ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-118-142

Точные обёртывающие кольца нильтреугольного кольца типа G_2 и их автоморфизмы[1]

А. В. Казакова

Казакова Алёна Викторовна — Сибирский федеральный университет (г. Красноярск).
e-mail: alvkazakova@gmail.com

Аннотация

Строение алгебры Шевалле над полем или кольцом K, ассоциированной с неразложимой системой корней Φ, существенно зависит от ее нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$. Для $N\Phi(K)$ оказалось естественным использовать введенную в 2018 году точную обёртывающую алгебру R, имеющую один с $N\Phi(K)$ базис. Известно, что изоморфность колец Ли $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих колец R это свойство нарушается. Поэтому вопрос описания их автоморфизмов был расширен до нахождения всех неизоморфных точных обёртывающих колец $N\Phi(K)$ типа G_2 над K, и только затем нахождения явного описания их автоморфизмов. Для классических типов найдено описание автоморфизмов колец R над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей [13]. В статье перечислены все неизоморфные точные обёртывающие кольца $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Также найдено явное описание их автоморфизмов.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Шевалле, точная обёртывающая алгебра, нильтреугольная подалгебра, стандартный автоморфизм, верхний центральный ряд, гиперцентральный автоморфизм.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Казакова, А. В. Точные обёртывающие кольца нильтреугольного кольца типа G_2 и их автоморфизмы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 118–142.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.554 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-118-142

The faithful enveloping rings of the nil-triangular ring of type G_2 and their automorphisms

A. V. Kazakova

Kazakova Alyona Viktorovna — Siberian Federal University (Krasnoyarsk).
e-mail: alvkazakova@gmail.com

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Abstract

The structure of the Chevalley algebra over a field or ring K, associated with an indecomposable root system Φ, essentially depends on its nil-triangular subalgebra $N\Phi(K)$. It turned out to be natural for $N\Phi(K)$ to use the faithful enveloping algebra R, introduced in 2018, which has the same basis as $N\Phi(K)$. It is known that the isomorphism of the Lie rings $N\Phi(K)$ does not depend on the choice of signs of the structure constants $N_{r,s}$. However, for faithful enveloping rings R this property is violated. Therefore, the question of describing their automorphisms was extended to finding all non-isomorphic faithful enveloping rings $N\Phi(K)$ of type G_2 over K, and only then finding an explicit description of their automorphisms.

Keywords: Lie algebra, Chevalley algebra, faithful enveloping algebra, nil-triangular subalgebra, standard automorphism, upper central series, hypercentral automorphism.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
Kazakova, A. V. 2024, "The faithful enveloping rings of the nil-triangular ring of type G_2 and their automorphisms" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 118–142.

1. Введение

Ассоциативное кольцо R всегда превращается в кольцо Ли $R^{(-)}$, если определим новое умножение $x * y = xy - yx$, сохраняя сложение. Кольцо $R^{(-)}$ будем сопоставлять произвольному (не обязательно ассоциативному) кольцу R. Алгебра R называется *точной обёртывающей алгебры Ли* L, если $R^{(-)}$ и L изоморфны, т.е. их можно построить на одном линейном пространстве. Близкое понятие *Ли-допустимой алгебры* связывал с алгебрами Ли А. Альберт [1], см. также [2], [3]

Алгебру Шевалле над полем или ассоциативно-коммутативым кольцом K характеризуют системой корней Φ и базисом Шевалле, который составляют подходящий базис подалгебры Картана и вектора e_r, $r \in \Phi$. Подалгебру с базизом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ для системы Φ^+ положительных корней как и в [4] обозначим через $N\Phi(K)$ и назовём *нильтреугольной.*

Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ при ограничениях $K = 2K = 3K$ на кольцо K описаны в 2007 году в [5]. Известно, что автоморфизмы алгебры $N\Phi(K)$ являются и автоморфизмами множества $N\Phi(K)$, рассматриваемого как кольцо. При переходе от алгебр к кольцам Ли группа автоморфизмов расширяется, поскольку в кольце не обязано сохраняться умножение на скаляр. Добавляются кольцевые автоморфизмы, индуцированные автоморфизмами основного кольца.

Впервые вопрос описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ был решён в В.М. Левчуком [4] в 1983 году для типа A_n взаимосвязано с описанием группы автоморфизмов унитреугольной группы U над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ выявлены в [6] также для типа D_4 над коммутативным кольцом K с единицей. В работах [7], [8] и [9] их описание редуцировано к исключительным типам G_2 и F_4. Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2, когда K есть область целостности и $K = 2K = 3K$ или $3K = 0$ были получены в [10] и, когда K – поле и $2K = 0$ – в [11]. Помимо стандартных автоморфизмов появляются исключительные автоморфизмы. В [12] и [5] появляется только один тип исключительных автоморфизмов. Оказывается, когда $Ann_2 \neq 0$ появляются разнообразные исключительные автоморфизмы, что потребовало в [6] ввести для их систематизации обобщение центральных автоморфизмов – гиперцентральные автоморфизмы.

Автоморфизм группы или кольца Ли L, единичный по модулю m-го гиперцентра и неединичный по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты* m (кратко, *гиперцентральным*, когда L не совпадает с m-м гиперцентром).

Основные операции кольца $R^{(-)}$ являются производными от операций в R. Поэтому известно [13, лемма 2], что автоморфизмы любого кольца R образуют подгруппу в группе автоморфизмов $Aut\ R^{(-)}$. Отсюда естесственно возник вопрос описания автоморфизмов точных обёртывающих колец R. Известно, что изоморфность колец Ли $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих алгебр R это свойство нарушается. Поэтому вопрос описания их автоморфизмов расширяется до нахождения всех неизоморфных точных обёртывающих колец $N\Phi(K)$ типа G_2 над K, и только затем нахождения явного описания их автоморфизмов.

Для классических типов описаны автоморфизмы колец R в [13] над любым ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Знаки структурных констант там зафиксированы в соответствии с [14, предложение 4.2.2]. Неклассические типы остаются неисследованными. В данной статье получено описание автоморфизмов всех неизоморфных точных обёртывающих колец R типа G_2 над K.

2. Стандартные и гиперцентральные автоморфизмы. Точные обёртывающие кольца

Для описания автоморфизмов колец нам потребуются определённые характеристические идеалы. Аннулятором множества M в произвольном кольце R называем множество

$$Ann_R(M) = \{\alpha \in R \mid M\alpha = \alpha M = 0\}.$$

В произвольном кольце Ли $R = (R, +, *)$, аналогично группам, вводят *гиперцентральный* или *верхний* центральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_i \subseteq Z_{i+1} \subseteq \ldots,$$

$$Z_{i+1} := \{g \in R \mid g * R \subseteq Z_i\} \quad (i \geq 0),$$

и *нижний* центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_n \supseteq \ldots, \quad \Gamma_{n+1} := \Gamma_n * R \ \ (n \geq 1).$$

Пусть Φ^+ – множество положительных корней системы Φ, а $\Pi = \{r_1, ..., r_l\}$ – её фундаментальная система простых корней из Φ. Для любого $r \in \Phi$ через $ht(r)$ обозначим высоту корня r. По определению при $r = a_1r_1 + ...a_lr_l$ полагаем $ht(r) = a_1 + ...a_l$. Согласно теореме о базисе алгебры Шевалле [14, теорема 4.2.1], для произвольных корней $r, s \in \Phi^+$ имеем $e_r * e_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$ и

$$e_r * e_s = N_{r,s}e_{r+s}, \quad N_{s,r} = -N_{r,s} \ \ (r + s \in \Phi), \tag{1}$$

где структурные константы $N_{r,s} = \pm 1$, ± 2 или ± 3, причём равенство $N_{r,s} = \pm 3$ возможно только для для Φ типа G_2.

В [14] выделяются специальные пары положительных корней (r, s) с суммой $r + s \in \Phi^+$, а среди них – экстраспециальные пары. Известно, что знаки структурных констант $N_{r,s}$ можно выбирать произвольно, только когда пара r, s – экстраспециальная. Для специальных пар, не являющихся экстраспециальными, знаки вычисляются по формулам из [14].

Лемма 1. *[13] Точной обёртывающей алгебры Ли $N\Phi(K)$ является K- алгебра R с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ и умножением: $e_re_s = 0$ при $r + s \notin \Phi$, а если $r, s, r + s \in \Phi^+$ и $N_{r,s} \geq 1$, то $e_re_s = e_{r+s}$ и $e_se_r = (1 - N_{r,s})e_{r+s}$.*

Известно, что изоморфность алгебр $N\Phi(K)$ не зависит от выбора знаков структурных констант $N_{r,s}$. Однако, для точных обёртывающих алгебр R это свойство нарушается.

В алгебре Шевалле типа Φ над K подалгебра $N\Phi(K)$ характеристична относительно каждого *корневого* автоморфизма $x_r(t)$ $(r \in \Phi, t \in K)$, [14, §4.3]. Его ограничение даёт автоморфизм подалгебры $N\Phi(K)$

$$x_r(t) : e_r \longrightarrow e_r, \quad e_s \longrightarrow \sum_{i=0}^{q} M_{r,s,i} t^i e_{ir+1} \quad (s \in \Phi^+ \backslash \{r\}),$$

$$M_{r,s,0} := 1, \quad M_{r,s,i} := (1/i!) N_{r,s} N_{r,r+s} \dots N_{r,(i-1)r+s}.$$

Все корневые автоморфизмы $x_r(t)$ порождают подгруппу J *внутренних* автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$. Известно, что она изоморфна фактор-группе унипотентной группы $U = U\Phi(K)$ по центру.

Диагональный автоморфизм $h(\chi) : e_r \longrightarrow \chi(r) e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют любому K-характеру χ решётки корней, то есть гомоморфизму подгруппы $\langle\Phi\rangle^+$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [14, §7.1]. Хорошо известно, что χ определяется однозначно значениями на простых корнях.

Кольцевые автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$ выделяем по аналогии с [14]. Произведения внутренних, диагональных, кольцевых и центральных автоморфизмов называют *стандартными.*

В [14] введен *стандартный* центральный ряд алгебры Ли $N\Phi(K)$, где

$$L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0,$$

$$L_i := \langle K e_r \mid r \in \Phi^+, ht(r) \geq i \rangle \quad (1 \leq i \leq h-1).$$

По определению, *степень* R^m аддитивно порождают все произведения элементов из R конечной длины $\geq m$ с любыми расстановками скобок.

Известно, что характеристичность L_m в кольце Ли $N\Phi(K)$ может нарушаться, когда в кольце K элемент 2 или (тип G_2) 3 необратим [13]. Однако, для точных обёртывающих колец R типа G_2 верна [13]

Лемма 2. *Идеалы L_m в кольце R характеристичны и $L_m = R^m$.*

Описание верхних и нижних центральных рядов для колец $N\Phi(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей завершено в [8], [9] для классических типов, в [10] для типа G_2 и для F_4 см. [15].

В статье перечислены автоморфизмы неизоморфных точных обёртывающих колец R типа G_2. Пусть a, b простые корни для Φ типа G_2, корень a — короткий и $|a| < |b|$. Тогда

$$\Phi^+ = \{a, b, a+b, 2a+b, 3a+b, 3a+2b\}.$$

3. Изоморфизм точных обёртывающих колец R

Далее установим критерии изоморфизма точных обёртывающих колец R колец Ли $N\Phi(K)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Далее нам потребуются следующие две леммы, первая из которых очевидна.

Лемма 3. *В кольце с 1 для любого $x \in K$ из равенства $xK = K$ следует обратимость в K элемента x.*

Лемма 4. *Пусть R_1, R_2 – произвольные изоморфные кольца, ϕ – изоморфизм из R_1 в R_2: $\phi(R_1) = R_2,\ N_i \subseteq R_i,\ M_i \subseteq R_i$ ($i = 1$ или 2), $\phi(N_1) = N_2,\ \phi(M_1) = M_2$. Тогда под действием ϕ сохраняются идеалы:*

$$C^r_{\mathrm{mod}N}(M) := \{\gamma \in R \mid \alpha\gamma = 0\mathrm{mod}N, \alpha \in M\},$$
$$C^l_{\mathrm{mod}N}(M) := \{\gamma \in R \mid \gamma\alpha = 0\mathrm{mod}N, \alpha \in M\},$$
$$Ann^r(M), Ann^l(M).$$

Доказательство. Пусть $x \in C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)$ – правому централизатору множества M_1 по модулю множества N_1. Тогда $\phi(0\mathrm{mod}N_1) = \phi(M_1 \cdot x) = M_2 \cdot \phi(x) \subseteq N_2$, следовательно, $\phi(x) \in C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$, откуда $\phi(C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)) \subseteq C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$. Так как ϕ – изоморфизм, то $\phi(C^r_{\mathrm{mod}N_1}(M_1)) = C^r_{\mathrm{mod}N_2}(M_2)$. Аналогичное доказательство для левого централизатора кольца R_1.

Пусть $x \in Ann^r_{N_1}(M_1)$, тогда $0 = \phi(0) = \phi(M_1 \cdot x) = M_2 \cdot \phi(x)$, откуда $\phi(x) \in Ann^r_{N_2}(M_2)$. Так как ϕ – изоморфизм, то $\phi(Ann^r_{N_1}(M_1)) = Ann^r_{N_2}(M_2)$. Аналогичное доказательство для левого аннулятора кольца R_1. $\square$

Теорема 1. *Если char $K \neq 3$, то два точных обёртывающих кольца R_1 и R_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2)$, $N_{a,2a+b}(R_1) = N_{a,2a+b}(R_2)$, $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2)$. А при char $K = 3$ необходимо и достаточно выполнения условий: $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2)$, $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2)$.*

Доказательство. Пусть ϕ – произвольный изоморфизм точных обёртывающих колец R_1 и R_2. Рассмотрим действие ϕ при различном выборе знаков структурных констант $N_{r,s}$.

I. $N_{a,b}(R_1) = 1,\ N_{a,b}(R_2) = -1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^l R_1 = Ke_b + Ke_{3a+2b},\ Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b}.$$

Из того, что идеалы $Ann^l R_i$ ($i = 1, 2$) и $AnnR = Ke_{3a+2b}$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$\phi(Ke_b + Ke_{3a+2b}) = \phi(Ann^l R_1) = Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b} = \phi(AnnR) = \phi(Ke_{3a+2b}),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

2) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём правые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^r R_1 = \Delta_2 tKe_{2a+b} + Ke_{3a+2b},\ Ann^r R_2 = Ke_b + Ke_{3a+2b},$$

где $t = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$ и $i = 1, 2$, в остальных случаях $t = 0$. Из того, что идеалы L_3, $Ann^r R_i$ ($i = 1, 2$) сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$Ke_b + Ke_{3a+2b} = Ann^r R_2 = \phi(Ann^r R_1) = \phi(\Delta_2 tKe_{2a+b} + Ke_{3a+2b}) \subseteq \phi(L_3) = L_3,$$

но $Ke_b + Ke_{3a+2b} \nsubseteq L_3$. Отсюда следует, что ϕ – не изоморфизм.

3) $N_{b,3a+b}(R_1) = 1, N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Определим правые степени колец $R^k := \{(R^{k-1} * R)\}(k \geq 1)$. Очевидно, что ϕ сохраняет степени колец R_1 и R_2. Найдём R_1^5 и R_2^5:

$$R_1^5 = 0,\ R_2^5 = mKe_{3a+2b},$$

где $m=-2$ при $N_{a,2a+b}(R_2)=3$ и в остальных случаях $m=1$. При $m=1$, очевидно, что ϕ – не изоморфизм. Рассмотрим случай, когда $m=-2$. Из равенства $2K=0$ следует, что $charK=2$. Вычислим правые аннуляторы идеала L_2 для каждого из R_i

$$Ann_{R_1}(L_2)=Ke_b\mathrm{mod}L_2,\ Ann_{R_2}(L_2)=\Delta_2Ke_{a+b}+Ke_{3a+2b}.$$

Учитывая, что идеалы $L_2, Ann_{R_i}(L_2)$ сохраняются под действием ϕ, и выполняются равенства

$$\phi(Ann_{R_1}(L_2))=\phi(Ke_b\mathrm{mod}L_2)=Ann_{R_2}(L_2)\subseteq L_2=\phi(L_2),$$

но $Ke_b\nsubseteq L_2$, следовательно, ϕ – не изоморфизм.

4) $N_{b,3a+b}(R_1)=-1, N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^lR_1=Ke_b+Ke_{3a+2b},\ Ann^lR_2=L_4,$$

Из того, что идеалы L_4, Ann^lR_i сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$\phi(L_4)=L_4=Ann^lR_2=\phi(Ann^lR_1)=\phi(Ke_b+Ke_{3a+2b}),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

II. $N_{a,b}(R_1)=N_{a,b}(R_2)=1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1)=N_{b,3a+b}(R_2)=-1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)=Ke_a+L_2=C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$ и $Ann^l(R_1)=Ke_b+Ke_{3a+b}=Ann^l(R_2)$. В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то ϕ действует

$$\phi(xe_a)=x^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,\quad \phi(ye_b)=y^\lambda e_b\mathrm{mod}L_4,$$

где $\sigma,\lambda\in End\ K^+$. Сюръективность σ,λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma=K=K^\lambda$, следует из того, что ϕ сохраняет идеалы $C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1), Ann^l(R_1), L_5$ и двух серий равенств

$$Ke_a+L_2=C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)=\phi(C^r_{\mathrm{mod}L_3}(R_1))=\phi(Ke_a)+L_2=K^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b+L_5=Ann^l(R_2)=\phi(Ann^l(R_1))=\phi(Ke_b)+L_5=K^\lambda e_b\mathrm{mod}L_5.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma,1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$L_2=\phi(L_2)=\phi(Ke_{a+b}+L_3)=\phi(Ke_{a+b})+L_3=\phi(Ke_a\cdot 1e_b)+L_3=$$
$$\phi(1e_a\cdot Ke_b)+L_3=K^\sigma 1^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}L_3=1^\sigma K^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}L_3.$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ,λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_ae_b)=\phi(e_{a+b})=1^\sigma 1^\lambda e_{a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$
$$\phi(e_ae_{a+b})=\phi(k_1e_{2a+b})=k_21^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{2a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$

при $k_i=1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=2$, $k_i=-1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=-2$, где $i=1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b})=\phi(k_1l_1e_{3a+b})=k_2l_21^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{2}$$
$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a)=\phi(k_1l_2e_{3a+b})=k_2l_11^\sigma1^\sigma1^\sigma1^\lambda e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{3}$$

где $l_i = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = 3$, $l_i = -2$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$, где $i = 1$ или 2. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$, то есть $l_1 \neq l_2$. Пусть $l_1 = 1$, тогда $l_2 = -2$. Домножив на -2 в (2), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b}) = \phi(-2k_1e_{3a+b}) = 4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{4}$$

Из равенства (3) и (4), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3 = 0$, то есть $charK = 3$. Аналогичные вычисления проводятся для случая $l_1 = -2$ и $l_2 = 1$ и произвольных $N_{2a+b}(R_i)$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK = 3$.

2) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. При равных $N_{a,2a+b}(R_i)$ изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ при $N_{a,2a+b}(R_1) = 3$, $N_{a,2a+b}(R_2) = -3$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod} L_3}(R_1) = Ke_a + L_2 = C^r_{\mathrm{mod} L_3}(R_2)$, $C^l_{\mathrm{mod} AnnR}(R_1) = Ke_b + \Delta_2 Ke_{2a+b} + L_4$ и $C^l_{\mathrm{mod} AnnR}(R_2) = Ke_b + L_4$. В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то ϕ действует

$$\phi(xe_a) = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2, \quad \phi(ye_b) = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

где $\sigma, \lambda \in End\ K^+$. Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из двух серий равенств

$$\begin{gathered} Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_1)) = \\ \phi(Ke_a + L_2) = \phi(Ke_a) + L_2 = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2, \end{gathered}$$

$$Ke_b \mathrm{mod} L_3 = C^l_{\mathrm{mod} AnnR}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod} AnnR}(R_1)) = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$\begin{gathered} L_2 = \phi(L_2) = \phi(Ke_{a+b} + L_3) = \phi(Ke_{a+b}) + L_3 = \phi(Ke_a \cdot 1e_b) + L_3 = \\ \phi(1e_b \cdot Ke_a) + L_3 = K^\sigma 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3 = 1^\sigma K^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3. \end{gathered}$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ, λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\begin{gathered} \phi(e_ae_b) = \phi(e_{a+b}) = 1^\sigma 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_4, \\ \phi(e_ae_{a+b}) = \phi(k_1e_{2a+b}) = k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{2a+b} \mathrm{mod} AnnR, \end{gathered}$$

при $k_i = 1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = 2$, $k_i = -1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = -2$, где $i = 1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b}) = \phi(k_1l_1e_{3a+b}) = k_2l_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{5}$$

$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a) = \phi(k_1l_2e_{3a+b}) = k_2l_1 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{6}$$

где $l_i = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = 3$, $l_i = -2$ при $N_{a,2a+b}(R_i) = -3$, где $i = 1$ или 2. Домножим на -2 в (5), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b}) = \phi(-2k_1e_{3a+b}) = 4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{7}$$

Из равенства (6) и (7), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3 = 0$, то есть $charK = 3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK = 3$.

3) $N_{b,3a+b}(R_1) = -1, N_{b,3a+b}(R_2) = 1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. Найдём левые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^l R_1 = Ke_b + Ke_{3a+2b},\ Ann^l R_2 = \Delta_2 t K e_{2a+b} + Ke_{3a+b} + Ke_{3a+2b},$$

где $t = 1$ при $N_{a,2a+b}(R_1) = -3$ и $t = 0$ в остальных случаях. Из того, что идеалы $AnnR$, R_i, и $Ann^l R_i$ при $i = 1, 2$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполяются равенства

$$\begin{aligned}&\phi(Ke_{a+b} + Ke_{3a+2b}) = \phi(R_1 \cdot (Ke_b + Ke_{3a+2b})) = \phi(R_1 \cdot Ann^l R_1) =\\ &R_2 \cdot Ann^l R_2 = Ke_{3a+2b} = AnnR = \phi(AnnR) = \phi(Ke_{3a+2b}),\end{aligned}$$

следует, что ϕ – не изоморфизм.

III. $N_{a,b}(R_1) = N_{a,b}(R_2) = -1$.

1) $N_{b,3a+b}(R_1) = N_{b,3a+b}(R_2) = -1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i = 1, 2$. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$. Пусть $N_{a,2a+b}(R_1) = 3$, $N_{a,2a+b}(R_2) = -3$.

Учитывая, что ϕ сохраняет идеалы L_2, L_3 и L_4 проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R_1) := \{\gamma \in R \mid \alpha\gamma = 0 \mathrm{mod} L_4 \quad \forall \alpha \in R_1\} = Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R_2)$ и $C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_1) = Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_2)$. Кольца R_i порождаются аддитивными подгруппами Ke_a и Ke_b, поэтому действие на них характеризует ϕ

$$\phi(xe_a) = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2, \quad \phi(ye_b) = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

где $\sigma, \lambda \in End\ K^+$. Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из того, что ϕ сохраняет идеалы $C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R_1), C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_1)$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_2) = \phi(C^l_{\mathrm{mod} L_3}(R_1)) = \phi(Ke_a) + L_2 = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R_2) = \phi(C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R_1)) = \phi(Ke_b) + L_3 = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

В силу того, что ϕ сохраняет множества L_2 и L_3, то имеем

$$\begin{aligned}&L_2 = \phi(L_2) = \phi(Ke_{a+b} + L_3) = \phi(Ke_{a+b}) + L_3 = \phi(Ke_b \cdot 1e_a) + L_3 =\\ &\phi(1e_b \cdot Ke_a) + L_3 = K^\lambda 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3 = 1^\lambda K^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3.\end{aligned}$$

Откуда и из леммы 3 следует обратимость в K элементов $1^\sigma, 1^\lambda$. Исследуем действие эндоморфизмов σ, λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\begin{aligned}\phi(e_b e_a) = \phi(e_{a+b}) = 1^\lambda 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\\ \phi(e_a e_{a+b}) = \phi(k_1 e_{2a+b}) = k_2 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{2a+b} \mathrm{mod} AnnR,\end{aligned}$$

при $k_i = 1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = 2$, $k_i = -1$ при $N_{a,a+b}(R_i) = -2$, где $i = 1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_a k_1 e_{2a+b}) = \phi(k_1 e_{3a+b}) = (-2) k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{8}$$

$$\phi(k_1 e_{2a+b} e_a) = \phi(-2k_1 e_{3a+b}) = k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{9}$$

Домножив на -2 в (8), получим

$$\phi(-2k_1 e_a e_{2a+b}) = \phi(-2k_1 e_{3a+b}) = 4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR. \tag{10}$$

Из равенства (9) и (10), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3=0$, то есть $charK=3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK=3$.

2) $N_{b,3a+b}(R_1)=N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. При одинаковых $N_{a,2a+b}(R_i)$ для каждой из R_i изоморфизм получается тривиально. Проверим действие ϕ для разных $N_{a,2a+b}(R_i)$. Пусть $N_{a,2a+b}(R_1)=3$, $N_{a,2a+b}(R_2)=-3$.

Проверим действие изоморфизма ϕ, используя идеалы $C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)=Ke_a+L_2=C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)$ и $Ann^r(R_1)=Ke_b+AnnR=Ann^r(R_2)$. В силу того, что ϕ сохраняет идеалы $C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1)$, $Ann^r(R_1), L_2$ и $AnnR$, то ϕ действует

$$\phi(xe_a)=x^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,\quad \phi(ye_b)=y^\lambda e_b\mathrm{mod}AnnR,$$

где $\sigma,\lambda\in End\ K^+$. Сюръективность σ,λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma=K=K^\lambda$, следует из следующих двух серий равенств

$$Ke_a+L_2=C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_2)=\phi(C^l_{\mathrm{mod}L_3}(R_1))=\phi(Ke_a)+L_2=K^\sigma e_a\mathrm{mod}L_2,$$

$$Ke_b+AnnR=Ann^r(R_2)=\phi(Ann^r(R_1))=\phi(Ke_b)+AnnR=K^\lambda e_b\mathrm{mod}AnnR.$$

Обратимость в K элементов $1^\sigma,1^\lambda$ следует из леммы 3 и равенств

$$L_2=\phi(L_2)=\phi(Ke_{a+b}+L_3)=\phi(Ke_{a+b})+L_3=\phi(Ke_b\cdot 1e_a)+L_3=$$
$$\phi(1e_b\cdot Ke_a)+L_3=K^\lambda 1^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}L_3=1^\lambda K^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}L_3.$$

Исследуем действие эндоморфизмов σ,λ, проверив все соотношения изоморфизма ϕ. Пусть

$$\phi(e_be_a)=\phi(e_{a+b})=1^\lambda 1^\sigma e_{a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$
$$\phi(e_ae_{a+b})=\phi(k_1e_{2a+b})=k_2 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{2a+b}\mathrm{mod}AnnR,$$

при $k_i=1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=2$, $k_i=-1$ при $N_{a,a+b}(R_i)=-2$, где $i=1$ или 2. В любом из случаев

$$\phi(e_ak_1e_{2a+b})=\phi(k_1l_1e_{3a+b})=k_2l_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{11}$$
$$\phi(k_1e_{2a+b}e_a)=\phi(k_1l_2e_{3a+b})=k_2l_1 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR, \tag{12}$$

Домножив на -2 в (11), получим

$$\phi(-2k_1e_ae_{2a+b})=\phi(-2k_1e_{3a+b})=4k_2 1^\sigma 1^\sigma 1^\lambda 1^\sigma e_{3a+b}\mathrm{mod}AnnR. \tag{13}$$

Из равенства (12) и (13), обратимости элементов 1^σ и 1^λ получим, что $3=0$, то есть $charK=3$. Остальные соотношения проверяются тривиально. Откуда ϕ – изоморфизм тогда и только тогда, когда $charK=3$.

3) $N_{b,3a+b}(R_1)=-1$, $N_{b,3a+b}(R_2)=1$, но $N_{a,a+b}(R_i)$, $N_{a,2a+b}(R_i)$ выбираются произвольно для любых $i=1,2$. Найдём правые аннуляторы колец R_1 и R_2:

$$Ann^rR_1=\Delta_2tKe_{2a+b}+Ke_{3a+b}+Ke_{3a+2b},\ \ Ann^rR_2=Ke_b+Ke_{3a+2b},$$

где $t=1$ при $N_{a,2a+b}=-2$, $t=0$ при $N_{a,2a+b}=2$. Из того, что идеалы Ann^rR_i $(i=1,2)$, $AnnR$ сохраняются под действием произвольного изоморфизма ϕ и выполняются равенства

$$Ke_{a+b}\mathrm{mod}AnnR=Ann^rR_2\cdot R_2=\phi(Ann^rR_1\cdot R_1)\subseteq L_3=\phi(L_3),$$

следует, что ϕ – не изоморфизм. $\square$

Следствие 1. *Число неизоморфных точных обёртывающих колец при char $K\neq 3$ равно 8, при char $K=3$ равно 4.*

4. Автоморфизмы точных обёртывающих колец R типа G_2

Выделим нестандартные автоморфизмы точного обёртывающего кольца R алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 при $t \in K$ следующих трёх типов.

$$\begin{aligned} \xi_1(t) : e_a &\longrightarrow e_a + te_{a+b}, \quad e_{3a+b} \longrightarrow e_{3a+b} + te_{3a+2b}, \\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \xi_2(t) : \quad e_a &\longrightarrow e_a + te_{3a+b}, \quad e_{a+b} \longrightarrow e_{a+b} + te_{3a+2b}, \\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \xi_3(t) : e_a &\longrightarrow e_a + te_{a+b}, \quad e_{3a+b} \longrightarrow e_{3a+b} - 2te_{3a+2b}, \\ e_r &\longrightarrow e_r \quad \text{для остальных } r \in \Phi^+. \end{aligned} \tag{16}$$

Автоморфизм (14) является внутренним автоморфизмом кольца Ли $NG_2(K)$. Автоморфизмы (15) и (16) являются гиперцентральными автоморфизмами кольца Ли $NG_2(K)$ высоты 2 и 4 соответственно.

Исследуем автоморфизмы точных обёртывающих колец R кольца Ли $N\Phi(K)$ типа G_2.

Теорема 2. *Произвольный автоморфизм точного обёртывающего кольца R – есть произведение стандартного автоморфизма и одного из наборов автоморфизмов соответственно:*

1. *вида* (14), *если $Ke_b \subseteq Ann^l R$ или $Ann^r R$;*
2. *вида* (15) *и вида* (16) *в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть R – точное обёртывающее кольцо кольца Ли $NG_2(K)$ и $\phi \in AutR$. Кольцо R порождается аддитивными подгруппами Ke_a, Ke_b. Поэтому действие ϕ на них определяет автоморфизм ϕ однозначно. Используя определение (1) и лемму 1, находим, что $Ann\ R = Ke_{3a+2b}$ для любого точного обёртывающего кольца.

1. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = 1$.
Ясно, что централизаторы идеалов $L_i,\ i = 1,2,3,4,5$ характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $Ke_b + L_3 = C^l_{\text{mod}L_4}(R)$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_i,\ i = 1,2,3,4,5$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \text{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \text{mod} L_3,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^l_{\text{mod}L_4}(R), L_2, L_3$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \text{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^l_{\text{mod}L_4}(R) = (C^l_{\text{mod}L_4}(R))^\phi = (Ke_b)^\phi + (L_3)^\phi = K^\lambda e_b \text{mod} L_3.$$

Докажем инъективность σ. Пусть $x, y \in K$ и $x \neq y$, тогда

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_a)^\phi = y^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2.$$

Предположим, что $x^\sigma = y^\sigma = c$, тогда

$$(xe_a)^\phi = ce_a + Y_1,\ Y_1 \in L_2,$$

$$(ye_a)^\phi = ce_a + Y_2,\ Y_2 \in L_2.$$

Пусть $Y_1 - Y_2 = Y \in L_2$ и $A = ce_a + Y_1,\ B = ce_a + Y_2$, откуда

$$1)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = A^{\phi^{-1}} - B^{\phi^{-1}} = (x-y)e_a.$$

$$2)\ (A-B)^{\phi^{-1}} = Y^{\phi^{-1}} \in L_2.$$

Учитывая характеристичность L_2 и 1), из 2) получаем, что $Y^{\phi^{-1}} = 0$, откуда $x = y$. Инъективность σ доказана. Аналогичное доказательство для $\lambda \in End\ K^+$. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Считаем, что $s > r$, если коэффициенты разложения $s - r$ по базе $\Pi(\Phi^+)$ положительны. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^{\lambda'} e_{2a+b} + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda', \lambda'' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (x1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''})e_{3a+b}\mathrm{mod} AnnR, \tag{17}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned}(xe_{a+b})^\phi &= (xe_a * e_b)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\lambda'}e_{3a+b}\mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_{a+b})^\phi &= (e_a * xe_b)^\phi = xe_{a+b} + x^{\lambda'}e_{3a+b}\mathrm{mod} Ann\ R,\end{aligned} \tag{18}$$

откуда $x1^{\lambda'} = x^{\lambda'}$.

$$\begin{aligned}(l_2 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''}e_{3a+2b},\\ (l_2 xe_{2a+b})^\phi &= (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''}e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{19}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$.

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_b)^\phi = x^{\lambda''}e_{3a+2b}, \tag{20}$$

откуда $x^{\lambda''} = 0$, то есть $\lambda'' = 0$ для всех $x \in K$. Из (17)-(20) следует, что $\sigma', \sigma'', \lambda' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned}(xe_a)^\phi &= xe_a + x^{\sigma''}e_{2a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+b}\mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_b)^\phi &= xe_b + x^{\lambda'}e_{2a+b}\mathrm{mod} Ann\ R.\end{aligned}$$

Откуда

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = (-2)\cdot 1^{\lambda'}xe_{3a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (x1^{\sigma''} - 2\cdot x^{\sigma''})e_{3a+b},$$

откуда $x^{\sigma''} = 0$, то есть $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее, из равенств $0 = 0^\phi = (e_{a+b} * xe_b)^\phi =$ $= x^{\lambda'}e_{3a+2b}$, получаем равенство $\lambda' = 0$.

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) =$ $= e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

2. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = -1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $Ann^l R = Ke_b + AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $Ann^l R, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^l R = (Ann^l R)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{21}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned}(l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (e_a * xe_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},\\ (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_a * e_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{22}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Из (21),(22) следует, что $\sigma', \sigma'' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned}(xe_a)^\phi &= xe_a + x^{\sigma''} e_{2a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_b)^\phi &= xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.\end{aligned}$$

Откуда
$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (x1^{\sigma''} - 2 \cdot x^{\sigma''})e_{3a+b},$$
откуда $x^{\sigma''} = 0$, то есть $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$.

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = = e_a + se_{3a+2b}$, $(1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K)$, $(1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a$, $(xe_b)^{\phi} = xe_b$.

3. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = 1$. Ясно, что централизаторы идеалов L_i, $i = 1,2,3,4,5$ характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = Ke_b + L_4$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_4, получаем
$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma}e_a\mathrm{mod}L_2,$$
$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda}e_b\mathrm{mod}L_4,$$
для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^{\sigma} = K = K^{\lambda}$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R), L_2, L_4$ и двух серий равенств
$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} + (L_2)^{\phi} = K^{\sigma}e_a\mathrm{mod}L_2,$$
$$Ke_b + L_4 = C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R) = (C^l_{\mathrm{mod}AnnR}(R))^{\phi} = (Ke_b)^{\phi} + (L_4)^{\phi} = K^{\lambda}e_b\mathrm{mod}L_4.$$
Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств
$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} * e_b^{\phi} = K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda}e_{a+b},$$
$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = e_a^{\phi} * (Ke_b)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot K^{\lambda}e_{a+b},$$
откуда $K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} = K$ и $1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} = K$. Обратимость в K элементов 1^{σ} и 1^{λ} следует из того, что $K^{\sigma} = K$, $K^{\lambda} = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^{\sigma} = 1^{\lambda} = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт
$$(xe_a * e_b)^{\phi} = (xe_a)^{\phi} * e_b^{\phi} = x^{\sigma} \cdot 1^{\lambda}e_{a+b},$$
$$(xe_a * e_b)^{\phi} = e_a^{\phi} * (xe_b)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot x^{\lambda}e_{a+b},\ (x \in K).$$
Поэтому $x^{\lambda} = x^{\sigma}$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)
$$x^{\sigma} \cdot y^{\sigma}e_{a+b} = (x^{\sigma}e_a) * (y^{\sigma}e_b) = (xe_a)^{\phi} * (ye_b)^{\phi} = (xye_a * e_b)^{\phi} = (xy)^{\sigma}e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда
$$(xe_r)^{\phi} = xe_r\mathrm{mod}Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a + x^{\sigma'}e_{a+b} + x^{\sigma''}e_{2a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^{\phi} = xe_b + x^{\lambda'}e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^{\phi} = (e_b * xe_b)^{\phi} = x^{\lambda'}e_{3a+2b},$$

откуда $x^{\lambda'} = 0$, то есть $\lambda' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^{\phi} = (e_b * xe_a)^{\phi} = (-2) \cdot 1^{\lambda'}xe_{3a+b} + x^{\sigma'''}e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (l_1x1^{\sigma'} + l_2x^{\sigma'})e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{23}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2xe_{2a+b})^{\phi} = (xe_{a+b} * e_a)^{\phi} = l_2xe_{2a+b} + x1^{\sigma''}e_{3a+2b},$$
$$(l_2xe_{2a+b})^{\phi} = (e_{a+b} * xe_a)^{\phi} = l_2xe_{2a+b} + x^{\sigma''}e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Подставив это равенство в (23), получим, $-x^{\sigma''} = 0$. Откуда $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Из (23) следует, что $\sigma' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^{\phi} = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) =$ $= e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a,\ (xe_b)^{\phi} = xe_b$.

4. Случай $N_{a,b} = 1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = -1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $Ann^lR = Ke_b + AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma}e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda}e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^{\sigma} = K = K^{\lambda}$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $Ann^lR, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} + (L_2)^{\phi} = K^{\sigma}e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^lR = (Ann^lR)^{\phi} = (Ke_b)^{\phi} + (AnnR)^{\phi} = K^{\lambda}e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_a)^\phi * e_b^\phi = K^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_a^\phi * (Ke_b)^\phi = 1^\sigma \cdot K^\lambda e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_a)^\phi * e_b^\phi = x^\sigma \cdot 1^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_a^\phi * (xe_b)^\phi = 1^\sigma \cdot x^\lambda e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_a) * (y^\sigma e_b) = (xe_a)^\phi * (ye_b)^\phi = (xye_a * e_b)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{24}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (24) $\sigma'' = 0$. Далее

$$\begin{aligned}(xe_{a+b})^\phi &= (e_a * xe_b)^\phi = xe_{a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},\\ (xe_{a+b})^\phi &= (xe_a * e_b)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''} e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{25}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Отсюда и из (24) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b}$, $(1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b}(s,\ t \in K)$, $(1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a$, $(xe_b)^\phi = xe_b$.

5. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = 1$.
Ясно, что централизаторы идеала L_4 характеристичны, в частности, централизатор $C(L_4) = Ke_a + L_2$. По лемме 4 идеал $Ann^r R = Ke_b + AnnR$ тоже является характеристичным. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $Ann^r R, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^r R = (Ann^r R)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b},\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^{\phi} = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (l_1 x1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (x1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{26}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_1 xe_{2a+b})^{\phi} = (xe_a * e_{a+b})^{\phi} = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_1 xe_{2a+b})^{\phi} = (e_a * xe_{a+b})^{\phi} = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Подставив это равенство в (26), получим, $-x^{\sigma''} = 0$. Откуда $\sigma'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее

$$(xe_{a+b})^{\phi} = (e_b * xe_a)^{\phi} = xe_{a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$
$$(xe_{a+b})^{\phi} = (xe_b * e_a)^{\phi} = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''} e_{3a+2b}, \tag{27}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Из (26) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр.

Умножением ϕ последовательно на автоморфизм вида (16) при $t = -1^{\sigma'}$ и автоморфизм вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ получим

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^{\phi} = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b} (s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a,\ (xe_b)^{\phi} = xe_b$.

6. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = 3, N_{b,3a+b} = -1$.

По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $C^r_{\mathrm{mod} AnnR}(R) = Ke_b + L_4$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_4, получаем

$$(xe_a)^{\phi} = x^{\sigma} e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^{\phi} = y^{\lambda} e_b \mathrm{mod} L_4,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^{\sigma} = K = K^{\lambda}$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $C^r_{\mathrm{mod} AnnR}(R), L_2, L_4$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^{\phi} = (Ke_a)^{\phi} + (L_2)^{\phi} = K^{\sigma} e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_4 = C^r_{\mathrm{mod} AnnR}(R) = (C^r_{\mathrm{mod} AnnR}(R))^{\phi} = (Ke_b)^{\phi} + (L_4)^{\phi} = K^{\lambda} e_b \mathrm{mod} L_4.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = (Ke_b)^{\phi} * e_a^{\phi} = K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^{\phi} = e_b^{\phi} * (Ke_a)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} e_{a+b},$$

откуда $K^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} = K$ и $1^{\sigma} \cdot K^{\lambda} = K$. Обратимость в K элементов 1^{σ} и 1^{λ} следует из того, что $K^{\sigma} = K$, $K^{\lambda} = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^{\sigma} = 1^{\lambda} = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^{\phi} = (xe_b)^{\phi} * e_a^{\phi} = x^{\sigma} \cdot 1^{\lambda} e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_b * e_a)^{\phi} = e_b^{\phi} * (xe_a)^{\phi} = 1^{\sigma} \cdot x^{\lambda} e_{a+b} \mathrm{mod} L_3, \ (x \in K).$$

Поэтому $x^{\lambda} = x^{\sigma}$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^{\sigma} \cdot y^{\sigma} e_{a+b} = (x^{\sigma} e_b) * (y^{\sigma} e_a) = (xe_b)^{\phi} * (ye_a)^{\phi} = (xye_b * e_a)^{\phi} = (xy)^{\sigma} e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^{\phi} = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^{\phi} = xe_b + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^{\phi} = (xe_a * e_a)^{\phi} = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (x 1^{\sigma''} - 2x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{28}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 xe_{2a+b})^{\phi} = (xe_{a+b} * e_a)^{\phi} = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 xe_{2a+b})^{\phi} = (e_{a+b} * xe_a)^{\phi} = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (28) $\sigma'' = 0$. Далее

$$0 = 0^{\phi} = (e_a * xe_b)^{\phi} = x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $\sigma''' = 0$.

$$0 = 0^{\phi} = (xe_b * e_b)^{\phi} = x^{\lambda'} e_{3a+2b}, \tag{29}$$

откуда $\lambda' = 0$ для всех $x \in K$. Отсюда и из (28) следует, что $\sigma' \in End\ K^+$ действует как умножение на скаляр. Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^{\phi} = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^{\phi} = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = e_a + se_{3a+2b}, \ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b} (s, \ t \in K), \ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^{\phi} = xe_a, \ (xe_b)^{\phi} = xe_b$.

7. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = 1$.
По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $Ann^r R = Ke_b + AnnR$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и $L_2, AnnR$, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).
Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(L_4)$, $Ann^r R, L_2, AnnR$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + AnnR = Ann^r R = (Ann^r R)^\phi = (Ke_b)^\phi + (AnnR)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} AnnR.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_b * e_a)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_b * e_a)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'})e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''})e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{30}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (xe_{a+b} * e_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},$$
$$(l_2 xe_{2a+b})^\phi = (e_{a+b} * xe_a)^\phi = l_2 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$. Отсюда и из (30) $\sigma'' = 0$. Далее

$$(xe_{a+b})^\phi = (e_b * xe_a)^\phi = xe_{a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$
$$(xe_{a+b})^\phi = (xe_b * e_a)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\sigma'''} e_{3a+2b}, \tag{31}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma'''} = x^{\sigma'''}$. Отсюда и из (30) следует, что $\sigma', \sigma''' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ последовательно на автоморфизмы вида (15) при $t = -1^{\sigma'''}$ и (16) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$(xe_a)^\phi = xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,$$
$$(xe_b)^\phi = xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) = = e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b} (s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$.

8. Случай $N_{a,b} = -1, N_{a,2a+b} = -3, N_{b,3a+b} = -1$.

По лемме 4 идеалы $C(L_4) = Ke_a + L_2$ и $C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R) = Ke_b + L_3$ являются характеристичными. Учитывая характеристичность этих идеалов и L_2, L_3, получаем

$$(xe_a)^\phi = x^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$(ye_b)^\phi = y^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3,$$

для подходящих эндоморфизмов σ, λ аддитивной группы K^+ кольца K (пользуемся тем, что ϕ сохраняет сложение в R).

Сюръективность σ, λ, то есть выполнение равенств $K^\sigma = K = K^\lambda$, следует из характеристичности идеалов $C(R^4)$, $C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R), L_2, L_3$ и двух серий равенств

$$Ke_a + L_2 = C(L_4) = (C(L_4))^\phi = (Ke_a)^\phi + (L_2)^\phi = K^\sigma e_a \mathrm{mod} L_2,$$

$$Ke_b + L_3 = C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R) = (C^r_{\mathrm{mod} L_4}(R))^\phi = (Ke_b)^\phi + (L_3)^\phi = K^\lambda e_b \mathrm{mod} L_3.$$

Инъективность $\sigma, \lambda \in End\ K^+$ доказывается аналогично случаю 1. Отсюда вытекает включение $\sigma, \lambda \in Aut\ K^+$.

По модулю L_3 справедливы две серии равенств

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = (Ke_b)^\phi * e_a^\phi = K^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b},$$

$$Ke_{a+b} = (Ke_{a+b})^\phi = e_b^\phi * (Ke_a)^\phi = 1^\lambda \cdot K^\sigma e_{a+b},$$

откуда $K^\sigma \cdot 1^\lambda = K$ и $1^\sigma \cdot K^\lambda = K$. Обратимость в K элементов 1^σ и 1^λ следует из того, что $K^\sigma = K$, $K^\lambda = K$, соотношений, указанных выше, а также леммы 3.

Умножая ϕ на диагональный автоморфизм, мы получим $1^\sigma = 1^\lambda = 1$. Далее, ϕ-инвариантность основных соотношений кольца R даёт

$$(xe_a * e_b)^\phi = (xe_b)^\phi * e_a^\phi = x^\lambda \cdot 1^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,$$

$$(xe_a * e_b)^\phi = e_b^\phi * (xe_a)^\phi = 1^\lambda \cdot x^\sigma e_{a+b} \mathrm{mod} L_3,\ (x \in K).$$

Поэтому $x^\lambda = x^\sigma$ для любого $x \in K$, то есть $\lambda = \sigma$. Кроме того, для любых $x, y \in K$, $\sigma \in Aut\ R$, в силу равенств (по модулю L_3)

$$x^\sigma \cdot y^\sigma e_{a+b} = (x^\sigma e_b) * (y^\sigma e_a) = (xe_b)^\phi * (ye_a)^\phi = (xye_b * e_a)^\phi = (xy)^\sigma e_{a+b}.$$

Умножая ϕ, если необходимо, на кольцевой автоморфизм $\hat{\sigma}^{-1}$, получим $\sigma = 1$, откуда

$$(xe_r)^\phi = xe_r \mathrm{mod} Q(r) \quad (r \in \Phi^+),$$

где $Q(r) := \sum\limits_{s>r} Ke_s$. Кроме того,

$$(xe_a)^\phi = xe_a + x^{\sigma'} e_{a+b} + x^{\sigma''} e_{2a+b} + x^{\sigma'''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

$$(xe_b)^\phi = xe_b + x^{\lambda'} e_{2a+b} + x^{\lambda''} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,$$

для некоторых $\sigma', \sigma'', \sigma''', \lambda', \lambda'' \in End\ K^+$. Проверим действие этих эндоморфизмов

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_a)^\phi = (l_1 x 1^{\sigma'} + l_2 x^{\sigma'}) e_{2a+b} + (-2x1^{\sigma''} + x^{\sigma''}) e_{3a+b} \mathrm{mod} AnnR, \tag{32}$$

где $l_1 = -l_2$ и $l_1 = 1$ при $N_{a,a+b} = 2$ или $l_1 = -1$ при $N_{a+b,a} = -2$. Отсюда $x^{\sigma'} = x1^{\sigma'}$.

$$\begin{aligned}(xe_{a+b})^\phi &= (xe_b * e_a)^\phi = xe_{a+b} + x^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_{a+b})^\phi &= (e_b * xe_a)^\phi = xe_{a+b} + x1^{\lambda'} e_{3a+b} \mathrm{mod} Ann\ R,\end{aligned} \tag{33}$$

откуда $x1^{\lambda'} = x^{\lambda'}$.

$$\begin{aligned}(l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (xe_a * e_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x^{\sigma''} e_{3a+2b},\\ (l_1 xe_{2a+b})^\phi &= (e_a * xe_{a+b})^\phi = l_1 xe_{2a+b} + x1^{\sigma''} e_{3a+2b},\end{aligned} \tag{34}$$

аналогично предыдущим случаям $x1^{\sigma''} = x^{\sigma''}$.

$$0 = 0^\phi = (e_b * xe_b)^\phi = x^{\lambda''} e_{3a+2b}, \tag{35}$$

откуда $x^{\lambda''} = 0$, то есть $\lambda'' = 0$ для всех $x \in K$. Далее, из равенств $0 = 0^\phi = (xe_b * e_{a+b})^\phi =$ $= x^{\lambda'} e_{3a+2b}$, получаем равенство $\lambda' = 0$. Из равенств

$$0 = 0^\phi = (xe_a * e_b)^\phi = x^{\sigma'''} e_{3a+2b},$$

из чего следует, что $x^{\sigma'''} = 0$, то есть $\sigma''' = 0$ для всех $x \in K$.

Из (17)-(20) следует, что $\sigma', \sigma'', \lambda' \in End\ K^+$ действуют как умножения на скаляр. Умножением ϕ на автоморфизм вида (14) при $t = -1^{\sigma'}$ получим

$$\begin{aligned}(xe_a)^\phi &= xe_a \mathrm{mod} Ann\ R,\\ (xe_b)^\phi &= xe_b \mathrm{mod} Ann\ R.\end{aligned}$$

Умножаем на центральный автоморфизм из леммы [16, лемма 1.1.] вида $(1+\zeta)(e_a) =$ $= e_a + se_{3a+2b},\ (1+\zeta)(e_b) = e_b + te_{3a+2b} (s,\ t \in K),\ (1+\zeta)(e_r) \longrightarrow e_r$ для остальных $r \in \Phi^+$, получаем $(xe_a)^\phi = xe_a,\ (xe_b)^\phi = xe_b$. $\square$

5. Заключение

В статье установлены критерии изоморфизма точных обёртывающих колец R колец Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, также получено явное описание их автоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albert A. Power-Associative Rings // Transactions of the American Mathematical Society. 1948. Vol. 64, № 3, P. 552 – 593.

2. Myung H. C. Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 167. P. 79 – 88.

3. Laufer P. J. Some Lie admissible algebras // Canad. J. Math. 1962. Vol. 14, № 2. P. 287 – 292.

4. Levchuk V. M. Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms. // Siberian Mathematical Journal. 1983. Vol. 24. P. 543 – 557. DOI: 10.1007/BF00969552

5. Cao Y., Jiang D., Wang J. Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings // Intern. J. Algebra and Computation. 2007. Vol. 17, №. 3. P. 527 – 555.

6. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 316 – 338.

7. Литаврин А. В. Автомофизмы нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле симплектического типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 13, С. 41 – 55. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.47.9

8. Левчук В. М., Литаврин,А. В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле [Электронный ресурс]
Сибирские электронные математические известия. DOI: 10.17377/semi.2016.13.040. URL: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf 2016.

9. Литаврин А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле классических типов/ Дисс. на соиск. ученой степени кандид. физ.-мат. наук. СФУ. 2017. С. 74.

10. Казакова А. В. Автомофизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над областями целостности. I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 93 – 106. DOI: 10.26516/1997-7670.2024.47.9

11. Казакова А. В. Автоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле типа G_2 над полем характеристики 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 26 – 36. DOI: 10.17223/19988621/88/3

12. Gibbs J.A. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, №. 2. P. 203 – 228.

13. Левчук В. М. Нильтреугольная подалгебра алгебры Шевалле: обёртывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Доклады академии наук. 2018. Т. 478, № 2. С. 137 – 140.

14. Carter R. Simple Groups of Lie Type // New York, Wiley and Sons. 1972. 331 P.

15. Казакова А. В., Кириллова Е. А. Автоморфизмы и центральные ряды нильтреугольных подколец алгебр Шевалле // Мальцевские чтения : тезисы докладов международной конференции. (Новосибирск, 16-20 ноября 2020 г.) С. 191.

16. Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. The automorphism group of certain radical rings. // J. Algebra. 2004. Vol. 243. P. 473 – 485. DOI: 10.1006/jabr.2001.886

REFERENCES

1. Albert, A. 1948, "Power-Associative Rings", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 64, no. 3, pp. 552 – 593.

2. Myung, H. C. 1972, "Some Classes of Flexible Lie-Admissible Algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 167, pp. 79 – 88.

3. Laufer, P. J. 1962, "Some Lie admissible algebras", *Canad. J. Math.*, vol. 14, no. 2, pp. 287 – 292.

4. Levchuk, V. M. 1983, "Connections between a unitriangular group and certain rings. Chap. 2: Groups of automorphisms", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 24, pp. 543–557. doi: 10.1007/BF00969552

5. Cao, Y., Jiang, D., & Wang, J. 2007, "Automorphisms of certain nilpotent Lie algebras over commutative rings", *Intern. J. Algebra and Computation,* vol. 17, no. 3, pp. 527–555.

6. Levchuk, V. M. 1990, "Automorphisms of unipotent subgroups of chevalley groups", *Algebra and Logic*, vol. 29, pp. 211–224. doi: 10.1007/BF01979936

7. Litavrin, A. V. 2015, "Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ Chevalley algebra of symplectic type", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 13, no. 3, pp. 41–55. (in Russian)

8. Levchuk, V. M., Litavrin, A. V. 2016, "Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 13, pp. 467–477, Available at: http://semr.math.nsc.ru/v13/p467-477.pdf (in Russian)

9. Litavrin, A. V. "Automorphisms of nil-triangular subrings of algebras Chevalley of classic types", Thesis for: Cand. Sc. (Physics and Mathematics): 01.01.06. Siberian Federal University, 2017, 74 p. (in Russian)

10. Kazakova, A. V. 2024, "Automophisms of Nil-Triangular Subrings of Algebras Chevalley Type G_2 Over Integral Domain. I.", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 47, pp. 93–106. (in Russian) doi: 10.26516/1997-7670.2024.47.93

11. Kazakova, A. V. 2024, "Automorphisms of nil-triangular subrings of Chevalley algebras of type G2 over the field of characteristic 2", *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, no. 88, pp. 26–36. (in Russian) doi: 10.17223/19988621/88/3

12. Gibbs, J.A. 1970, "Automorphisms of certain unipotent groups", *J. Algebra*, vol. 14, no. 2, pp. 203–228.

13. Levchuk, V. M. 2018, "Niltriangular subalgebra of Chevalley algebra: the enveloping algebra, ideals and automorphisms", *Dokl. Math.*, vol. 97, no. 1, pp. 23–27.
doi: 10.7868/S0869565218020032

14. Carter, R. 1972, *Simple Groups of Lie Type.* Wiley and Sons, New York, 331 pp.

15. Kazakova, A. V., Kirillova, E. A. “Automor-phisms and central series of niltriangular subrings of Chevalley algebras”, *Collection of Abstracts of International Conference “Mal’tsev Meeting”*, Novosibirsk. Novosibirsk, 2020, p. 191.

16. Kuzucuoglu, F., Levchuk, V. M. 2001, “The automorphism group of certain radical rings”, *J. Algebra*, vol. 243, pp. 473–485. doi: 10.1006/jabr.2001.886

Получено: 14.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024