

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-101-117

Существование неприводимых мультиобходов кратности 2

А. О. Иванов, О. С. Щербаков

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Щербаков Олег Сергеевич — Университетская гимназия, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Аннотация

Ивановым и Тужилиным была предложена одномерная проблема Громова о минимальном заполнении конечных метрических пространств, где в качестве заполнений рассматриваются взвешенные графы с неотрицательными весами ребер. Они показали, что задача редуцируется к случаю так называемых бинарных деревьев — деревьев у которых вершины имеют только степени 1 и 3. Ерёминым была получена минимаксная формула веса минимального заполнения. Формула Ерёмина использует понятие минимального параметрического заполнения — фиксируется граф (параметризация или тип); он показал, что вес минимального параметрического заполнения равен максимальному значению так называемого мультипериметра среди всех неприводимых мультиобходов.

Сложность структуры бинарного дерева можно измерять количеством так называемых усов — пар граничных вершин с общей смежной вершиной. Настоящая работа посвящена изучению мультиобходов бинарных деревьев с тремя усами. Найдена линейная рекуррентная формула для числа бинарных деревьев с тремя усами. Установлена связь между неприводимостью мультиобходов и включениями мультиграфов мультиобходов для фиксированного бинарного дерева.

Недавно Щербаковым было доказано, что кратность неприводимого мультиобхода для бинарного дерева с тремя усами не превосходит 2, в этой работе доказано существование таких неприводимых мультиобходов у любого такого бинарного дерева.

Недавно Иванов и Тужилин предложили вычислять вес минимального параметрического заполнения, находя вершины многомерного многогранника допустимых значений переменных двойственной задачи линейного программирования с помощью компьютера. Разработанная в настоящей работе техника позволяет найти все неприводимые мультиобходы у бинарного дерева с 6 граничными вершинами и 3 усами без использования компьютерных вычислений.

Ключевые слова: конечное метрическое пространство, минимальное параметрическое заполнение, линейное программирование, многогранник бинарного дерева, мультициклический порядок, неприводимый мультиобход, мультиграф мультиобхода.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Иванов, А. О., Щербаков, О. С. Существование неприводимых мультиобходов кратности 2 // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 101–117.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 515.124.4+519.852.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-101-117

Existence of irreducible multitours of multiplicity 2

A. O. Ivanov, O. S. Shcherbakov

Ivanov Alexandr Olegovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Shcherbakov Oleg Sergeevich — University Gymnasium, Lomonosov Moscow State University; Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: shcherbakovos@yandex.ru

Abstract

Ivanov and Tuzhilin stated the problem of one-dimensional Gromov minimal filling of finite metric spaces, where the filling is considered as a weighted connected graph containing the metric space as a subset of its vertex set. They shown that the problem can be always reduced to the case of so-called binary trees — trees whose vertices have degrees 1 and 3 only. Later Eremin obtained a minimax formula for the weight of the minimal filling. Eremin's formula uses the concept of minimum parametric filling, i.e. the filling with a fixed graph (parameterization or type), and the weight of the minimal parametric filling turns out to be equal to the maximum value of so-called multi-perimeters over all irreducible multi-tours.

Moustaches of a binary tree is a pair of its vertices of degree 1 having a common adjacent vertex. The number of moustaches can measure complexity of binary trees. In this paper the multi-tours of binary trees with 3 moustaches are investigated. A linear recurrent formula is found for the number of such binary trees. For a fixed binary tree a connection is established between the irreducibility of multi-tours and inclusions of multi-tours multi-graphs.

Recently Shcherbakov proved that the multiplicity of an irreducible multi-tour for a binary tree with 3 moustaches does not exceed 2; in this paper the existence of such irreducible multi-tour for any binary tree with 3 moustaches is proved.

Ivanov and Tuzhilin proposed to calculate the weight of a minimal parametric filling by finding the vertices of a multidimensional polyhedron of feasible variable values of the dual linear programming problem. These their results are based on computer calculations. The technique developed in this paper permits to find all irreducible multi-tours of a binary tree with 6 boundary vertices and 3 moustaches without a computer.

Keywords: finite metric space, minimal parametric filling, linear programming, convex polytops of binary tree, irreducible multi-torus, multigraph of multi-torus.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

Ivanov, A. O., Shcherbakov, O. S. 2024, "Existence of irreducible multitours of multiplicity 2", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 101–117.

1. Введение

Задача о минимальном заполнении конечного метрического пространства появилась в [1] (см. краткое введение в [2], [3] или [4]). Она возникла как обобщение задачи Штейнера о кратчайшей сети (см. например [5]) и задачи Громова о минимальном заполнении гладкого

риманова многообразия [6]. Развитию этого сюжета посвящены работы [7], [8], [9], [11]. Так, например, теория минимальных заполнений позволила получить ряд продвижений в задаче об оценке отношения Штейнера, см. [10], [18].

Напомним общую постановку задачи. Пусть X — конечное метрическое пространство. Требуется найти взвешенное (с неотрицательной весовой функцией w на рёбрах) дерево G наименьшего веса такое, что выполнены условия: 1) множество X вкладывается в множество вершин дерева G ; 2) для любых двух точек i и j метрического пространства X вес d_{ij} единственного пути Γ_{ij} , соединяющего их в дереве, не меньше расстояния ρ_{ij} между этими точками в метрическом пространстве.

Бинарными деревьями мы называем деревья у которых степени вершин могут принимать только значения 1 и 3. В [1] показано, что всегда вместо рассмотрения произвольных деревьев, можно ограничиться рассмотрением бинарных деревьев, причем множество X совпадает при вложении с множеством вершин степени 1. При изучении минимальных заполнений естественно возникает задача о минимальном параметрическом заполнении. В такой постановке фиксируется дерево G (тип заполнения) и минимизируется весовая функция на ребрах графа в сделанных выше предположениях. В этом случае оказалось удобным перейти к так называемым *обобщённым заполнениям*, разрешив весовой функции w принимать отрицательные значения. В работе [12] доказано, что вес минимального заполнения совпадает с весом обобщённого заполнения для псевдометрического пространства.

В работе Еремина [4] получена формула веса обобщённого минимального параметрического заполнения в терминах так называемых *неприводимых мультиобходов*, и показано, что таких мультиобходов конечное число. Полученная в [4] оценка на число неприводимых мультиобходов для m -точечного метрического пространства равна $C_{m(m-1)/2}^{2m-3}$. Например, для 10-точечного метрического пространства означает $C_{45}^{17} \approx 1,1 \cdot 10^{12}$, а для 15-точечного — $C_{105}^{27} \approx 8,77 \cdot 10^{24}$, что делает перебор невозможным на практике.

В [2] поиск формулы веса минимального параметрического заполнения осуществляется так: задача о поиске минимального параметрического заполнения для бинарного дерева G рассматривается как задача линейного программирования, далее следует переход к двойственной задаче. Допустимое множество в двойственной задаче — некоторый многогранник $\mathbf{X}(G)$, он не зависит от метрического пространства, а зависит только от типа заполнения. От метрического пространства зависит только целевая функция в двойственной задаче. Согласно принципу двойственности минимум целевой функции исходной задачи совпадает с максимумом целевой функции двойственной задачи, поэтому вес минимального параметрического заполнения можно найти как максимум значений целевой функции в вершинах многогранника $\mathbf{X}(G)$. В [2] также установлено соответствие между рациональными точками многогранника $\mathbf{X}(G)$ и мультиобходами дерева G .

В [13] установлена биекция, между вершинами многогранника $\mathbf{X}(G)$ и неприводимыми мультиобходами, показано, что максимум целевой функции в двойственной задаче может достигаться на любой из вершин многогранника $\mathbf{X}(G)$, что означает, что для поиска формулы веса минимального параметрического заполнения в виде максимума значений целевой функции в вершинах многогранника $\mathbf{X}(G)$ необходимо найти все вершины $\mathbf{X}(G)$.

В [13] найдены все вершины многогранника $\mathbf{X}(G)$ для бинарных деревьев с 2 усам (так называемые деревья типа “змея”) и тем самым найдена формула веса минимального параметрического заполнения для этого случая. В [14] доказано, что кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с 3 усам не превосходит 2. В настоящей работе устанавливается существование неприводимых мультиобходов кратности 2 у всех бинарных деревьев с 3 усам.

2. Необходимые определения и предварительные результаты

В настоящей работе *бинарным деревом* называется связный ациклический простой конечный граф (т.е. дерево), у которого все вершины имеют степень 1 или 3. Вершины степени 3 называются *внутренними*, вершины степени 1 — *граничными* или *листьями*. Далее $G = (V, E)$ — бинарное дерево, V — множество его вершин, E — множество рёбер. Множество граничных вершин дерева G обозначим через M , а их число $|M|$ — через m . Обозначим $d = C_m^2$ — число неупорядоченных пар вершин из M , число рёбер бинарного дерева G обозначим r , тогда $r = 2m - 3$.

Бинарные деревья будем рассматривать с точностью до изоморфизма графов.

Мультициклический порядок кратности l на множестве $M = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ из m элементов — это отображение $\sigma : \mathbb{Z}_{lm} \rightarrow M$, такое, что

$$1) \forall k \in \mathbb{Z}_{lm} \quad \sigma(k+1) \neq \sigma(k); \quad 2) \forall v \in M \quad |\sigma^{-1}(v)| = l.$$

Мультициклический порядок на множестве $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ обозначим $(v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{lm}})$, где $v_{i_{k+1}} = \sigma(k)$, а когда обозначения вершин не важны, будем писать $(i_1 i_2 \dots i_{lm})$.

Путь, соединяющий граничные вершины i и j в дереве G , обозначим Γ_{ij} и будем называть *граничным*. Пути Γ_{ij} и Γ_{ji} отождествляем. По мультициклическому порядку σ построим *мультимножество* Γ^σ *граничных путей*:

$$\Gamma^\sigma := \{\Gamma_{\sigma(0)\sigma(1)}, \Gamma_{\sigma(1)\sigma(2)}, \dots, \Gamma_{\sigma(lm-1)\sigma(0)}\}.$$

Согласно предложению 2.4 из [4] мультиобходом σ кратности l бинарного дерева G будем называть такой мультициклический порядок на множестве его граничных вершин M , что через каждое ребро дерева G проходит ровно $2l$ его граничных путей из Γ^σ .

По Γ^σ построим вектор $w^\sigma = (\sigma_{12}, \dots, \sigma_{(m-1)m}) \in \mathbb{R}^{C_m^2}$, положив координату σ_{ij} равной количеству включений граничного пути Γ_{ij} в Γ^σ . Полученный вектор w^σ будем называть *вектором мультиобхода* σ .

ЛЕММА 1. ([4], Предложение 2.5) *Для всякого l -обхода σ через каждую пару смежных рёбер дерева G проходит ровно l граничных путей из Γ^σ .*

Мультиобходы σ и σ' бинарного дерева G назовём *эквивалентными*, если $w^\sigma = w^{\sigma'}$. Эквивалентность мультиобходов обозначим так: $\sigma \cong \sigma'$.

По бинарному дереву G построим матрицу A размера $r \times d$ (см. [2]): строки индексированы рёбрами G , столбцы — парами из M , элемент a_{ij}^k матрицы A определён условием:

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } e_k \in \Gamma_{ij}; \\ 0, & \text{если } e_k \notin \Gamma_{ij}; \end{cases} \quad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Вектор-столбец $d \times 1$, все координаты которого равны 1, обозначим \mathbb{I} . В [2] каждому бинарному дереву G сопоставляется выпуклый многогранник

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(G) := \{x = (x_{12}, \dots, x_{(m-1)m}) \in \mathbb{R}^d : Ax = \mathbb{I}, \quad x_{ij} \geq 0, 1 \leq i < j \leq m\}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. ([4], Теорема 3.3) *Для всякого вектора w с целыми неотрицательными координатами, такого, что $Aw = 2\mathbb{I}$, существует мультиобход σ , для которого данный вектор является вектором мультиобхода.*

По всякому l -обходу σ можно построить точку x многогранника \mathbf{X} , следующим образом: $x = \frac{1}{2l}w$, эту точку будем обозначать x^σ .

Неприводимые мультиобходы введены в [4] для формулы веса минимального параметрического заполнения. В работе [13] показано, что существует биекция между множеством вершин многогранника \mathbf{X} и неприводимыми мультиобходами, опираясь на этот результат дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Мультиобход σ кратности l назовём **неприводимым**, если $x^\sigma = \frac{1}{2l}w^\sigma$ — вершина многогранника, и все координаты вектора w^σ взаимнопросты в совокупности, в противном случае мультиобход называется **приводимым**.*

Напомним, что *усы* бинарного дерева — это пара его граничных вершин, имеющих общую смежную вершину. Также усам называется соответствующая пара соседних ребер, инцидентных этим граничным вершинам.

ЛЕММА 2. ([13], Лемма 4) *Если пара вершин $v_i v_j$ бинарного дерева G образуют усы, то соответственная координата x_{ij} точки многогранника $\mathbf{X}(G)$ равна $\frac{1}{2}$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого l -обхода σ бинарного дерева G , если пара вершин $v_i v_j$ образуют усы, то для вектора мультиобхода w^σ соответствующая координата $\sigma_{ij} = l$.*

ЛЕММА 3. *Рассмотрим мультиобходы σ , ζ и τ кратностей l , k и t соответственно. Если для векторов мультиобходов для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство:*

$$nw^\sigma = w^\zeta + w^\tau, \quad (2)$$

то мультиобход σ приводим, причём кратности связаны соотношением $nl = k + t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2), применив к обоим частям матрицу A , получаем $nl = k + t$. Разделим обе части равенства (2) на $2nl$, получим

$$x^\sigma = \frac{1}{2nl} \left(\frac{2k}{2k} w^\zeta + \frac{2t}{2t} w^\tau \right) = \frac{k}{nl} x^\zeta + \frac{t}{nl} x^\tau.$$

Значит точка x^σ лежит между точками x^ζ и x^τ , то есть не является вершиной многогранника \mathbf{X} , откуда следует приводимость σ по определению 1. \square

2.1. Мультиграфы

В настоящей работе под *мультиграфом* понимается простой граф, каждому ребру которого сопоставлено целое неотрицательное число, называемое *кратностью*. Считаем, что несмежные вершины — то же что и вершины, связанные ребром кратности 0.

Определим *произведение мультиграфа G на натуральное число l* , как мультиграф lG у которого множество вершин совпадает с множеством вершин графа G , а кратности всех рёбер увеличены в l раз.

Пусть у мультиграфов G_1 и G_2 совпадают множества вершин: $V_1 = V_2 = V$. Определим *сумму мультиграфов* как мультиграф $G_1 + G_2$, множество вершин которого V , а кратность ребра, связывающего вершины v_i и v_j , равна сумме кратностей этого ребра в G_1 и G_2 .

Обозначим через $K(M)$ полный граф с множеством вершин M . Напомним, что последовательность смежных вершин и рёбер, такая, что все рёбра различны, называется *цепью*. Ясно, что для задания цепи в простом графе достаточно указывать только вершины.

Последовательность вершин $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$ множества M , где соседние вершины различны, представляет собой цепь в графе $nK(M)$ для некоторого n . Вершины v_{i_1} и v_{i_k} назовем *концами* цепи. Если концы цепи совпадают ($v_{i_1} = v_{i_k}$), то будем говорить что цепь *замкнута*, то есть является *циклом*, и писать $(v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{k-1}})$.

Иногда, вместо $v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k}$ будем писать $i_1i_2\dots i_k$, если ясно о каких вершинах идёт речь.

Мультициклический порядок $(v_{i_1}\dots v_{i_m})$ можно рассматривать как замкнутую цепь в графе $IK(M)$. Если мультициклический порядок имеет вид $\sigma = (\dots \underbrace{ijk \dots}_A)$, то будем говорить

что цепь $A = ijk$ входит в σ и т.п. Заметим, что 1-обходу соответствует гамильнотов цикл в полном графе $K(M)$.

Цепи $i_1i_2\dots i_n$ соответствует последовательность граничных путей $\Gamma_{i_1i_2}, \Gamma_{i_2i_3}, \dots, \Gamma_{i_{n-1}i_n}$.

По l -обходу σ определим мультиграф G^σ : в качестве множества вершин графа G^σ возьмём M , каждую пару вершин i и j соединим ребром кратности σ_{ij} . Ясно, что $G^\sigma \subset IK(M)$.

2.2. Побег и обходы

Начнем с описания вспомогательной конструкции так называемого побега.

Процедура приклеивания усов. Рассмотрим бинарное дерево G с граничной вершиной w . Добавим к множеству вершин этого дерева ещё две вершины v_1 и w_1 и соединим каждую из них ребром с вершиной w , получим бинарное дерево G_1 с усам (v_1, w_1) . Будем говорить, что дерево G_1 получено из бинарного дерева G путём *приклеивания усов* (v_1, w_1) к вершине w .

Процедура выращивания побега из p листьев ($p \geq 2$). Рассмотрим бинарное дерево G с граничной вершиной w , переобозначим её через w_p . Приклеим усы (v_p, w_{p-1}) к бинарному дереву G по вершине w_p , получим бинарное дерево G_1 , далее из G_1 приклеиванием усов (v_{p-1}, w_{p-2}) к вершине w_{p-1} , получим бинарное дерево G_2 , и так далее. На последнем $(p-1)$ -м шаге к дереву G_{p-2} с усам (v_3, w_2) , приклеенными на предыдущем шаге, приклеиваем усы (v_2, v_1) к вершине w_2 , получаем дерево G_{p-1} .

Наименьшее бинарное поддерево A дерева G_{p-1} , содержащие все вершины (v_1, \dots, v_p) , назовём *побегом*. Вершину v_p будем называть *концевой вершиной побега*. Если $p = 2$, то побег, по определению, состоит из одних лишь усов.

Будем говорить, что дерево G_{p-1} получено из дерева G путём *выращивания побега A из p листьев из вершины w* . Пусть e — единственное ребро, смежное с w в дереве G , и o — другая вершина этого ребра, тогда e и o входят в побег, ибо побег мы определили как бинарное поддерево. Вершину o мы будем называть *корнем побега*.

Пусть бинарное дерево G содержит побег A из p листьев (рис. 1), а нумерация первых p вершин дерева G совпадает с нумерацией вершин побега A .

ЛЕММА 4. ([14], Лемма 1) Для любого l -обхода σ дерева G справедливо:

$$\sigma \cong (\dots * A_1 * \dots * A_2 * \dots * A_l * \dots), \quad (3)$$

где $A_k, k = \overline{1, l}$, представляют собой цепи вида

$$A_k = J_k 1 I_k, \quad (4)$$

где

$$J_k = j_{q_k}^k \dots j_2^k j_1^k \quad \text{и} \quad I_k = i_1^k i_2^k \dots i_{r_k}^k, \quad q_k + r_k = p - 1,$$

$$\{j_{q_k}^k, \dots, j_2^k, j_1^k\} \sqcup \{i_1^k, i_2^k, \dots, i_{r_k}^k\} = \{2, 3, 4, \dots, p\}, \quad j_{q_1}^k > \dots > j_2^k > j_1^k \quad \text{и} \quad i_1^k < i_2^k < \dots < i_{r_k}^k.$$

Символом $*$ обозначены какие-то граничные вершины, не входящие в побег A .

Цепь A_i будем называть так же *путём по побегу A* .

2.3. Бинарные деревья с тремя усами

Множество бинарных деревьев ровно с тремя усами будем обозначать через \mathfrak{B}_3 . Через Y обозначим единственное бинарное дерево с 3 граничными вершинами.

ЛЕММА 5. ([14] Лемма 2) *Всякое бинарное дерево G из \mathfrak{B}_3 состоит из 3 побегов с общим корнем. Побег выращен из граничной вершин дерева Y , а их корень — единственная внутренняя вершина Y .*

Заметим, что количество граничных вершин в побегах однозначно определяют дерево из \mathfrak{B}_3 .

Рассмотрим бинарное дерево из \mathfrak{B}_3 и обозначим его побеги через A, B и C . Следующая теорема объединяет результаты теорем 1, 2 и следствия 3 из [14]:

ТЕОРЕМА 2. *Неприводимые мультиобходы бинарного дерева из \mathfrak{B}_3 , с точностью до эквивалентности, состоят из путей A_k, B_k, C_k по побегам A, B, C и могут быть только такими:*

$$а) \quad \sigma \cong (A_1 B_1 C_1) \quad \text{или} \quad б) \quad \sigma \cong (A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2), \quad (5)$$

причём в случае б) если a_p — концевая вершина побега A , то $A_1 = a_p A'_1$ и $A_2 = A'_2 a_p$ или $A_1 = A'_1 a_p$ и $A_2 = a_p A'_2$, аналогично для побегов B и C .

СЛЕДСТВИЕ 2. ([14], Теорема 3) *У бинарного дерева из \mathfrak{B}_3 существует не более чем $2^{2(m-5)}$ неприводимых 2-обходов.*

2.4. Оценка на число вершин многогранника

Напомним критерий (см. например [15] Теорема 2.1) того, что точка многогранника заданного условиями (1), является его вершиной (угловой точкой).

Столбцы матрицы A обозначим $A_{12}, A_{13}, \dots, A_{(m-1)m}$ (в соответствии с парами вершин), условие $Ax = \mathbb{I}$ переписывается в виде

$$A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} + \dots + A_{(m-1)m}x_{(m-1)m} = \mathbb{I}.$$

Как показано в [2] (Лемма 2.2), матрица A имеет максимальный ранг $r = 2m - 3$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того, чтобы точка x была угловой для множества \mathbf{X} , необходимо и достаточно, чтобы нашлось $r = \text{rang } A$ линейно-независимых столбцов $A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_r}$ матрицы A , таких что:*

$$A_{x_1}x_{x_1} + A_{x_2}x_{x_2} + \dots + A_{x_r}x_{x_r} = \mathbb{I}, \quad (6)$$

причём $x_{x_s} \geq 0$, $s = 1, \dots, r$, а все остальные $x_{ij} = 0$.

Как показано в [13], число неприводимых мультиобходов бинарного дерева в точности совпадает с числом вершин многогранника бинарного дерева, это число обозначим через $\nu(G)$. Число неприводимых мультиобходов кратности k дерева G будем обозначать через $\nu_k(G)$.

В работе [4] (следствие 3.25) была получена верхняя оценка на число неприводимых мультиобходов бинарного дерева: $\nu(G) \leq C_d^r$. Она получена как число выборов r столбцов матрицы A размера $r \times d$. Эту оценку можно улучшить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть y — количество усов бинарного дерева, тогда $\nu(G) \leq C_{d-y}^{r-y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершины с номерами i и j образуют усы, то по лемме 2 $x_{ij} = \frac{1}{2}$, значит все столбцы A_{ij} соответствующие усам бинарного дерева должны участвовать в выборке столбцов в правой части равенства (6), таких столбцов y откуда получаем указанную оценку. \square

Отметим, что при $m = 10$ для нахождения вершин многогранника перебором с помощью теоремы 3 число выборов столбцов матрицы A составляло $C_{45}^{17} \approx 1,1 \times 10^{12}$, с учётом предложения 1 получаем для бинарного дерева с 4 усам $C_{41}^{13} \approx 1,76 \times 10^{10}$, что примерно в 62,6 раза меньше; а для 5 усов $C_{40}^{12} \approx 5,6 \times 10^9$, что почти в 200 раз меньше.

3. Число бинарных деревьев с 3 усам и m листьями

При доказательстве следующего предложения используются диаграммы Юнга, позволяющие наглядно представлять разбиения натурального числа в сумму натуральных слагаемых (см. необходимые определения например в [16], [17]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть λ_m — число бинарных деревьев из \mathfrak{B}_3 с m листьями, тогда $m \geq 6$ и выполнено линейное рекуррентное соотношение

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} + \lambda_{m-2} - \lambda_{m-4} - \lambda_{m-5} + \lambda_{m-6},$$

с начальными условиями $\lambda_6 = 1, \lambda_7 = 1, \lambda_8 = 2, \lambda_9 = 3, \lambda_{10} = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 всякое дерево из \mathfrak{B}_3 состоит из трёх побегов, причем дерево определяется длинами этих побегов с точностью до изоморфизма. Пусть p, q, r — число листьев в каждом из побегов. Тройку натуральных чисел всегда можно упорядочить по убыванию, будем считать, что $p \geq q \geq r \geq 2$. Введем обозначения: $\tilde{p} := p - 2, \tilde{q} := q - 2, \tilde{r} := r - 2$. Получаем, что бинарные деревья из \mathfrak{B}_3 задаются однозначно тройкой чисел $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$. Числа $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ это числа вершин степени 1 не входящих в усы в побегах A, B, C соответственно.

Поскольку $\tilde{p} \geq \tilde{q} \geq \tilde{r} \geq 0$, то каждому элементу из \mathfrak{B}_3 взаимно-однозначно соответствует диаграмма Юнга $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r})$. Вес такой диаграммы $n = \tilde{p} + \tilde{q} + \tilde{r} = p + q + r - 6 = m - 6$. Ясно, что все такие диаграммы Юнга лежат в полосе шириной 3 клетки. Число диаграмм Юнга веса n в такой полосе обозначим λ_n его можно найти с помощью производящей функции ([16], п.2.3):

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k s^k = \frac{1}{(1-s^3)(1-s^2)(1-s)} = \\ &= 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 4s^4 + 5s^5 + 7s^6 + 8s^7 + 10s^9 + 12s^{10} + 14s^{11} + 16s^{12} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку многочлен, стоящий в знаменателе производящей функции, имеет вид:

$$(1-s^3)(1-s^2)(1-s) = 1 - s - s^2 + s^4 + s^5 + s^6,$$

получаем (см. например [17], п.2.3) рекуррентное соотношение:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} - \lambda_{n-4} - \lambda_{n-5} + \lambda_{n-6}.$$

Учитывая первые пять коэффициентов производящей функции $\Lambda(s)$ и то, что $m = n + 6$, получаем утверждение. \square

4. Существование мультиобходов

Лемма 4 утверждает, что всякий мультиобход эквивалентен мультиобходу вида (3). В работе [14] *a priori* не ясно, каждое ли выражение вида (3) соответствует некоторому мультиобходу. Оказывается, ответ положительный, см. теорему 4 ниже.

ЛЕММА 6. Пусть G — бинарное дерево с границей M , и A — некоторый его побег. Пусть σ — мультициклический порядок кратности l на M , имеющий вид $\sigma = (\dots * A_1 * \dots * A_l * \dots)$, где пути $A_k, k = \overline{1, l}$, по побегу A определены равенством (4). Тогда через каждое ребро побега A проходит ровно $2l$ граничных путей из Γ^σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ — мультициклический прядок заданный формулой (3), и номер каждой граничной вершины в правой части (3) содержится ровно l раз, значит через каждое ребро e_1, e_2, \dots, e_p проходит ровно $2l$ граничных путей (см. рис. 1). Остаётся показать, что через все рёбра f_2, \dots, f_p проходит ровно $2l$ путей.

Обозначим внутренние вершины $w_2, w_3 \dots w_p$ побега A как на рисунке 1 (w_i смежна v_i , $w_{p+1} = o$ — корень побега), тогда $f_k = \{w_k w_{k+1}\}$. Граничный путь $\Gamma_{ij}, 2 \leq i < j \leq p$, проходит через рёбра $e_i, f_i, f_{i+1}, \dots, f_{j-1}, e_j$. Граничный путь $\Gamma_{k*}, k \geq 2$, связывающий вершину v_k и вершину $*$ $\notin A$ проходит через ребра $e_k, f_k, f_{k+1}, \dots, f_p$ в побеге A . Для граничных путей вида Γ_{1j} и Γ_{1*} имеем последовательности рёбер $e_1, f_2, \dots, f_{j-1}, e_j$ и e_1, f_2, \dots, f_p соответственно.

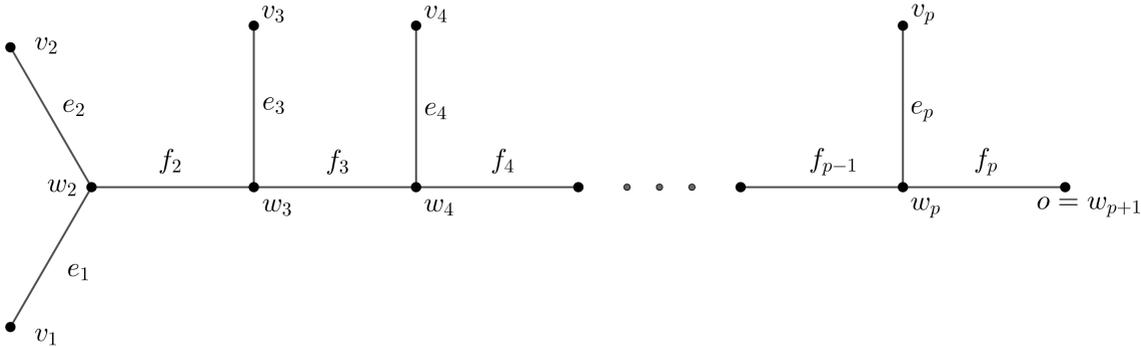


Рис. 1: Побег A

Каждая цепь A_k имеет вид (4), значит она разбивается на две цепи $j_q j_{q-1} \dots j_1 1$ и $1 i_1 i_2 \dots i_r$ которые пересекаются по вершине a_1 . Так цепи $1 i_1 i_2 \dots i_r$ соответствует последовательность граничных путей $\Gamma_{1i_1}, \Gamma_{1i_2}, \dots, \Gamma_{i_{r-1}i_r}, \Gamma_{i_r*}$. Каждое ребро $f_i, i = \overline{2, \dots, p}$ ровно 1 раз встречается в этой последовательности, тоже верно для цепи $j_q j_{q-1} \dots j_1 1$. Значит для каждой цепи A_k через каждое ребро f_i проходит пара граничных путей, и поскольку $k = \overline{1, l}$, то таких путей $2l$. Если граничный путь в дереве проходит через ребро побега, то не менее одной его граничной вершины принадлежит этому побегу. Заметим, что никакое ребро f_i не может быть включено больше чем $2l$ раз в множество граничных путей Γ^σ , ибо это означало бы что в σ больше чем $2l$ вершин побега A , что невозможно. \square

ТЕОРЕМА 4. Правые части в формулах (5) — это мультициклические порядки, которые являются мультиобходами соответствующего дерева из \mathfrak{B}_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правые части в формулах (5) представляют собой мультициклические порядки кратностей $l = 1$ и $l = 2$ по определению. Через каждое ребро побега A по лемме 6 проходит ровно $2l$ граничных путей, тоже верно для побегов B и C . Значит через каждое ребро дерева из \mathfrak{B}_3 проходит $2l$ граничных путей, откуда σ — мультиобход по определению. \square

ТЕОРЕМА 5. Для бинарного дерева из \mathfrak{B}_3 с t граничными вершинами $\nu_1 = 2^{m-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть бинарное дерево $G \in \mathfrak{B}_3$ состоит из побегов A, B, C из p, q и r листьев соответственно. По теореме 2 произвольный 1-обход σ имеет вид $(A_1 B_1 C_1)$. Цепь $A_1 = J_1 I_1$, цепи J_1 и I_1 строятся разбиением множества на 2 подмножества множества $\{a_2, a_3, \dots, a_p\}$, ясно, что таких разбиений возможно 2^{p-1} . Аналогично для B_1 и C_1 . Подпишем число возможных разбиений под каждой цепью:

$$\left(\underbrace{A_1}_{2^{p-1}} \underbrace{B_1}_{2^{q-1}} \underbrace{C_1}_{2^{r-1}} \right),$$

Заметим, что разным разбиениям соответствуют различный набор граничных путей, а значит и различные обходы. Согласно теореме 4 все они существуют, откуда: $\nu_1 = 2^{p+q+r-3} = 2^{m-3}$. \square

5. Существование неприводимых 2-обходов

По теореме 4 все мультициклические порядки вида (5) являются мультиобходами. Как показывает следующий пример, нельзя утверждать, что каждый 2-обход вида (5) неприводим.

5.1. Важный пример

Рассмотрим бинарное дерево $G \in \mathfrak{B}_3$, состоящее из побегов с листьями: $(1, 2)$, $(3, 4)$ и $(5, 6, 7, 8)$, расположенными как рисунке 2.

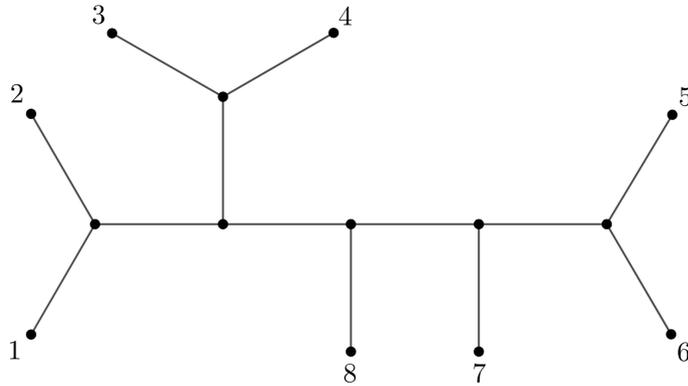


Рис. 2: Одно из двух бинарных деревьев из \mathfrak{B}_3 с 8 граничными вершинами

Рассмотрим мультиобходы σ, τ, ζ и их векторы мультиобходов $w^\sigma, w^\tau, w^\zeta$. Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\underbrace{12}_{A_1} \underbrace{43}_{B_1} \underbrace{7658}_{C_1} \underbrace{21}_{A_2} \underbrace{34}_{B_2} \underbrace{8657}_{C_2} \right), \\ w^\sigma &= (2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 0), \\ \tau &= \left(\underbrace{12}_{A_1} \underbrace{43}_{B_1} \underbrace{7568}_{C_1} \underbrace{21}_{A_2} \underbrace{34}_{B_2} \underbrace{8657}_{C_2} \right), \\ w^\tau &= (2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0, 2, 0), \\ \zeta &= \left(\underbrace{12}_{A_1} \underbrace{43}_{B_1} \underbrace{7658}_{C_1} \underbrace{21}_{A_2} \underbrace{34}_{B_2} \underbrace{8567}_{C_2} \right), \\ w^\zeta &= (2, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

Ясно, что данные мультиобходы имеют вид (5). Но по лемме 2 мультиобход σ приводим, ибо $2w^\sigma = w^\tau + w^\zeta$, а это легко видеть из их координатных записей (координаты всех трёх векторов отличаются лишь в последних 5 знаках).

Отметим, что для координат точек многогранника $\mathbf{X}(G)$, имеем:

$$x^\sigma = \frac{1}{2}x^\tau + \frac{1}{2}x^\zeta$$

То есть точка x^σ — середина отрезка $[x^\tau, x^\zeta]$.

5.2. Мультиграфы мультиобходов и приводимость мультиобходов

ЛЕММА 7. Пусть дан l -обход σ бинарного дерева G у которого более 2 вершин. Тогда для вектора $w^\sigma = (\sigma_{12}, \dots, \sigma_{(m-1)m})$ мультиобхода σ для всех координат выполнено $\sigma_{ij} \leq l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вершину v_i , обозначим смежное ей ребро e , а пару рёбер смежных ребру e обозначим через f_1 и f_2 (рис. 3). Граничный путь Γ_{ij} , связывающий вершины v_i и v_j , проходит только через одно из этих рёбер: или через f_1 , или через f_2 . Пусть это ребро f_1 . По лемме 1 ровно l граничных путей в мультиобходе проходит через пару рёбер (e, f_1) . Значит граничных путей в мультиобходе σ из v_i в v_j не более чем l . \square

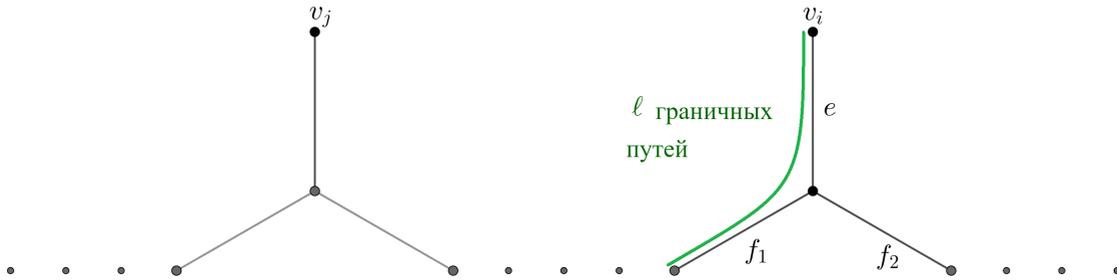


Рис. 3: Дерево G

СЛЕДСТВИЕ 3. В мультиграфе G^σ мультиобхода σ кратности l бинарного дерева G с числом рёбер $r \geq 3$ каждое ребро имеет кратность не более чем l .

Заметим, что $G^\sigma \subset G^\tau$ эквивалентно тому, что $\sigma_{ij} \leq \tau_{ij}$ для всех ij .

ТЕОРЕМА 6. Пусть l -обход σ приводим, причём для соответствующей точки многогранника $\mathbf{X}(G)$ выполнено:

$$x^\sigma = \lambda_1 x^{\xi^1} + \dots + \lambda_n x^{\xi^n}, \quad \lambda_k > 0, k = \overline{1..n}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \quad (7)$$

где ξ^1, \dots, ξ^n — мультиобходы кратностей l_1, \dots, l_n , а $x^{\xi^1}, \dots, x^{\xi^n}$ — соответствующие точки многогранника $\mathbf{X}(G)$. Тогда имеют место следующие включения мультиграфов соответствующих мультиобходов:

$$1) G^{\xi^k} \subset l_k G^\sigma, \quad 2) G^\sigma \subset l(G^{\xi^1} + \dots + G^{\xi^n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим $\xi = \xi^k$ — мультиобход из правой части (7). Требуется показать, что $\xi_{ij} \leq l_k \sigma_{ij}$ для всех ij . Пусть вершины i и j связаны ребром в G^ξ кратности

$\xi_{ij} \geq 1$. Поскольку $\lambda_k > 0$, получаем, что ij -координата в правой части равенства (7) отлична от 0. Для левой части (7) это означает, что $x_{ij}^\sigma > 0$. Далее $x_{ij}^\sigma = \frac{1}{2l}\sigma_{ij} > 0$, но $\sigma_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, значит $\sigma_{ij} \geq 1$, откуда $l_k\sigma_{ij} \geq l_k$. Осталось заметить, что кратность мультиобхода $\xi = \xi^k$ равна l_k по предположению, откуда по лемме 7 получим $\xi_{ij} \leq l_k \leq l_k\sigma_{ij}$.

2) Требуется доказать, что $\sigma_{ij} \leq l(\xi_{ij}^1 + \xi_{ij}^2 + \dots + \xi_{ij}^n)$ для всех ij . Для ij -координаты равенство (7) запишется в виде:

$$\frac{1}{2l}\sigma_{ij} = \lambda_1 \frac{1}{2l_1}\xi_{ij}^1 + \lambda_2 \frac{1}{2l_2}\xi_{ij}^2 + \dots + \lambda_n \frac{1}{2l_n}\xi_{ij}^n.$$

Пусть $\sigma_{ij} > 0$, тогда и правая часть строго больше 0, следовательно найдётся такой мультиобход ξ^k , что $\xi_{ij}^k > 0$, значит $\xi_{ij}^k \geq 1$, откуда $l\xi_{ij}^k \geq l$. Отсаётся заметить, что $\sigma_{ij} \leq l$ в силу леммы 7. \square

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\xi = \xi^k$ — 1-обход в условиях предыдущей теоремы, то $G^\xi \subset G^\sigma$.

5.3. Неприводимые мультиобходы кратности 2 дерева с 3 усами и 6 граничными вершинами

В этом разделе $G \in \mathfrak{B}_3$ и имеет 6 граничных вершин.

В работе [2] полностью разобран случай (раздел 3.3) дерева G : найдены все вершины многогранника этого бинарного дерева, все неприводимые мультиобходы и соответствующие мультиграфы. Для этого в [2] с помощью компьютера найдены все вершины допустимого множества — многогранника $\mathbf{X}(G)$. При таком подходе нужно решить 5005 (или 924, с учётом предложения 1) систем линейных уравнений 9×9 , что делает ручную проверку практически невозможной.

Разработанная в данной работе техника позволяет решить задачу о поиске всех неприводимых мультиобходов дерева G , не прибегая к компьютерным вычислениям. Для этого будем использовать теорему 2, ограничивающую кратность неприводимых мультиобходов и теорему 4, устанавливающую существование мультиобходов указанного вида.

Построим всевозможные мультиобходы для G , которые могут быть неприводимы в теореме 2 и докажем их неприводимость. Начнём с построения 1-обходов. Согласно теореме 2 обходы имеют вид: $(A_1B_1C_1)$, где для цепи A_1 возможно 2 варианта: $A_1 = 12$ или $A_1 = 21$. Для B_1 возможно $B_1 = 34$ или $B_1 = 43$ и $C_1 = 56$ или $C_1 = 65$. Итого получаем $2^3 = 8$ возможных 1-обходов:

$$\xi^1 \cong (123456), \quad \xi^2 \cong (123465), \quad \xi^3 \cong (124356), \quad \xi^4 \cong (124365),$$

$$\xi^5 \cong (213456), \quad \xi^6 \cong (213465), \quad \xi^7 \cong (214356), \quad \xi^8 \cong (214365).$$

Построим мультиобходы кратности 2. Согласно теореме 2 их не более 4, далее по теореме 2 они имеют вид $(A_1B_1C_1A_2B_2C_2)$. Для цепей A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$) возможен такой же выбор как и для цепей A_1, B_1, C_1 в случае 1-обходов. По теореме 2 две цепи в неприводимом 2-обходе, соответствующие одному побегу, не могут обе сразу начинаться или заканчиваться концевой вершиной побега, то есть случаи когда $A_1 = A_2$ дают приводимые мультиобходы. Для побега из 2 листьев это означает, что цепь A_2 полностью определена цепью A_1 , и тоже справедливо для B_i и C_i . Итого получается $2^3 = 8$ вариантов для построения мультиобхода. В доказательстве теоремы 2 в [14] отмечено, что мультиобходы вида $(A_1B_1C_1A_2B_2C_2)$ и $(A_2B_2C_2A_1B_1C_1)$ совпадают, из двух возможных вариантов выбора A_1 будем выбирать тот у которого $A_1 = 12$, значит остаётся всего 4 мультиобхода, которые могут быть неприводимы:

$$\sigma^1 = (123456214365), \quad \sigma^2 = (124356213465), \quad \sigma^3 = (123465213456), \quad \sigma^4 = (124365213456). \quad (8)$$

Мультиобходу ξ кратности l соответствует замкнутая цепь в $IK(M)$, проходящая через каждую вершину ровно l раз, в частности при $l = 1$ эта цепь представляет собой гамильтонов цикл в $K(M)$ состоящий из рёбер графа G^ξ .

Рассмотрим граф Δ на рисунке 4. Пусть E — множество рёбер графа Δ , а $E' := \{(12), (34), (56)\} \subset E$.

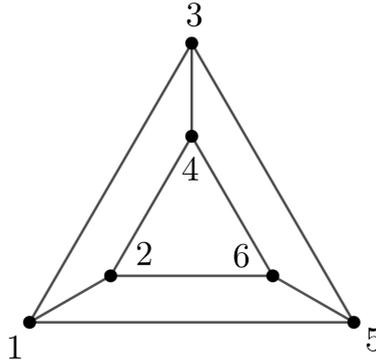


Рис. 4: Граф Δ

ЛЕММА 8. *В графе Δ не существует гамильтонового цикла, проходящего через все рёбра из E' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного, пусть такой гамильтонов цикл существует. Прохождение по ребру из E' меняет чётность номера вершины, а прохождение по ребру из $E \setminus E'$ нет. В таком цикле 6 рёбер, ровно 3 из E' , значит чётность меняется 3 раза, что невозможно. \square

Далее нам понадобится мультиграф Δ' , вершины которого такие же как у графа Δ , рёбра из E' имеют кратность 2, а рёбра из $E \setminus E'$ — кратность 1. Лемма 8 легко обобщается на случай мультиграфа Δ' .

ТЕОРЕМА 7. *Для бинарного дерева $G \in \mathfrak{B}_3$ с 6 граничными вершинами, его 2-обходы σ^i , $i = \overline{1..4}$ неприводимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для мультиобходов σ^i , $i = \overline{1..4}$ рассмотрим их мультиграфы: G^{σ^i} , $i = \overline{1..4}$ (рис. 5). Несложно видеть, что все они изоморфны графу Δ' .

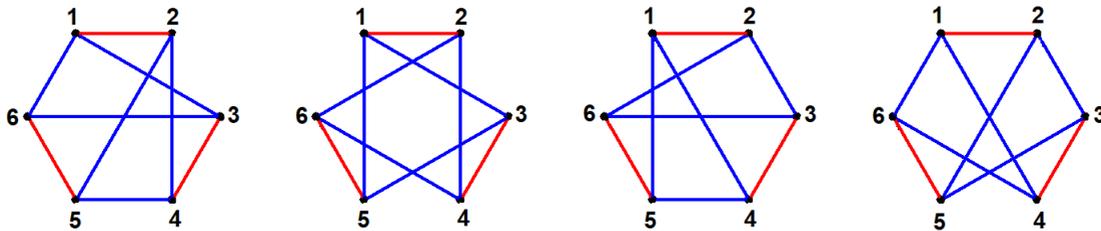


Рис. 5: Мультиграфы мультиобходов $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ соответственно (красные рёбра имеют кратность 2, синие — кратность 1.)

Положим $\sigma^i = \tau$ для некоторого финансируемого i , а оставшиеся 3 мультиобхода σ^j обозначим как σ, η, ζ .

Пусть \mathbf{X}^1 — выпуклая оболочка всех точек многогранника \mathbf{X} , соответствующих 1-обходам. Заметим, что таких точек 8, по теореме об 1-обходах, обозначим их $x^{\xi^1}, \dots, x^{\xi^8}$. Поскольку мультиобход τ имеет кратность 2, по определению точки многогранника x^τ , получаем $x^\tau = \frac{1}{4}w^\tau$.

Покажем, что $x^\tau \notin \text{conv} \{\mathbf{X}^1, \sigma, \eta, \zeta\}$. От противного, тогда

$$x^\tau = \lambda_1 x^{\xi^1} + \dots + \lambda_8 x^{\xi^8} + \lambda_9 x^\sigma + \lambda_{10} x^\eta + \lambda_{11} x^\zeta, \quad \lambda_k \geq 0, k = \overline{1..11}, \quad \sum_{k=1}^{11} \lambda_k = 1. \quad (9)$$

Сначала покажем, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_8 = 0$. От противного, рассмотрим такой $\xi = \xi^k$ при котором коэффициент $\lambda_k > 0$, из следствия 4 получаем включение $G^\xi \subset G^\tau$. С другой стороны пары вершин (1, 2), (3, 4) и (5, 6) образуют усы. По следствию 1 получаем $\xi_{12} = \xi_{34} = \xi_{56} = 1$, и все ребра из E' входят в G^ξ . По лемме 8 гамильтонов цикл, соответствующий ξ , не может содержаться в G^τ , то есть $G^\xi \not\subset G^\tau$ — противоречие.

Далее рассмотрим 4 точки x^{σ^i} , $i = \overline{1..4}$, соответствующие мультиобходам σ^i :

$$\begin{aligned} x^{\sigma^1} &= \frac{1}{2}(2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 2), & x^{\sigma^2} &= \frac{1}{2}(2, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2), \\ x^{\sigma^3} &= \frac{1}{2}(2, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2), & x^{\sigma^4} &= \frac{1}{2}(2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 2). \end{aligned}$$

Рассмотрим векторы $u_j = x^{\sigma^j} - x^{\sigma^4}$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(0, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ u_2 &= \frac{1}{2}(0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 1, -1, -1, 1, 0), \\ u_3 &= \frac{1}{2}(0, -1, 1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1, -1, -1, 1, 0). \end{aligned}$$

Эти векторы линейно независимы, значит 4 точки x^{σ^i} , $i = \overline{1..4}$, аффинно независимы, следовательно равенство (9) невыполнимо, следовательно мультиобходы $\sigma^1, \dots, \sigma^4$ кратности 2 неприводимы. \square

5.4. Существование неприводимого мультиобхода у бинарного дерева с 3 усамми

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8. *У всякого дерева G из \mathfrak{B}_3 существуют неприводимые мультиобходы кратности 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного, в силу теоремы 2, кратность неприводимых мультиобходов ≤ 2 , тогда неприводимы только 1-обходы дерева G , которые существуют по теореме 4. Значит многогранник \mathbf{X} бинарного дерева G совпадает с \mathbf{X}^1 — выпуклой оболочкой точек вида x^ξ , где ξ — 1-обходы. Тогда для любого 2-обхода σ соответствующая точка x^σ принадлежит \mathbf{X}^1 . Рассмотрим мультициклический порядок

$$\sigma \cong (a_1 a_2 \dots a_p b_q b_{q-1} \dots b_1 c_1 c_2 \dots c_s a_p a_{p-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_q c_s c_{s-1} \dots c_1).$$

По теореме 4 он задаёт мультиобход. Построим мультиграф G^σ для этого мультиобхода (рис. 6).

Рассмотрим произвольный 1-обход ξ графа G . Как и ранее покажем, что $G^\xi \not\subset G^\sigma$. Сделаем переобозначение: $\hat{a}_2 = a_p$, $\hat{b}_2 = b_q$, $\hat{c}_2 = c_s$. Графу G^ξ соответствует гамильтонов цикл в $K(M)$. Предположим, что в G^σ существует гамильтонов цикл, соответствующий обходу ξ . Пара вершин (a_1, a_2) образует усы, по следствию 2 получаем $\xi_{12} = 1$, то есть ребро $(a_1 a_2)$ входит в гамильтонов цикл. Поскольку у вершины a_2 только две смежные вершины в G^σ — вершины



Рис. 6: Граф G^σ

a_1 и a_3 , то в нём есть и вершина a_3 , продолжая рассуждение, получаем, что этот цикл должен содержать всю цепь $a_1 \dots \hat{a}_2 = a_1 a_2 \dots a_{p-1} \hat{a}_2$. Аналогично в него входят цепи $b_1 \dots \hat{b}_2$ и $c_1 \dots \hat{c}_2$. Остаётся заметить, что цикл, проходя по каждой из вышеуказанных цепей меняет чётность нижнего индекса вершины (после переобозначения), а прохождение по оставшимся рёбрам G^σ нет, то есть чётность в цикле меняется 3 раза, что невозможно. Откуда $x^\sigma \notin \mathbf{X}^1$, противоречие. \square

6. Результаты компьютерных экспериментов

В заключение данной работы приведем таблицу, в которой указано количество неприводимых мультиобходов (с точностью до эквивалентности) для деревьев из \mathfrak{B}_3 с небольшим количеством m граничных вершин. Напомним, что такое дерево задается длинами трех побегов, каждый из которых содержит усы, поэтому имеет длину не меньше двух.

№	m	Длины побегов	1-обходы	2-обходы	Всего
1	6	(2, 2, 2)	8	4	12
2	7	(2, 2, 3)	16	16	32
3	8	(2, 2, 4)	32	56	88
4	8	(2, 3, 3)	32	64	96
5	9	(3, 3, 3)	64	256	320
6	9	(2, 2, 5)	64	164	248
7	9	(2, 3, 4)	64	224	288

Из данной таблицы видно, что верхняя оценка на число 2-обходов достигается для случаев 1, 2, 4, 5, но не точна для остальных случаев.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, А.О., Тужилин, А.А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 5. С. 65-118.
2. Ivanov, A., Tuzhilin, A. Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space // Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Cham. 2022. pp. 165-182.

3. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*. - Vol. 625 of Contemporary Mathematics. - United States: AMS Press, 2014. pp. 9-35.
4. Еремин, А.Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства. Матем. сб. 2013. Т.204, № 9. С.51-72.
5. Иванов, А.О., Тужилин, А.А. Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети, Матем. сб. 1991. Т. 182, № 12, с.1813–1844
6. Gromov, M. Filling Riemannian Manifolds // *J.Differential Geom.* 1983. vol.18, № 1. pp.1-147.
7. Беднов, Б.Б., Бородин, П.А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения. Матем. сб. 2014. т.205 № 4, 3–20;
8. Степанова, Е.И. Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера на евклидовом пространстве // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2016, № 2. С.48-51.
9. Степанова, Е.И. Бифуркации минимальных заполнений для четырех точек евклидовой плоскости // *Фундамент. и прикл. матем.* 2019. Т. 22, № 6. С. 253–261.
10. Рублева, О.В. Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012. № 2. С.8-11.
11. Овсянников, З.Н. Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно // *Фунд. и прикл. матем.* 2013. Т.18, № 2. С.153-156.
12. Иванов, А.О., Овсянников, З.Н., Стрелкова, Н.П., Тужилин, А.А. Одномерные минимальные заполнения с ребрами отрицательного веса // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2012. № 5. С.3-8.
13. Щербаков, О.С. Многогранники бинарных деревьев, строение многогранника дерева типа «змея». Чебышёвский сб. 2022. Т.23, № 85. С.136-151.
14. Щербаков, О.С. Оценки на кратности неприводимых мультиобходов некоторых бинарных деревьев. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2025, № 2.
15. Васильев, Ф.П., Иваницкий, А.Ю. *Линейное программирование*. М.: МЦНМО, 2020.
16. Смирнов, Е.Ю. *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопеременные матрицы*. М.: МЦНМО, 2014.
17. Ландо, С.К. *Введение в дискретную математику*. М.: МЦНМО, 2014.
18. Пахомова, А.С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2014. № 1, С.17–25.

REFERENCES

1. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 2012, “One-dimensional Gromov minimal filling problem”, *Sbornik: Mathematics*, Vol. 203, № 5. pp. 65–118.
2. Ivanov, A., Tuzhilin, A. 2022, “Dual Linear Programming Problem and One-Dimensional Gromov Minimal Fillings of Finite Metric Space”, *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics*. Birkhäuser, Cham, pp. 165–182.

3. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 2014, “Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art”, *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*, Vol. 625 of Contemporary Mathematics. - United States: AMS Press, pp. 9–35.
4. Eremin, A.Yu. 2013, “A formula for the weight of a minimal filling of a finite metric space”, *Sbornik: Mathematics*, Vol. 204, № 9. pp.51–72.
5. Ivanov, A.O., Tuzhilin, A.A. 1993, “The Steiner problem in the plane or in plane minimal nets”, *Math. USSR-Sb*, Vol. 74, № 2. pp. 555–582.
6. Gromov, M. 1983, “Filling Riemannian Manifolds”, *J.Differential Geom*, Vol.18, № 1. pp.1–147.
7. Bednov, B.B., Borodin, P.A. 2014, “Banach spaces that realize minimal fillings”, *Sb. Math.*, Vol.205, № 4. pp. 459–475.
8. Stepanova, E.I. 2016, “Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol.71 № 2. pp.79–81.
9. Stepanova, E.I. 2019, “Bifurcations of minimal fillings for four points on the Euclidean plane”, *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol.22. № 6. pp. 253–261.
10. Rubleva, O.V. 2012, “The additivity criterion for finite metric spaces and minimal fillings”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol.67. № 2. pp. 52–54.
11. Ovsyannikov, Z.N. 2013, “An open family of sets that have several minimal fillings”, *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol.18. № 2. pp.153–156.
12. Ivanov, A.O., Ovsyannikov, Z.N., Strelkova, N.P., Tuzhilin, A.A. 2012, “One-dimensional minimal fillings with negative edge weights”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2012. Vol.67. № 5-6, pp.189–194.
13. Shcherbakov, O.S. 2022, “Polytopes of Binary Trees, Structure of the Polytop for the “Snake-type”-Tree”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 23. № 4. pp.136–151.
14. Shcherbakov, O.S. 2025, “Estimates of the multiplicity of irreducible multitours for some binary trees”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 82. № 2.
15. Vasilyev, F.P., Ivanitskiy A.Y. 2001, “In-Depth Analysis of Linear Programming”, *Dordrecht: Springer*.
16. Smirnov, E.Yu. 2014, “Young Diagrams, Plane Partitions and Alternating-sign Matrices”, *Moscow: MCCME*.
17. Lando, S.K. 2014, “Introduction to Discrete Mathematics”, *Moscow: MCCME*.
18. Pahkomova A.C. 2014, “Estimates of Steiner subratio and Steiner–Gromov ratio”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Vol. 69. № 1. pp. 16–23.

Получено: 10.04.2024

Принято в печать: 04.09.2024