langle g_2 \rangle + M(G)(g_1) + M(G)(g_2) = \langle g_1 \rangle_{AI}^G + \langle g_2 \rangle_{AI}^G = \\ &= \langle g_1 \rangle_{AI}^{G_1} + \langle g_2 \rangle_{AI}^{G_2} = \langle g_1 \rangle_{\times_1} + \langle g_2 \rangle_{\times_2} = \langle g \rangle_\times. \end{aligned}$$

Так как обратное включение очевидно, то $\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{AI}$ для любого элемента $g \in G$. Значит, G является RAI -группой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fried E., On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring // Proc.Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 51–55.
2. Fuchs L. Infinite abelian groups. V. 2. New York-London: Academic Press, 1973. 416 pp.
3. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
4. Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple abelian groups // Publ. J. Math. 1974. V. 53, №2. P. 327–336.
5. Gardner B.J. Rings on completely decomposable torsion-free abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1974. V. 15, №3. P. 381–382.
6. Kompantseva E. I. Torsion free rings // J. of Mathematical Sciences. 2010. V. 171, №2. P. 213–247.
7. Kompantseva E. I. Absolute Nil-Ideals of Abelian Groups // J. of Mathematical Sciences. 2014. V. 197, №5. P. 625–634.
8. Pham T. T. T. Absolute ideals of abelian groups // Abstraction of Southern Regional Algebra Conference. Montgomery, Alabama. 2010. P. 10.

9. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2009. №3. С. 64–67.
10. McLean K. R. The additive adeals of a p-ring // J. London Math. Soc. 1975. V.2. P. 523–529.
11. McLean K. R. p-ring whose all right ideals are the fully invariant subgroups // Proc. London Math. Soc. 1975. V. 3. P. 445–458.
12. Mader A. Almost completely decomposable abelian groups. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999 (Algebra, Logic and Applications, V. 13).
13. Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. СПб: Политехнический университет, 2009.
14. Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A.L.S. Corner, de Gruyter. 2008. Berlin — New York. P. 147–168.
15. Kompantseva E. I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. of Mathematical Sciences. 2009. V. 163, №6. P. 688–693.
16. Компанцева Е. И. Умножения на абелевых группах без кручения конечного ранга // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Международной конф., посвященной 85-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. 2015. С.79–81.
17. Blagoveshchenskaya E. A. Almost completely decomposable groups and rings // Journal of Math. Sci., 2008, V. 152, №2, P. 137–154.
18. Blagoveshchenskaya, E. A. Classification and realization theorems for one class of finite rank torsion-free rings, Russian Mathematical Surveys, 2006, V. 61,

REFERENCES

1. Fried, E. 1964, “On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring”, *Proc.Colloq. Abelian Groups*, Budapest, pp. 51–55.
2. Fuchs, L. 1973, “Infinite abelian groups”, *Academic Press*, vol. 2, New York-London.
3. Beaumont, R. A., Pierce, R.S. 1961, “Torsion free rings”, *Ill. J. Math.*, vol. 5, pp. 61–98.
4. Beaumont, R. A., Lawver, D.A. 1974, “Strongly semisimple abelian groups”, *Publ. J. Math.*, vol. 53, no. 2, pp. 327–336.

5. Gardner, B. J. 1974, "Rings on completely decomposable torsion-free abelian groups", *Comment. Math. Univ. Carolinae.*, vol. 15, no 3. pp. 381–382.
6. Kompantseva, E. I. 2014, "Torsion free rings", *J. of Math. Sci.*, vol. 171, no. 2, pp. 213–247.
7. Kompantseva, E. I. 2014, "Absolute Nil-Ideals of Abelian Groups", *Jornal of Math. Sci.*, vol. 197, no 5, pp. 625–634.
8. Pham T. T. T. 2010, "Absolute ideals of abelian groups", *Abstraction of Southern Regional Algebra Conference, Montgomery, Alabama*, p. 10.
9. Chehlov, A. R. 2009, "On abelian groups where all subgroups are ideals", *Vestnik Tomskogo Gos. Univ.*, no. 3, pp. 64–67.
10. McLean, K. R. 1975, "The additive ideals of a p-ring", *London Math. Soc.*, vol. 2, pp. 523–529.
11. McLean, K. R. 1975, "p-ring whose all right ideals are the fully invariant subgroups", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 3, pp. 445–458.
12. Mader, A. 1999, "Almost completely decomposable abelian groups", *Gordon and Breach, Algebra, Logic and Applications*, vol. 13, Amsterdam.
13. Blagoveshchenskaya, E.A. 2009, "Pochti vpolne razlozhimie abelivi gruppi i ih koltsa endomorfizmov" ["Almost completely decomposable abelian groups and their endomorphism rings"] Izdatelstvo Politehnicheskogo universiteta, Sankt Peterburg.
14. Fomin, A. A. 2008, "Quotient divisible and almost completely decomposable groups", *Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A.L.S. Corner, de Gruyter, Berlin-New York*. pp. 147–168.
15. Kompantseva, E. I. 2009, "Rings on almost completely decomposable Abelian groups", *Journal of Math. Sci.*, vol. 163, no. 6, pp. 688–693.
16. Kompantseva, E. I. 2015, "Multiplications on torsion free abelian groups of finite rank", *Proc. XIII Int. conf. devoted to 85th anniversary of the birth of professor S. S. Rischkov "Algebra, theory of numbers and discrete geometry: modern problems and applications"*, Izdatelstvo Tul. gos. ped. univ. im. L. N. Tolstogo, Tula, pp. 79–81.
17. Blagoveshchenskaya, E. A. 2008, "Almost completely decomposable groups and rings", *Journal of Math. Sci.*, vol. 152, no. 2, pp. 137–154.
18. Blagoveshchenskaya, E. A. 2006, "Classification and realization theorems for one class of finite rank torsion-free rings", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 61, no. 4, pp. 770–771.

Московский педагогический государственный университет.
Финансовый университет при Правительстве РФ.
Поступило 9.11.2015.