ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.928 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-143-157

Оператор Штурма – Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра

А. В. Качкина

Качкина Алиса Валерьевна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Аннотация

В работе изучается асимптотика дискретного спектра оператора Штурма–Лиувилля, задаваемого на $\mathbb{R}_+$ выражением $-y'' + q(x)y$ и граничным условием в нуле $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, для быстро растущих на бесконечности потенциалов $q(x)$. Получены асимптотики собственных значений оператора для классов потенциалов, характеризующих скорость их роста на бесконечности.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектр, асимптотика.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Качкина, А. В. Оператор Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 143–157.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.928 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-143-157

The Sturm–Liouville operator with rapidly growing potential and the asymptotics of its spectrum

A. Kachkina

Kachkina Alisa Valerievna — Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: alisa-kachkina@mail.ru

Abstract

In this paper, we study the asymptotic behavior of the discrete spectrum of the Sturm–Liouville operator given on $\mathbb{R}_+$ by the expression $-y'' + q(x)y$ and the zero boundary condition $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, for rapidly growing potentials $q(x)$. The asymptotics of the eigenvalues of the operator for the classes of potentials are obtained, which characterize the rate of their growth at infinity.

Keywords: differential operator, spectrum, asymptotics.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
Kachkina, A. V. 2024, "The Sturm—Liouville operator with a rapidly growing potential and the asymptotics of its spectrum", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 143–157.

1. Введение

В гильбертовом пространстве $L_2[0,+\infty)$ рассматривается оператор Штурма–Лиувилля $\mathbb{L}_q$, порождаемый дифференциальным выражением:

$$l_q(y) = -y''(x) + q(x)y(x),$$

и граничным условием в нуле:

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,$$

где $q(x)$ — непрервная на $[0,+\infty)$ действительнозначная функция. Область определения оператора $\mathbb{L}_q$: $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$, $-y'' + q(x)y \in L_2[0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\}$.

Если функция (потенциал) $q(x) \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow +\infty$, то оператор $\mathbb{L}_q$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$ (Э. Ч. Титчмарш [1], А. М. Молчанов [4]). Занумеруем собственные числа оператора $\mathbb{L}_q$ в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$.

Хорошо изучено распределение спектра (Э. Ч. Титчмарш [1]) в случае степенного роста потенциала q. Так, например, если $q(x) = x^k$, $k > 0$, то собственные значения λ_n оператора $\mathbb{L}_q$ имеют асимптотику:

$$\lambda_n \sim \left\{ \frac{\pi k \Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{k})} n \right\}^{\frac{2k}{k+2}}, \quad n \longrightarrow +\infty, \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма–функция Эйлера.

Асимптотика собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ в случае $\alpha = 0$ для потенциалов вида $q(x) = x^k + V(x)$, $k > 0$, получена в работах Х. Х. Муртазина и Т. Г. Амангильдина [5] для $V(x) \in C_0^2[0,+\infty)$ и Х. К.Ишкина [6] для $V(x) \in C_0^1[0,+\infty)$, где функции из класса $C_0^m[0,+\infty)$ — финитные функции класса $C^m[0,+\infty)$.

Распределение спектра операторов Эйри и Вебера, возмущенных дельта–взаимодействием (дельта–функцией Дирака) найдено А. С. Печенцовым [19], [20], [21].

Если потенциал q растет на бесконечности быстрее любой степенной функции, то собственные значения оператора $\mathbb{L}_q$ не имеют степенную асимптотику (1). А. И. Козко [3] установил, что для потенциала $q(x) = e^x$ выполнено соотношение $\lambda_n \sim \left(\dfrac{\pi n}{2\ln(\pi n)}\right)^2$, $n \longrightarrow +\infty$.

В данной работе получены асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

2. Классы быстро растущих потенциалов. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ класс функций $q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, удовлетворяющих условиям:

$$q''(x) \geq 0, \quad x \geq x_0, \tag{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty. \tag{3}$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что существует такое число $\widetilde{x}$, что для всех значений аргумента $x > \widetilde{x}$ значения $q(x)$ не обращаются в ноль, а также выполнено неравенство $\dfrac{q'(x)}{q(x)} > 0$. Без ограничения общности всюду далее будем считать, что эти соотношения выполнены при $x > 0$ (т.е. $\widetilde{x} = 0$).

Лемма 1. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \mathfrak{Q}$. Верны следующие утверждения.*

1. Функции q' и q принимают только положительные значения на аргументах, больших некоторого x_1. Кроме того, эти функции растут на бесконечности быстрее любой степенной функции, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $x^k = o(q(x))$, $x \longrightarrow +\infty$.

2. Пусть функция p — обратная к функции q, то есть $q(p(x)) = x$ для $x > x_1$. Тогда функция p растет медленнее любой степенной функции, т. е. для любого $\delta > 0$ имеем $p(x) = o(x^\delta)$, $x \longrightarrow +\infty$.

Доказательство. 1. Обозначим $\varphi(x) = x(\ln|q(x)|)'$ для $x > 0$. Тогда из равенства (3) следует, что $\varphi(x) \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$. Для любых чисел $x > x_1 > 0$ и любого заданного $k \in \mathbb{N}$ верна следующая цепочка равенств:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)^k |q(x)| = \left(\frac{x_1}{x}\right)^k |q(x_1)| \exp \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t)}{t} dt = |q(x_1)| \exp \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t) - k}{t} dt.$$

Поскольку функция φ является бесконечно большой, можно выбрать $x_1 > 0$ так, чтобы для всех чисел $x > x_1$ выполнялись соотношения:

$$\int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(t) - k}{t} dt > \int_{x_1}^{x} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{x}{x_1}\right).$$

Отсюда и из полученной ранее цепочки равенств следует, что $|q(x)|x^{-k} \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$ и при любом заданном натуральном k, то есть модуль функции q растет быстрее любой степенной функции.

Так как для $x > 0$ выполнено неравенство $\dfrac{q'(x)}{q(x)} > 0$, а значит, значения $q'(x)$ и $q(x)$ одного знака, осталось показать, что они именно положительные. Предположим, что это не так. Тогда в силу соотношения (2) функция $|q|$ выпукла вверх при значениях аргумента $x \geq x_0$ и ее график лежит ниже касательной, проведенной в некоторой точке $x_2 \geq x_0$, а значит, $|q|$ не может расти быстрее любой степенной функции. Полученное противоречие завершает доказательство пункта 1.

2. По доказанному ранее для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $\varkappa_k$, что для всех $x > \varkappa_k$ выполнено неравенство $q(x) > x^{k+1}$. Тогда в силу строгого возрастания функции p получаем, что $p(q(x)) > p(x^{k+1})$, а значит, $x > p(x^{k+1})$ для $x > \varkappa_k$. Таким образом, для $t > \varkappa_k^{k+1}$ выполнено неравенство $p(t) < t^{\frac{1}{k+1}}$. Отсюда получаем следующую цепочку соотношений

$$0 < \frac{p(t)}{t^{\frac{1}{k}}} < \frac{t^{\frac{1}{k+1}}}{t^{\frac{1}{k}}} = t^{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}} \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Полученное соотношение означает, что $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \dfrac{p(t)}{t^{\frac{1}{k}}} = 0$, $t \longrightarrow +\infty$, следовательно, $p(t) = o(t^{\frac{1}{k}})$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку для любого числа $\delta > 0$ найдется такой номер $k_\delta \in \mathbb{N}$, что $\delta > \dfrac{1}{k_\delta}$, получаем, что $p(x) = o(x^\delta)$, $x \longrightarrow +\infty$. ∎

Далее без ограничения общности будем считать, что $q(x) > 0$, $q'(x) > 0$ и $q''(x) \geq 0$ для любого $x > 0$.

Пример 1. *Все целые функции с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами, отличные от полинома, входят в класс $\mathfrak{Q}$.*

Так как логарифм максимума модуля целой функции $q(z)$ в круге $|z| \leq x$ является выпуклой вниз функцией от $\ln x$ (см. [2]), то $\varphi(x)$ не убывает. Функция $\varphi(x)$ не ограничена сверху, в противном случае имело бы место равенство $q(x) = O(x^m)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. По доказанному ранее получаем, что $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \varphi(x) = +\infty$, то есть выполнено соотношение (3), а значит, $q(x) \in \mathfrak{Q}$. ■

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ подкласс функций $q \in \mathfrak{Q}$, удовлетворяющих следующему условию хотя бы при одном значении $1 < \gamma < 4/3$

$$q''(x) \le (q'(x))^\gamma, \quad x \ge x_0. \tag{4}$$

Пример 2. *Целые функции конечного порядка вида* $q(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, *отличные от полинома, лежат в классе* $\widetilde{\mathfrak{Q}}$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ — целая функция конечного порядка $\rho > 0$ с неотрицательными коэффициентами ряда Тейлора. Производная $f'(z)$ имеет тот же порядок ρ, что и сама $f(z)$. Поэтому для доказательства неравенства (4) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n b_n x^{n-1} = o(f(x))^{1+\varepsilon},\ x \longrightarrow +\infty.$$

Пусть $\beta > \rho$. Тогда для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство:

$$\max_{|z|\le x} |f(z)| = f(x) \le C\exp(x^\beta).$$

Следовательно,

$$|b_n| \le \inf_{x>0} x^{-n} f(x) \le C \inf_{x>0} \exp(x^\beta - n\ln x) = C\exp\Big(-\frac{n}{\beta}\ln\frac{n}{e\beta}\Big).$$

Из последнего неравенства при $n > e^{\beta+1}\beta x^\beta$ находим

$$|b_n|x^n \le C\exp\Big(-\frac{n}{\beta}\ln\frac{n}{e\beta} + n\ln x\Big) \le C\exp\Big(-\frac{n}{\beta}\ln(e^\beta x^\beta) + n\ln x\Big) =$$
$$= C\exp(-n\ln(ex) + n\ln x) = C\exp(n(\ln x - \ln(ex)) = Ce^{-n}.$$

Отсюда $\sum\limits_{n>e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^n \le C_1,\ C_1 > 0$. Следовательно, при $x \ge 1$ имеем неравенство

$$f'(x) = \sum_{n\le e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^{n-1} + \sum_{n>e^{\beta+1}\beta x^\beta} n b_n x^{n-1} \le$$
$$\le C_1 + e^{\beta+1}\beta x^\beta \sum_{n\le e^{\beta+1}\beta x^\beta} b_n x^{n-1} \le C_1 + C_2\frac{f(x)}{x}x^\beta.$$

Так как f растет быстрее любой степенной функции, $\forall\varepsilon > 0$ получаем $f'(x) = o(f(x))^{1+\varepsilon}$, $x \longrightarrow +\infty$. ■

Для $\beta > 1$ и $\mu > 0$ обозначим через $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ класс функций $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ таких, что

$$\ln q(x) = \mu\ln^\beta x + o(\ln^{\beta-1} x), \quad x \longrightarrow +\infty. \tag{5}$$

Переписать данное условие на потенциал в терминах обратной функции позволяет следующее утверждение.

Лемма 2. *Рассмотрим произвольный потенциал $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$. Пусть p — обратная к q функция, $\delta = \mu^{-\frac{1}{\beta}}$. Тогда выполнено соотношение*

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x + o(1), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Доказательство. Перепишем выражение (5) в следующем виде: $\ln x = \mu \ln^{\beta} p(x) + o(\ln^{\beta-1} p(x))$, $x \longrightarrow +\infty$. Для некоторой $\varepsilon(x) = o(1)$, $x \longrightarrow +\infty$, получаем выражение:

$$\ln x = \mu \ln^{\beta} p(x)\left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right) = \mu \ln^{\beta} p(x) \cdot \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \longrightarrow 1$, $x \longrightarrow +\infty$. Отсюда, выразив $\ln p(x)$, получаем равенство:

$$\ln p(x) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\beta}} \ln^{\frac{1}{\beta}} x \left(1 + \frac{\varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Тогда с учетом обозначения для δ и согласно биномиальному разложению получаем следующее соотношение:

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x - \frac{\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x \cdot \varepsilon(x)}{\beta \ln p(x)} + o\left(\frac{\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x \cdot \varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Поскольку $\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x = \ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x)$, полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x - \frac{\ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x) \cdot \varepsilon(x)}{\beta \ln p(x)} + o\left(\frac{\ln p(x) \cdot \alpha^{\frac{1}{\beta}}(x) \cdot \varepsilon(x)}{\ln p(x)}\right), \quad x \longrightarrow +\infty.$$

А значит, $\ln p(x) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} x + o(1)$, $x \longrightarrow +\infty$, так как $\alpha(x) \longrightarrow 1$ и $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow +\infty$. ■

Выражение (5) при значении параметра $\beta = 1$ означает степенной рост потенциала q, для которого Э. Ч. Титчмаршом была получена асимптотика (1). При значениях параметра $\beta > 2$ для потенциала $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ выполняется условие:

$$\frac{\ln q(x)}{\ln^2 x} \longrightarrow +\infty, \quad x \longrightarrow +\infty.$$

При таких условиях спектр оператора $\mathbb{L}_q$ имеет асимптотику (А. И. Козко [3])

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2), \quad n \longrightarrow +\infty,$$

где p — обратная функция к q. Следующий результат А. И. Козко [3] устанавливает асимптотику спектра оператора $\mathbb{L}_q$ для потенциалов класса $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ в случае значения параметра $\beta = 2$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{2}{\mu}\right), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{6}$$

Позже А. Ю. Киселевой (личное сообщение) были найдены асимптотические разложения для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля в рассматриваемой задаче для потенциала класса $\mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ и значений параметра $\beta \in (3/2, 2]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{4}{\mu\beta} \ln^{2-\beta} p((\pi n)^2)\right), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{7}$$

и $\beta \in (4/3, 3/2]$:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\left(\frac{4}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta} - 1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2)\right), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{8}$$

Изучение асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ было продолжено И. Г. Насртдиновым [7] для более близких к единице значений параметра β. Так, для потенциала $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, значений параметра $\beta \in (5/4, 4/3]$ и $\nu = \delta^{\frac{1}{\beta}}$ справедливо:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 \exp\Bigg(-\bigg(2\nu^\beta \ln^{\frac{1}{\beta}}((\pi n)^2) - \frac{4}{\beta}\nu^{2\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}((\pi n)^2) + \\ + \frac{4(3-\beta)}{\beta^2}\nu^{3\beta}\ln^{\frac{3}{\beta}-2}((\pi n)^2) - \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\beta^3}\nu^{4\beta}\ln^{\frac{4}{\beta}-3}((\pi n)^2)\bigg)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{9}$$

С помощью леммы 2 можно переписать данный результат в терминах обратной функции p. Получаем следующий вид асимптотики:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2) \exp\Bigg(\frac{4}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta} - 1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2) + \\ + \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\mu^3\beta^3}\ln^{4-3\beta}(p(\pi n)^2)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

3. Основной результат и его доказательство

Обозначим $c_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [3] доказано, что в случае $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ имеет место асимптотика $n \sim \dfrac{1}{\pi}\lambda_n^{1/2} p(\lambda_n)$, $n \longrightarrow +\infty$. Отсюда получаем, что $\lambda_n \sim \dfrac{c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \longrightarrow +\infty$, то есть для некоторой последовательности $\alpha_n \longrightarrow 1$, $n \longrightarrow +\infty$ выполнено равенство:

$$\lambda_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\lambda_n}{c_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\alpha_n}{p^2(\lambda_n)} = 0$ в силу неограниченного монотонного роста функции p. Значит, $\lambda_n = o(c_n)$, $n \longrightarrow +\infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\lambda_n < c_n$.

В принятых ранее обозначениях положим по определению:

$$Y_n = \frac{c_n}{p^2(c_n)}, \quad Z_n = \frac{c_n}{p^2(Y_n\alpha_n)}, \quad W_n = \frac{c_n}{p^2(Z_n\alpha_n)}, \\ V_n = \frac{c_n}{p^2(W_n\alpha_n)}, \quad F_n = \frac{c_n}{p^2(V_n\alpha_n)}, \quad G_n = \frac{c_n}{p^2(F_n\alpha_n)}.$$

Лемма 3. *Для $\beta > 1$ и $\mu > 0$ рассмотрим произвольную функцию $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$ и обратную к ней функцию p. Зафиксируем для q введенные выше обозначения для последовательностей. Тогда в этих обозначениях, начиная с некоторого номера, выполнена цепочка неравенств*

$$Y_n\alpha_n < W_n\alpha_n < F_n\alpha_n < \lambda_n < G_n\alpha_n < V_n\alpha_n < Z_n\alpha_n < c_n.$$

Доказательство. По доказанному $\lambda_n < c_n$, начиная с некоторого номера N. В силу строгого возрастания функции p для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $p^2(\lambda_n) < p^2(c_n)$, а значит, имеет место следующая цепочка соотношений:

$$Y_n\alpha_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(c_n)} < \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)} = \lambda_n < c_n, \quad n > N.$$

Таким образом, для всех номеров $n > N$ доказано двойное неравенство $Y_n\alpha_n < \lambda_n < c_n$. Из неравенства $p^2(Y_n\alpha_n) < p^2(\lambda_n)$ для $n > N$ следует, что

$$\lambda_n = \alpha_n \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)} < \alpha_n \frac{c_n}{p^2(Y_n\alpha_n)} = Z_n\alpha_n, \quad n > N.$$

Отсюда и из полученных ранее неравенств заключаем, что $Y_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n$ для $n > N$.

Установим, что $Z_n\alpha_n < c_n$, начиная с некоторого номера. Поскольку по лемме 1 функция p растет медленнее любой степенной функции, в частности, $p^2(c_n) = o(c_n)$, $n \longrightarrow +\infty$, получаем, что $Y_n\alpha_n = \dfrac{c_n\alpha_n}{p^2(c_n)} \longrightarrow +\infty$, $n \longrightarrow +\infty$. Отсюда

$$\frac{Z_n\alpha_n}{c_n} = \frac{\alpha_n}{p^2(Y_n\alpha_n)} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Таким образом, $Z_n\alpha_n = o(c_n)$, $n \longrightarrow +\infty$, что влечет за собой выполнение неравенства $Z_n\alpha_n < c_n$ с некоторого номера. Без ограничения общности будем считать, что этот номер равен N. Таким образом, получена цепочка неравенств $Y_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n < c_n$ для $n > N$.

Установленное для $n > N$ неравенство $Z_n\alpha_n < c_n$ позволяет, снова воспользовавшись строгим возрастанием функции p, получить требуемое неравенство

$$Y_n = \frac{c_n}{p^2(c_n)} < \frac{c_n}{p^2(Z_n\alpha_n)} = W_n, \quad n > N.$$

Отсюда и из полученных ранее соотношений заключаем, что $Y_n\alpha_n < W_n\alpha_n < \lambda_n < Z_n\alpha_n < c_n$ для $n > N$. Далее аналогично последовательно устанавливаются все необходимые неравенства на $V_n\alpha_n$, $F_n\alpha_n$ и $G_n\alpha_n$. $\blacksquare$

Теорема 1. *Пусть $q \in \mathfrak{Q}_{\beta,\mu}$, $\beta \in (6/5, 5/4]$. Тогда для спектра оператора $\mathbb{L}_q$ справедливо*

$$\lambda_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \ n \longrightarrow +\infty.$$

С помощью формулы из леммы 2 можно переписать данный результат в терминах обратной функции p. Получаем следующий вид асимптотики:

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2 p^{-2}((\pi n)^2)\exp\Bigg(4\frac{1}{\mu\beta}\ln^{2-\beta} p((\pi n)^2) - \frac{4}{\mu^2\beta}\left(\frac{3}{\beta}-1\right)\ln^{3-2\beta} p((\pi n)^2) + \\ + \frac{16(8-6\beta+\beta^2)}{3\mu^3\beta^3}\ln^{4-3\beta}(p(\pi n)^2) - \frac{4(125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3)}{3\mu^4\beta^4}\ln^{5-4\beta} p((\pi n)^2)\Bigg), \\ n \longrightarrow +\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем для q обозначения для последовательностей, введенные перед формулировкой леммы 3. Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$F_n \sim G_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Тогда в силу леммы 3 получим, что $\lambda_n \sim F_n \sim G_n$, $n \longrightarrow +\infty$. Найдем асимптотические разложения для последовательностей F_n и G_n.

1. Запишем соотношение, используя выражение для обратной функции из леммы 2:
$$\ln p(Y_n\alpha_n)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}(Y_n\alpha_n)+o(1)=\delta(\ln Y_n+\ln\alpha_n)^{\frac{1}{\beta}}+o(1),\quad n\longrightarrow+\infty.$$
Поскольку $\ln\alpha_n=o(1)$, $n\longrightarrow+\infty$, получаем
$$\ln p(Y_n\alpha_n)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}Y_n\left(1+\frac{o(1)}{\ln Y_n}\right)^{\frac{1}{\beta}}+o(1),\quad n\longrightarrow+\infty.$$
С учетом формулы Тейлора и неравенства $\dfrac{1}{\beta}-1<0$ слагаемое правой части равенства может быть записано в виде
$$\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}Y_n\left(1+\frac{1}{\beta}o(\ln^{-1}Y_n)\right)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}Y_n+o(1),\quad n\longrightarrow+\infty.$$
Таким образом, установлено соотношение $\ln p(Y_n\alpha_n)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}Y_n+o(1)$, $n\longrightarrow+\infty$. По определению Y_n и ввиду леммы 2 имеем следующее соотношение
$$\ln^{\frac{1}{\beta}}Y_n=(\ln c_n-2(\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n+o(1)))^{\frac{1}{\beta}},\quad n\longrightarrow+\infty.$$
После вынесения за скобку $\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n$ получаем выражение $(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n)\cdot(1-2\delta\ln^{\frac{1}{\beta}-1}c_n+$ $+\,o(\ln^{-1}c_n))^{\frac{1}{\beta}}$, $n\longrightarrow+\infty$. Второй множитель с помощью формулы Тейлора и символа Похгаммера $(x)_n=x(x-1)\ldots(x-(n-1))$ может быть записан следующим образом:
$$\begin{aligned}1&+\frac{1}{\beta}(-2\delta\ln^{\frac{1}{\beta}-1}c_n+o(\ln^{-1}c_n))+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2((2\delta)^2\ln^{\frac{2}{\beta}-2}c_n+o(\ln^{\frac{1}{\beta}-2}c_n)+o(\ln^{-2}c_n))+\\&+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3(-(2\delta)^3\ln^{\frac{3}{\beta}-3}c_n+o(\ln^{\frac{2}{\beta}-3}c_n)+o(\ln^{\frac{1}{\beta}-3}c_n)+o(\ln^{-3}c_n))+\\&+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4((2\delta)^4\ln^{\frac{4}{\beta}-4}c_n+o(\ln^{\frac{3}{\beta}-4}c_n)+o(\ln^{\frac{2}{\beta}-4}c_n)+o(\ln^{\frac{1}{\beta}-4}c_n)+o(\ln^{-4}c_n))+\\&+O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5}c_n+o(\ln^{\frac{4}{\beta}-5}c_n)+o(\ln^{\frac{3}{\beta}-5}c_n)+o(\ln^{\frac{2}{\beta}-5}c_n)+o(\ln^{\frac{1}{\beta}-5}c_n)+o(\ln^{-5}c_n)),\\&\qquad n\longrightarrow+\infty.\end{aligned}$$
После всех преобразований с учетом того, что значения параметра $\beta\in\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{5}{4}\right]$, а значит, выполняется соотношение $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5}c_n)=o(1)$, $n\longrightarrow+\infty$, получаем, что
$$\begin{aligned}\ln p(Y_n\alpha_n)&=\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+\frac{(2\delta)^2}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-\frac{(2\delta)^3}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+\\&+\frac{(2\delta)^4}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n+o(1),\ n\longrightarrow+\infty.\end{aligned}$$

2. Аналогично предыдущему шагу имеем
$$\ln p(Z_n\alpha_n)=\delta\ln^{\frac{1}{\beta}}Z_n+o(1)=\delta\big(\ln c_n-2\ln p(Y_n\alpha_n)+o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}}+o(1),\quad n\longrightarrow+\infty.$$
После подстановки полученного выше выражения для $\ln p(Y_n\alpha_n)$ получаем, что
$$\begin{aligned}\ln p(Z_n\alpha_n)&=\delta\Bigg(\ln c_n-2\delta\bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}}c_n-\frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1}c_n+\frac{(2\delta)^2}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2\ln^{\frac{3}{\beta}-2}c_n-\\&-\frac{(2\delta)^3}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3\ln^{\frac{4}{\beta}-3}c_n+\frac{(2\delta)^4}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4\ln^{\frac{5}{\beta}-4}c_n+o(1)\bigg)\Bigg)^{\frac{1}{\beta}}+o(1),\quad n\longrightarrow+\infty.\end{aligned}$$

Для упрощения выкладок положим $\xi_{\beta,n} = 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}-1} c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда с использованием введенного обозначения имеем

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \xi_{\beta,n}^4 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^5\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1),$$
$$n \longrightarrow +\infty,$$

откуда с помощью формулы Тейлора получаем

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^3 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \xi_{\beta,n}^4 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^5\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \left(\xi_{\beta,n}^2 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 + 2\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \xi_{\beta,n}^4\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда, раскрывая символы Похгаммера и вычисляя коэффициенты, а также ввиду соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, получаем, что

$$\ln p(Z_n\alpha_n) =$$
$$= \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1),$$
$$n \longrightarrow +\infty.$$

3. Далее с помощью аналогичных выкладок получаем соотношение $\ln p(W_n\alpha_n) = \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(Z_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$. Используя полученное в предыдущем пункте выражение для $\ln p(Z_n\alpha_n)$, имеем

$$\ln p(W_n\alpha_n) = \delta\left(\ln c_n - 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Для удобства снова вынесем за скобку $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$:

$$\ln p(W_n\alpha_n)) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5 + o(\ln^{-1} c_n)\right)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Тогда с помощью формулы Тейлора:

$$\ln p(W_n\alpha_n)) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{5-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{41-90\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2 \left(\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + 2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^4\right) -$$
$$\left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3 \left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4 \xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, раскрывая символы Похгаммера и вычисляя коэффициенты, получаем, что

$$\ln p(W_n\alpha_n) = \\ = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1), \\ n \longrightarrow +\infty.$$

4. Аналогично предыдущему шагу имеем $\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(W_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$. Подставляя полученное выражение для $\ln p(W_n\alpha_n)$, имеем

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\left(\ln c_n - 2\delta\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n\left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

После вынесения за скобки $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$ и применения формулы Тейлора получаем следующее соотношение:

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n\left(1 - \frac{1}{\beta}\left(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \right.\right. \\ \left. + \frac{101-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2\left(\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + 2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^4\right) - \\ \left. - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3\left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4\xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\right) + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

После вычисления всех коэффициентов и с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, получаем, что

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \\ = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n \left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1), \\ n \longrightarrow +\infty. \quad (10)$$

5. Теми же рассуждениями получаем, что $\ln p(F_n\alpha_n) = \delta\big(\ln c_n - 2\ln p(V_n\alpha_n) + o(1)\big)^{\frac{1}{\beta}} + o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$. Откуда с помощью найденного выражения (10) имеем

$$\ln p(F_n\alpha_n) = \delta\left(\ln c_n - 2\delta\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n\left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1)\right)^{\frac{1}{\beta}} + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Снова вынесем за скобки $\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n$ для применения формулы Тейлора. Получаем следующее соотношение:

$$\ln p(F_n\alpha_n) = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n\Bigg(1 - \frac{1}{\beta}\Bigg(\xi_{\beta,n} - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n}^2 + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^3 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^4 + \\ + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^5\Bigg) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_2\left(\xi_{\beta,n}^2 + \frac{1}{\beta^2}\xi_{\beta,n}^4 - \frac{2}{\beta}\xi_{\beta,n}^3 + 2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^4\right) - \\ - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_3\left(\xi_{\beta,n}^3 - \frac{3}{\beta}\xi_{\beta,n}^4\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{\beta}\right)_4\xi_{\beta,n}^4 + O(\ln^{\frac{5}{\beta}-5} c_n)\Bigg) + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Вычислив все коэффициенты с учетом соотношения $O(\ln^{\frac{6}{\beta}-5} c_n) = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, получаем, что

$$\ln p(F_n\alpha_n) = \\ = \delta \ln^{\frac{1}{\beta}} c_n\left(1 - \frac{1}{\beta}\xi_{\beta,n} + \frac{3-\beta}{2\beta^2}\xi_{\beta,n}^2 - \frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\xi_{\beta,n}^3 + \frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\xi_{\beta,n}^4\right) + o(1), \\ n \longrightarrow +\infty. \quad (11)$$

6. Используя формулу (10), с применением обратной подстановки $\xi_{\beta,n} = 2\delta \ln^{\frac{1}{\beta}-1} c_n$, $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\ln p(V_n\alpha_n) = \delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - \\ -(2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg) + o(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

По определению $F_n = c_n \exp\big(-2\ln p(V_n\alpha_n)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому выполняется соотношение

$$F_n = c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg) + o(1)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда заключаем, что

$$F_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty,$$

поскольку $e^{o(1)} = 1 + o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$.

Аналогично используя формулу (11) и ввиду определения $G_n = c_n \exp\big(-2\ln p(F_n\alpha_n)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$G_n = c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + \\ + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg) + o(1)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Значит,

$$F_n \sim G_n \sim c_n \exp\Bigg(-2\delta\Bigg(\ln^{\frac{1}{\beta}} c_n - \frac{2\delta}{\beta}\ln^{\frac{2}{\beta}-1} c_n + (2\delta)^2\frac{3-\beta}{2\beta^2}\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n - $$
$$- (2\delta)^3\frac{8-6\beta+\beta^2}{3\beta^3}\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n + (2\delta)^4\frac{125-150\beta+55\beta^2-6\beta^3}{24\beta^4}\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n\Bigg)\Bigg), \quad n \longrightarrow +\infty,$$

что завершает доказательство теоремы. ■

Данная теорема обобщает полученные ранее результаты для значений параметра $\beta \in [5/4, 2]$.

Следствие 1. *Если* $\beta \in (5/4, 4/3]$, *то* $\ln^{\frac{5}{\beta}-4} c_n = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, *что приводит нас к формуле* (9).
Если $\beta \in (4/3, 3/2]$, *то* $\ln^{\frac{4}{\beta}-3} c_n = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, *что приводит нас к формуле* (8).
Если $\beta \in (3/2, 2]$, *то* $\ln^{\frac{3}{\beta}-2} c_n = o(1)$, $n \longrightarrow +\infty$, *что приводит нас к формуле* (7).
Если $\beta = 2$, *то получаем формулу* (6).

Найденная асимптотика собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ может использоваться при нахождении регуляризованных следов [11]–[14], при решении обратных задач и при нахождении базисных свойств собственных функций [15]–[18].

В заключение выражаю благодарность А. И. Козко за постановку задачи, полезные советы и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка // т.1, Москва, ИЛ, 1960.

2. Титчмарш Э. Ч. Теория функций // Москва, “Наука“, 1980.

3. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y''+q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.

4. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.

5. Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля // Математический сборник, 1979, т. 110, №1, 135–149.

6. Ишкин Х. К. Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференц. уравнения, 31:10 (1995), 1658–1668.

7. Насртдинов И. Г. Асимптотика спектра оператора Штурма-–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y(0)\cos(\alpha)+y'(0)\sin(\alpha)=0$ // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, 31 мая 2018 г.

8. Качкина А. В. Асимптотика спектра оператора Штурма-–Лиувилля с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом // Библиотека Чебышевского сборника, XXI Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирования: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы, Тула, 17-21 мая 2022 г.

9. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, 1999, т.66, 897–912.

10. Giertz M., On the solution in $L^2(-\infty, +\infty)$ of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ when q is rapidly increasing // Proceedings of the London Mathematical society, 1962, vol. 3-14, Issue 1, pp. 53-73.

11. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

12. Козко А. И., Печенцов А. С. Спектральная функция сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, №6. С. 107–126.

13. Козко А. И., Печенцов А. С. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков - Математические заметки - 2008. Т. 83, №1. С. 39–49.

14. Садовничий В. А., Печенцов А. С., Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов // Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461-465.

15. Инг Янг, Гуангшенг Вей, Обратные задачи рассеяния для операторов Штурма—Лиувилля с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // Матем. заметки, 103:1 (2018), 65–74; Math. Notes, 103:1 (2018), 59–66.

16. Ишкин Х. К. Спектральные свойства несекториального оператора Штурма–Лиувилля на полуоси // Матем. заметки, 2023, том 113, выпуск 5, страницы 703–722.

17. Лабовский С. М. О дискретности спектра одного функционально-дифференциального оператора // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет. 2015. С. 73-75.

18. Labovskiy S., Getimane M. F. On discreteness of spectrum and positivity of the Green's function for a second order functional-differential operator on semiaxes // Boundary Value Problems. 2014. С. 102.

19. Печенцов А. С. “Распределение спектра одного сингулярного положительного оператора Штурма–Лиувилля, возмущенного дельта–функцией Дирака“ // Дифференц. уравнения,2017, Т. 53. №8. С. 1058-1063.

20. Печенцов А. С. “Распределение спектра оператора Вебера, возмущенного дельта–функцией Дирака“ // Дифференц. уравнения, 2021, т. 57, №8, с. 1032-1038.

21. Pechentsov A. S. “Distribution of the Spectrum of Airy Operator Perturbed by Delta Interactions“, // Russ. J. Math. Phys., 2022, 29, 115–118.

REFERENCES

1. Titchmarsh, E. C. 1960, “Decomposition by eigenfunctions related to second-order differential equations“, vol.1, Moscow, IL.

2. Titchmarsh, E. C. 1980, “Theory of Functions“, *Moscow, Nauka.*

3. Kozko, A. I. 2005, “Asymptotics of the spectrum of the differential operator $-y" + q(x)y$ with a boundary condition at zero and a rapidly growing potential“, *Differ. Equ.*, 41:5, pp. 636–648.

4. Molchanov, A. M. 1953, “On the discreteness conditions of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order“, *The works of Moscow. matem.*, vol.2, pp. 169–200.

5. Murtazin, X. H., Amangildin T. G. 1979, “Asymptotics of the operator spectrum Sturm–Liouville“, *Mathematical Collection*, vol. 110, No. 1, pp. 135–149.

6. Ishkin,X. K. 1995, “The asymptotics of the spectrum and the regularized trace of singular differential operators of higher order“, *Differents. equations*, 31:10, pp. 1658-1668.

7. Nasrtdinov, I. G. 2018, “Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator in $L_2(\mathbb{R}_+)$ with the boundary condition $y(0)\cos(\alpha) + y'(0)\sin(\alpha) = 0$“, *XV International Conference "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of Professor Nikolai Mikhailovich Korobov*, May 31, 2018.

8. Kachkina, A. V. 2022, “Asymptotics of the spectrum of the Sturm—Liouville operator with a boundary condition at zero and a rapidly growing potential“, *Chebyshev Collection Library, XXI International Conference "Algebra, Number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and problems of history dedicated to the 85th anniversary of the birth of A.A. Karatsuba*, Tula, May 17-21, 2022.

9. Savchuk, A. M., Shkalikov, A. A. 1999, “Sturm–Liouville operators with singular potentials“, *Math. notes*, vol.66, pp. 897–912.

10. Giertz, M. 1962, “On the solution in $L^2(-\infty, +\infty)$ of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ when q is rapidly increasing“, *Proceedings of the London Mathematical society*, vol. 3-14, Issue 1, pp. 53-73.

11. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2011, “Regularized traces of singular differential operators with canonical boundary conditions“ *Moscow University Bulletin . Series 1. Matem. Mech.*, № 4, pp. 11–17.

12. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2010, “The spectral function of a singular differential operator of the order of $2m$“, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. The series is mathematical*, vol. 74, №6. pp. 107–126.

13. Kozko, A. I., Pechentsov, A. S. 2008, “Regularized traces of singular differential operators of higher orders“, *Mathematical notes*, vol. 83, №1. pp. 39–49.

14. Sadovnichiy, V. A., Pechentsov, A. S., Kozko, A. I. 2009, “Regularized traces of singular differential operators“, *RAS reports*, vol. 427, pp. 461-465.

15. Ying Yang, Guangsheng Wei. 2018. “Inverse scattering problems for Sturm–Liouville operators with boundary conditions depending on the spectral parameter“, *Matem. notes*, 103:1, 65–74.

16. Ishkin, H. K. 2023. “Spectral properties of the nonsectorial Sturm–Liouville operator on the semiaxis“, *Mat. notes*, volume 113, issue 5, pages 703–722.

17. Labovsky S. M. 2015. “On the Discreteness of the Spectrum of a Functional Differential Operator“, *Control Theory and Mathematical Modeling. Abstracts of the All-Russian Conference with international participation, dedicated to the memory of Professor N.V. Azbelev and Professor E.L. Tonkov. Udmurt State University.* pp. 73-75.

18. Labovskiy, S., Getimane, M. F. 2014. “On discreteness of spectrum and positivity of the Green’s function for a second order functional-differential operator on semiaxes“, *Boundary Value Problems*, p. 102.

19. Pechentsov, A. S. 2022. “Distribution of the Spectrum of a singular positive Sturm–Liouville operator Perturbed by the Dirac delta function“, *Diff Equat*, vol. 53, №8, 1029-1034.

20. Pechentsov, A. S. 2021. “Spectral Distribution of the Weber Operator by the Dirac Delta Function“, *Diff Equat*, 57, №8, 1003–1009.

21. Pechentsov, A. S. 2022. “Distribution of the Spectrum of Airy Operator Perturbed by Delta Interactions“, *Russ. J. Math. Phys.*, 29, 115–118.

Получено: 17.02.2024
Принято в печать: 04.09.2024