ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 512.56, 517.982.272 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-86-100

Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширения решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

Захаров Валерий Константинович — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: zakharov_valeriy@list.ru
Родионов Тимофей Викторович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: rodionovtv@mail.ru

Аннотация

В 1872 году Р. Дедекиндом была построено множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ как некоторое расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ способом взятия счётных порядковых регулярных сечений. Этот способ был обобщён и применён Г. Макнейлом к некоторым упорядоченным математическим системам. В данной статье способ Дедекинда – Макнейла применяется к математической системе C, порождённой семейством $C_b(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных ограниченных функций $f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ на тихоновском топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$.

Рассматривается *дедекиндово расширение* $C \rightarrowtail D(C)$, а также *счётно-дедекиндово расширение* $C \rightarrowtail D^0(C)$, как более близкий аналог классического расширения $\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Даются функционально-факторные описания указанных расширений через семейства равномерных функций относительно ансамблей подмножеств множества T, обладающих свойством Стоуна и конуль-свойством Стоуна.

Даются характеризации указанных расширений как некоторых пополнений решёточного линейного пространства C, наделённого некоторой *локальной структурой идеального измельчения*.

Функциональное описание и характеризация счётно-дедекиндова расширения $C \rightarrowtail D^0(C)$ оказываются удивительным образом совпадающим с функциональным описанием и характеризацией риманова расширения $C \rightarrowtail R_\mu$, порождённого фактор-семейством всех функций на тихоновском пространстве $(T, \mathcal{G})$, μ-интегрируемых по Риману относительно положительной ограниченной радоновской меры μ.

Ключевые слова: равномерные функции, латлинеалы, cr_b-пополнение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Захаров, В.К., Родионов, Т.В. Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширений решёточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 86–100.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 512.56, 517.982.272 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-86-100

Characterization of the Dedekind and countably Dedekind extensions of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries

V. K. Zakharov, T. V. Rodionov

Zakharov Valeriy Konstantinovich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: zakharov_valeriy@list.ru
Rodionov Timofey Victorovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: rodionovtv@mail.ru

Abstract

In 1872 R. Dedekind constructed the set of real numbers $\mathbb{R}$ as a certain extension of the set of rational numbers $\mathbb{Q}$ by taking countable order regular cuts. This method was generalized and applied by G. MacNeille to some ordered mathematical systems. In this article the Dedekind – MacNeille method is applied to the mathematical system C generated by the family $C_b(T, \mathcal{G})$ of all continuous bounded functions $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ on the Tikhonov topological space $(T, \mathcal{G})$.

We consider *Dedekind extension* $C \rightarrowtail D(C)$, and also *countably Dedekind extension* $C \rightarrowtail D^0(C)$ as a closer analogue of the classical extension $\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$. Functional-factor descriptions of these extensions are given through families of functions uniform with respect to ensembles of subsets of the set T having the Stone property and the Stone cozero property.

Characterizations of these extensions are given as some completions of the lattice linear space C endowed with some *local structure of ideal refinement*.

The functional description and characterization of the countable Dedekind extension $C \rightarrowtail D^0(C)$ turn out to be surprisingly similar with the functional description and characterization of the Riemannian extension $C \rightarrowtail R_\mu$ generated by the factor-family of all functions on the Tikhonov space $(T, \mathcal{G})$ μ-Riemann integrable with respect to a positive bounded Radon measure μ.

Keywords: uniform functions, latlineals, cr_b-completions.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Zakharov, V.K., Rodionov, T.V., 2024, “Characterization of the Dedekind and countably Dedekind extensions of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 86–100.

1. Введение

Ещё в 1872 году Р. Дедекиндом была построено множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ как некоторое расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ способом взятия счётных порядковых сечений. В 1937 году этот способ был обобщён и применён Г. Макнейлом к произвольным упорядоченным множествам и решёткам [1]. Затем способ Дедекинда – Макнейла был распространён на упорядоченные абелевы группы и на решёточные линейные пространства.

Напомним, что *решёточным линейным пространством* (короче *латлинеалом*) называется такая математическая система $(A, \mathbb{R}, 0, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$, что:

- $|A, \mathbb{R}, 0, +, \cdot_{\mathbb{R}}|$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$;
- $|A, \vee, \wedge|$ является решёткой;
- $\forall a, b, c \in A\ (a \vee b + c = (a + c) \vee (b + c)$ и $\forall a, b, c \in A\ (a \wedge b + c = (a + c) \wedge (b + c))$;
- $\forall r \in \mathbb{R}_+\ \forall a, b \in A\ (r(a \vee b) = ra \vee rb$ и $\forall r \in \mathbb{R}_+\ \forall a, b \in A\ (r(a \wedge b) = ra \wedge rb)$.

В латлинеале A вводится *отношение порядка*: $a \leq b$, если $a \wedge b = a$. Если $a \in A$, то $a_+ \equiv a \vee 0$ и $a_- \equiv a \wedge 0$. В латлинеале выполнены равенства $a = a_+ + a_-$ и $|a| \equiv a \vee (-a) = a_+ - a_-$.

Пара подмножеств (P, Q) упорядоченного множества $(A, \leqslant)$ называется *сечением в* A, если $p \leqslant q$ для всех $p \in P$ и $q \in Q$. Сечение (P, Q) называется *сечением Макнейла* или *регулярным*, если $Q = P^u \equiv \{h \in A \mid \forall p \in P\ (h \geqslant p)\}$ и $P = Q^l \equiv \{g \in A \mid \forall q \in Q\ (g \leqslant q)\}$. В [1] было построено *расширение Дедекинда – Макнейла* $w\colon A \rightarrowtail D(A)$, в котором $D(A)$ является упорядоченным множеством всех регулярных сечений упорядоченного множества $(A, \leqslant)$, к которым добавлены множества A^l и A, а $w(a) \equiv (\{a\}^{ul}, \{a\}^u)$ для любого $a \in A$.

Кроме классического расширения $w\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail D(\mathbb{Q})$ особый интерес представляет *дедекиндово расширение* $w\colon C \rightarrowtail D(C)$ *семейства* $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ *всех непрерывных ограниченных функций* $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ на тихоновском (вполне регулярном) топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$ с ансамблем открытых подмножеств $\mathcal{G}$.

Долгое время функциональное описание абстрактного дедекиндова расширения $w\colon C \rightarrowtail D(C)$ через какие-либо функции на T было неизвестно. Краткие изложения этого описания были даны в работе [2] в общем виде, а в работе [3] — через фактор-семейство Z равномерных функций относительно ансамбля $\mathcal{SP}$ подмножеств множества T со свойством Стоуна. Полное изложение этого функционального описания даётся в разделе 2 настоящей статьи.

После нахождения функционального описания $D(C) \approx Z$ возникла *задача характеризации дедекиндова расширения* $u\colon C \rightarrowtail Z$ математической системы C в терминах структур $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot$, $\cdot_{\mathbb{R}}$, $\vee$, $\wedge$, аналогичная *задаче характеризации классического дедекиндова расширения* $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ *математической системы рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ в терминах структур 0, 1, $+$, $\cdot$, $\vee$, $\wedge$.

Построение классического дедекиндова расширения $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ обладает одной важной особенностью: регулярные сечения (P, Q) в $\mathbb{R}$ являются *счётными*. Поэтому в качестве более близкого аналога расширения $u\colon \mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ в разделе 2.3 для семейства C рассматривается *счётно-дедекиндово расширение* $u\colon C \rightarrowtail D^0(C)$ и даётся функциональное описание множества $D^0(C)$ всех счётно-тесных сечений семейства C через фактор-семейство Z^0 равномерных функций относительно ансамбля $\mathcal{SP}^0$ подмножеств множества T с конуль-свойством Стоуна.

Указанные выше структуры для системы C разделяются на две принципиально разные части. Если брать только кольцевые структуры $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot$, то они связаны дистрибутивным **равенством** $a(b + c) = ab + ac$. Если же брать только структуры решёточного линейного пространства $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\cdot_{\mathbb{R}}$, $\vee$, $\wedge$, то они связаны лишь дистрибутивным **неравенством** $a \wedge (b + c) \leqslant a \wedge b + a \wedge c$. По этой причине работа с последними структурами является концептуально более сложной, чем с первыми.

Поэтому вначале в работах [5] – [9] была дана характеризация функционально-факторных расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u\colon C \rightarrowtail Z^0$ как некоторых делимых оболочек $u\colon C \rightarrowtail A$ кольца C.

Наличие у решёточных линейных пространств только дистрибутивного неравенства $a \wedge (b + c) \leqslant a \wedge b + a \wedge c$ вместо дистрибутивного равенства $a(b + c) = ab + ac$ у колец приводит к тому, что кажущийся на первый взгляд параллелизм между свойством *кольцевой делимости*, как хорошего продолжения гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(D, A)$ для идеала D в A до гомоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$, и свойством порядковой полноты, как существования хорошей *зазорной границы* $P \leqslant a \leqslant Q$ для сечения $P \leqslant Q$ в A, на некотором этапе теряется. Поэтому долгое время не удавалось найти свойство, характеризующее *узость зазора* в сечении $P \leqslant Q$ и позволяющее создать в этом зазоре указанный элемент $a \in A$. Такое свойство было найдено в работе [10] (см. также [11]).

Раздел 3 данной работы посвящён характеризации функционально-факторных расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u\colon C \rightarrowtail Z^0$ как некоторых порядковых пополнений $u\colon C \rightarrowtail A$ решёточного линейного пространства C. Представленная характеризация была анонсирована в [12].

В данной работе систематически используются понятия и обозначения из книг [13] и [14].

2. Функциональное описание дедекиндова расширения семейства непрерывных ограниченных функций. Счётно-дедекиндово расширение

2.1. Функциональное описание дедекиндова расширения

Через $\mathcal{U}$ обозначим подансамбль ансамбля $\mathcal{G}$, состоящий из всех всюду плотных открытых множеств U. Рассмотрим идеальный ансамбль [14, 2.1.4] $\mathcal{R} \equiv \{R \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}\ (R \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных замкнутых множеств. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP} \equiv \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}\ \exists R \in \mathcal{R}\ (P = G \cup R)\}$ всех множеств из T *со свойством Стоуна*.

Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{SP})$ всех *$\mathcal{SP}$-равномерных функций*, т. е. таких функций, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное покрытие $(S_k \in \mathcal{SP} \mid k \in K)$ множества T, для которого колебание $\omega(f, S_k) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid s, t \in S_k\}$ меньше $1/n$ для любого $k \in K$ [14, 2.4.1]. Фактор-семейство $U(T, \mathcal{SP})/\mathcal{R}$ по идеальному ансамблю $\mathcal{R}$ [14, 2.2.6] обозначим через Z. Определим инъективное отображение $u\colon C \rightarrowtail Z$, полагая $uc \equiv \bar{c} \bmod \mathcal{R}$.

Обозначим через $SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $SC_b^u(T, \mathcal{G})$ подсемейства всех полунепрерывных снизу и, соответственно, сверху функций семейства $F_b(T)$ всех ограниченных вещественнозначных функций $f\colon T \twoheadrightarrow \mathbb{R}$. Имеет место вложение $SC_b^l(T, \mathcal{G}) \cup SC_b^u(T, \mathcal{G}) \subset U(T, \mathcal{SP})$.

Если (P, Q) — сечение в C, то ему можно сопоставить функции $g \equiv \sup P$ и $h \equiv \inf Q$, где супремум и инфимум берутся в упорядоченном множестве $F_b(T)$ относительно поточечного порядка. Легко проверить, что $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$, $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$ и $g \leqslant h$.

Теорема 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство и $C = C_b(T, \mathcal{G})$. Тогда*:

1) *если $(P, Q) \in D(C)$ то для определённых выше функций g и h имеет место равенство $\bar{g} \bmod \mathcal{R} = \bar{h} \bmod \mathcal{R}$ в фактор-множестве Z*;

2) *отображение $v\colon D(C) \twoheadrightarrow Z$, такое что $v(P, Q) \equiv a \equiv \bar{g} \equiv \bar{h}$, является биективным*;

3) *$(v \circ w)c = \bar{c}$ для любой функции $c \in C$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P \exists q \in Q (q(t) - p(t) > 1/n), n \in \mathbb{N}\}$. Предположим, что $S \equiv T \setminus \operatorname{cl} U_n \neq \varnothing$. Тогда $q(t) - p(t) \geqslant 1/n$ для любых p и q и любого $t \in S$. Так как наше пространство тихоновское, существует такая ненулевая функция $x \in C_+$, что $\operatorname{coz} x \subset S$, $x \leqslant \mathbf{1}/(3n)$ и $S_x \equiv \{t \in S \mid x(t) = 1/(3n)\} \neq \varnothing$.

Рассмотрим функции $\widetilde{q} \equiv q - x$. Ясно, что $\widetilde{q} \geqslant p$ для любой $p \in P$. По условию $\widetilde{q} \in P^u = Q$. Следовательно, для $t \in S_x$ имеем $\widetilde{h}(t) \equiv \inf(\widetilde{q}(t) \mid q \in Q) = \inf(q(t) \mid q \in Q) - x(t) = h(t) - 1/(3n) < < h(t)$ (см. лемму 1 в [13, 1.4.5]). С другой стороны, в силу регулярности сечения, из $\widetilde{q} \in P^u = Q$ вытекает $\widetilde{h}(t) \geqslant h(t)$. Из полученного противоречия следует $R = \varnothing$, т. е. $U_n \in \mathcal{U}$.

Если $t \in U_n$, то $h(t) - g(t) \leqslant q(t) - p(t) < 1/n$. Значит, $R_n \equiv \{t \in T \mid h(t) - g(t) \geqslant 1/n\} = = T \setminus U_n \in \mathcal{R}$ влечёт $R_n \in \mathcal{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $g \sim h \bmod \mathcal{R}$.

По теореме 1 из [14, 2.5.2] имеем $g, h \in QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R})$, где последнее семейство определяется как множество ограниченных функций $(f\colon T \twoheadrightarrow \mathbb{R})$, таких что для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $R \in \mathcal{R}$ и конечная коллекция $((G_i \in \mathcal{G} \mid i \in I))$, для которых коллекция

$((G_i \cap D \mid i \in I))$ является покрытием множества $(D \equiv T \setminus R)$ и $(\omega(F, G_i \cap D) < \varepsilon)$ для каждого $(i \in I)$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] $QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R}) = U(T, \mathcal{SP})$. Поэтому $\bar{g} = \bar{h} \in Z$.

Таким образом, регулярному сечению (P, Q) мы сопоставили элемент $a \equiv \bar{g} = \bar{h} \in Z$. Отображение $(P, Q) \longmapsto a$ из $D(C)$ в Z обозначим через v.

Убедимся в сюръективности отображения v. Пусть $a \equiv \bar{f} \in Z$. По теореме 1 из [14, 2.5.2] существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\bar{g} = a = \bar{f}$. По предложению 2 из [14, 2.3.8] для функций g и h существуют такие множества P и Q в C, что $g = \sup P$ и $q = \inf Q$ в $F_b(T)$.

Поскольку сечение (P, Q) не обязательно регулярно, рассмотрим пару (P', Q') в C, где $P' \equiv \{p \in C \mid p \leqslant h\}$ и $Q' \equiv \{q \in Q \mid g \leqslant q\}$.

Если $p \in P'$ и $q \in Q'$, то $p \leqslant h$ и $q \geqslant g$. Поэтому $q - p \geqslant g - h$ влечёт $q(t) - p(t) \geqslant g(t) - h(t) > -1/n$ для любого $t \in U_n$, откуда в силу непрерывности функций p и q и плотности множества U_n следует, что $q(t) - p(t) \geqslant -1/n$ для всех $t \in T$. Далее, в силу архимедовости $\mathbb{R}$ и произвольности n получаем $q(t) \geqslant p(t)$ и $q \geqslant p$. Следовательно, (P', Q') является сечением.

Проверим его регулярность. Пусть $y \in P'^u$, т. е. $y \in C$ и $p \leqslant h$ влечёт $y \geqslant p$. Если $p \in P$, то $p \leqslant g \leqslant h$ влечёт $y \geqslant p$, т. е. $y \geqslant g$. Следовательно, $y \in Q'$. Таким образом, $P'^u \subset Q'$. Пусть $y \in Q'$, т. е. $g \leqslant y$. Пусть $p \in P'$, т. е. $p \in C$ и $p \leqslant h$. Для $t \in U_n$ имеем $h(t) - g(t) < 1/n$. Следовательно, $y(t) \geqslant g(t) > h(t) - 1/n \geqslant p(t) - 1/n$. В силу плотности U_n и непрерывности функций y и p получаем $y(t) \geqslant p(t) - 1/n$ для всех $t \in T$, т. е. $y \geqslant p$. Поэтому $y \in P'^u$. Таким образом, $Q' \subset P'^u$. В итоге $P'^u = Q'$.

Пусть теперь $z \in Q'^l$, т. е. $z \in C$ и $q \geqslant g$ влечёт $z \leqslant q$, т. е. $z \leqslant h$. Следовательно, $z \in P'$. Таким образом, $Q'^l \subset P'$. Пусть $z \in P'$, т. е. $z \leqslant h$. Пусть $q \in Q'$, т. е. $q \in C$ и $g \leqslant q$. Для $t \in U_n$ имеем $h(t) - g(t) < 1/n$. Следовательно, $z(t) \leqslant h(t) < g(t) + 1/n \leqslant q(t) + 1/n$. Как и выше это неравенство влечёт неравенство $z \leqslant q$. Поэтому $z \in Q'^l$. Таким образом, $P' \subset Q'^l$. В итоге $Q'^l = P'$.

Для регулярного сечения (P', Q') рассмотрим соответствующие функции $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Ясно, что $g' \leqslant h'$.

Пусть $p \in P$. Тогда $p \leqslant g \leqslant h$ влечёт $p \in P'$. Значит, $P \subset P'$. Пусть $q \in Q$. Тогда $g \leqslant h \leqslant q$ влечёт $q \in Q'$. Значит, $Q \subset Q'$.

Отсюда следует, что $g \leqslant g'$ и $h \geqslant h'$. Поэтому неравенство $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$ означает, что $a = \bar{g}' = \bar{h}'$, т. е. $a = v(P', Q')$.

Проверим, что отображение v инъективно. Пусть (P_1, Q_1) и (P_2, Q_2) — такие регулярные сечения, что $\bar{g}_1 = \bar{h}_1$, $\bar{g}_2 = \bar{h}_2$ и $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$. Тогда существуют такие плотные открытые множества U_n^1, U_n^2 и V_n, что $h_1(t) - g_1(t) < 1/n$ для любого $t \in U_n^1$, $h_2(t) - g_2(t) < 1/n$ для любого $t \in U_n^2$ и $|g_1(t) - g_2(t)| < 1/n$ для любого $t \in V_n$. Рассмотрим плотные открытые множества $W_n \equiv U_n^1 \cap U_n^2 \cap V_n$. Пусть $p_1 \in P_1$ и $t \in W_n$. Тогда $p_1(t) \leqslant h_1(t) \leqslant g_1(t) + 1/n < g_2(t) + 2/n \leqslant h_2(t) + 2/n \leqslant q_2(t) + 2/n$ для любой $q_2 \in Q_2$. По плотности W_n и непрерывности p_1 и q_2 заключаем, что $p_1(t) \leqslant q_2(t) + 2/n$ для всех $t \in T$. В силу архимедовости $\mathbb{R}$ заключаем, что $p_1 \leqslant q_2$, т. е. $p_1 \in Q_2^l = P_2$. Значит, $P_1 \subset P_2$. Подобным образом устанавливается и обратное включение. Таким образом, $P_1 = P_2$. Тогда $Q_1 = P_1^u = P_2^u = Q_2$. В итоге получем равенство $(P_1, Q_1) = (P_2, Q_2)$. □

По лемме 1 из [14, 2.4.3] латлинеал $U(T, \mathcal{SP})$ является равномерно полным. По следствию 2 леммы 5 из [14, 2.2.7] семейство Z является банаховым латлинеалом и банаховой латалгеброй с единицей $\bar{\mathbf{1}}$ и нормой $\|\bar{f}\|_{\bar{\mathbf{1}}} \equiv \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |\bar{f}| \leqslant x\bar{\mathbf{1}}\}$. Легко проверить, что равномерная сходимость в Z и сходимость по норме $\|\cdot\|_{\bar{\mathbf{1}}}$ равносильны. Поэтому Z является c-латлинеалом и c-латалгеброй с единицей $\bar{\mathbf{1}}$.

Определим c-расширение $u\colon C \rightarrowtail Z$, полагая $uc \equiv \bar{c}$ для $c \in C$. Назовём его *дедекиндовым расширением c-латлинеала и c-латалгебры C.*

2.2. Переход к тесным сечениям

Свойство регулярности сечения (P, Q) является слишком сильным. Для того, чтобы дать характеризацию дедекиндова расширения $u\colon C \rightarrowtail Z$ среди всех c-расширений $u\colon C \rightarrowtail A$, рассмотрим более слабое свойство.

Сечение (P, Q) в латлинеале A с единицей $\mathbb{1}$, такой что $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ (|a| \leqslant n\mathbf{1})$, назовём *тесным* или *t-сечением* (“t” от слова “tight”), если для любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из свойства $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$ следует равенство $x = 0$.

Лемма 1. *Пусть $|A, \not\Vdash|$ — c-латлинеал и (P, Q) — регулярное сечение в A. Тогда сечение (P, Q) является тесным.*

Доказательство. Обозначим упорядоченное множество всех максимальных собственных идеалов латлинеала A через T. По теореме Крейнов – Какутани [15, XII.5] латлинеал A изоморфен латлинеалу $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$. Поэтому будем считать, что $A = C$. Рассмотрим плотные открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$ из доказательства теоремы 1. Пусть $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1} + p - q)_+ \wedge x = 0)$ для $x \in C_+$.

Предположим, что $x > 0$. Тогда для любого $t \in \operatorname{coz} x \in \mathcal{G}$ и для любых p и q имеет место равенство $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$. Поскольку множество U_n плотно, существует $t \in \operatorname{coz} x \cap U_n$. Тогда имеет место неравенство $q(t) - p(t) < 1/n$ для некоторых p и q. Из полученного противоречия следует, что $x = 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть (P, Q) — сечение в C и $g \equiv \sup P$ и $q \equiv \inf Q$ — точные верхняя и нижняя границы множеств P и Q в $F_b(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P, Q) является тесным*;

2) $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{R}$;

3) $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{R}$ *и* $g, h \in U(T, \mathcal{SP})$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Рассмотрим открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. Тогда $h(t) - g(t) < 1/n$ для каждого $t \in U_n$. Поэтому $h(t) - g(t) \geqslant 1/n$ для любого $t \in R_n \equiv T \setminus U_n$. Предположим, что $R_n \notin \mathcal{R}$, т.е. $S \equiv T \setminus \operatorname{cl} U_n \neq \varnothing$. Поскольку наше пространство является тихоновским, существует такая ненулевая функция $x \in C_+$, что $\operatorname{coz} x \subset S$. Тогда для любых p и q и $t \in \operatorname{coz} x$ верно $1/n + p(t) - q(t) \leqslant 1/n + g(t) - h(t) \leqslant 0$, т.е. $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$. Следовательно, $(1/n + p(t) - q(t))_+ \wedge x(t) = 0$. Если же $t \notin \operatorname{coz} x$, то также $(1/n + p(t) - q(t))_+ \wedge x(t) = 0$. Поэтому $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$ и $x > 0$. Но это противоречит тесноте (P, Q). Значит, $R_n \in \mathcal{R}$. В итоге $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{R}$.

2) $\vdash$ 1). Пусть $x \in C_+$ и $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$. Поскольку $g \sim h \operatorname{mod} \mathcal{R}$, множество U_n является плотным. Возьмём $t \in U_n$. Тогда найдутся такие p и q, что $q(t) - p(t) < 1/n$. Поэтому $(1/n + p(t) - q(t))_+ > 0$. Из условия на x теперь следует, что $x(t) = 0$. Значит, $\operatorname{coz} x \cap U_n = \varnothing$ и $\operatorname{coz} x \in \mathcal{G}$. Из плотности U_n вытекает $\operatorname{coz} x = \varnothing$ и $x = 0$.

2) $\vdash$ 3). По теореме 1 из [14, 2.5.2] функции g и h принадлежат $QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R})$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R}) = U(T, \mathcal{SP})$.

3) $\vdash$ 2). Эта выводимость очевидна. $\square$

2.3. Счётно-дедекиндово расширение и его функциональное описание

Отказ от регулярных сечений и переход к тесным сечениям в латлинеалах с единицами позволяет ввести понятие счётно-дедекиндова расширения латлинеала $|A, \mathbb{1}|$.

Сечение (P, Q) в A назовём *подсечением сечения* (P', Q'), если $P \subset P'$ и $Q \subset Q'$.

Сечение (P', Q') в A назовём *счётно-тесным*, если у него существует такое счётное подсечение (P, Q) со свойствами $\mathrm{card} P \leqslant \omega_0$ и $\mathrm{card} Q \leqslant \omega_0$, что сечения (P, Q), (P', Q) и (P, Q') являются тесными.

Рассмотрим подмножество $D^0(A)$ множества $D(A)$, состоящее из всех счётно-тесных сечений латлинеала $|A, \mathbb{1}|$.

Пусть $a \in A$. Рассмотрим множества $P_a \equiv \{p \in A \mid p \leqslant a\}$ и $Q_a \equiv P_a^u$. Пара (P_a, Q_a) является регулярным сечением, причём $wa = (P_a, Q_a)$, где w — вложение Дедекинда – Макнейла из введения и теоремы 1. Сечение $(\{a\}, \{a\})$ является счётным подсечением сечения (P_a, Q_a). Поскольку сечения $(\{a\}, \{a\})$, $(\{a\}, Q_a)$ и $(P_a, \{a\})$ являются тесными, сечение (P_a, Q_a) является счётно-тесным. Поэтому $wa \in D^0(A)$.

Таким образом, вложение $w[A] \subset D^0(A)$ означает, что мы можем рассмотреть более узкое расширение $w_0 \colon A \rightarrowtail D^0(A)$. Назовём его *счётно-дедекиндовым расширением латлинеала* $|A, \mathbb{1}|$.

Для нас интерес представляет *счётно-дедекиндово расширение* $w_0 \colon C \rightarrowtail D^0(C)$ *латлинеала* $|C, \mathbf{1}|$.

Дадим его функциональное описание. Через $\mathcal{G}^0$ обозначим ансамбль конуль-множеств $\mathrm{coz}\, f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\} \in \mathcal{G}$ всех функций $f \in C$. Через $\mathcal{U}^0$ обозначим подансамбль ансамбля $\mathcal{G}^0$, состоящий из всех плотных в T конуль-множеств $U \in \mathcal{G}^0$. Рассмотрим идеальный ансамбль $\mathcal{R}^0 \equiv \{R \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}^0\ (R \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных нуль-множеств $\mathrm{z}\, f \equiv \{t \in T \mid f(t) = 0\}$ функций $f \in C$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP}^0 \equiv \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}^0\ \exists R \in \mathcal{R}^0\ (P = G \cup R)\}$.

Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{SP}^0)$ всех $\mathcal{SP}^0$-равномерных функций. Фактор-семейство $U(T, \mathcal{SP}^0)/\mathcal{R}^0$ обозначим через Z^0.

Лемма 3. *Пусть (P, Q) — счётное сечение в C и $g \equiv \sup P$ и $q \equiv \inf Q$ — точные верхняя и нижняя границы множеств P и Q в $F_b(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P, Q) является тесным*;

2) $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$;

3) $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ *и* $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Рассмотрим множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. По утверждению 6) предложения 1 из [14, 2.2.5] имеем $U_n \in \mathcal{G}^0$. Далее доказательство проводится так же, как в выводе 1) $\vdash$ 2) из доказательства леммы 2.

2) $\vdash$ 1). Вывод полностью совпадает с выводом 2) $\vdash$ 1) из доказательства леммы 2 при замене $\mathcal{R}$ на $\mathcal{R}^0$.

2) $\vdash$ 3). По теореме 1 из [14, 2.5.2] функции g и h принадлежат $QU_b(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{R}^0)$. По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $QU_b(T, \mathcal{G}^0, \mathcal{R}^0) = U(T, \mathcal{SP}^0)$.

3) $\vdash$ 2). Эта выводимость очевидна. $\square$

Лемма 4. *Пусть (P', Q') — счётно-тесное регулярное сечение в C и $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Тогда существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0)$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0)$, что $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$, $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ и $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.*

Доказательство. По условию существует такое счётное подсечение (P, Q) сечения (P', Q'), что сечения (P, Q), (P', Q) и (P, Q') являются тесными. Рассмотрим функции $g \equiv \sup P$ и $h \equiv \inf Q$ в $F_b(T)$. По предложению 1 из [14, 2.3.6] имеем $C = M(T, \mathcal{G}^0)$. Поэтому, в силу предложения 1 из [14, 2.3.8], $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0)$ и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0)$. По лемме 3 имеем $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ и $g, h \in U(T, \mathcal{SP}^0)$. $\square$

Для каждого сечения $d \equiv (P', Q') \in D^0(C)$ рассмотрим множество F_d тех функций $f \in U(T, \mathcal{SP}^0)$, для которых существуют такие функции $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$

и $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$, что $f \sim g \bmod \mathcal{R}^0$, $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$, $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$. По лемме 4 оно не пусто. Если $f_1, f_2 \in F_d$, то из $f_1 \sim g' \bmod \mathcal{R}^0$ и $f_2 \sim g' \bmod \mathcal{R}^0$ следует $f_1 \sim f_2 \bmod \mathcal{R}^0$. Поэтому множество F_d содержится в некотором классе эквивалентности $X \in Z^0$. Если $x \in X$, то $x \sim f \bmod \mathcal{R}^0$ для некоторого $f \in F_d$. Возьмём для функции f функции $g \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h$ из определения F_d. Тогда $x \sim g \bmod \mathcal{R}^0$ влечёт $x \in F_d$. Значит, $x \in F_d$, т. е. $F_d = X \in Z^0$.

Поэтому мы можем определить отображение $v_0 \colon D^0(C) \rightarrowtail Z^0$, полагая $v_0 d \equiv F_d$.

Следующая теорема даёт функциональное описание счётно-дедекиндова множества $D^0(C)$.

Теорема 2. *Отображение $v_0 \colon D^0(C) \twoheadrightarrow Z^0$ биективно.*

Доказательство. Установим сначала инъективность v_0. Пусть $d_1 \equiv (P'_1, Q'_1)$ и $d_2 \equiv (P'_2, Q'_2)$ — элементы из $D^0(C)$, для которых $v_0 d_1 = v_0 d_2$. Возьмём соответствующие функции $g'_1 \equiv \sup P'_1$ и $g'_2 \equiv \sup P'_2$ из $F_b(T)$. По определению отображения v имеем $vd_1 = \bar{g}'_1 \bmod \mathcal{R}$ и $vd_2 = \bar{g}'_2 \bmod \mathcal{R}$. Поскольку $v_0 d_1 = v_0 d_2$, существует такая функция f из этого множества, что $f \sim g'_1 \bmod \mathcal{R}^0$ и $f \sim g'_2 \bmod \mathcal{R}^0$. Следовательно, $g'_1 \sim g'_2 \bmod \mathcal{R}^0$. Из $\mathcal{R}^0 \subset \mathcal{R}$ вытекает, что $vd_1 = \bar{g}'_1 \bmod \mathcal{R}^0 = \bar{g}'_2 \bmod \mathcal{R}^0 = vd_2$. По теореме 1 отображение v инъективно. Поэтому $d_1 = d_2$.

Проверим теперь сюръективность v_0. Пусть $a \in Z^0$. Возьмём $f \in a$, т. е. $f \in U(T, \mathcal{SP}^0)$.

По предложению 5 из [14, 2.5.2] имеем $f \in QU_b(T, \mathcal{G}, \mathcal{R})$. По утверждению 5) предложения 1 из [14, 2.2.5] ансамбль $\mathcal{G}^0$ является отделимой совершенной σ-основой. Поэтому, согласно теореме 2 из [14, 2.5.2], для f существуют такие счётные коллекции $\pi \equiv (p_i \in C \mid i \in I)$ и $\varkappa \equiv (q_j \in C \mid j \in J)$, что $p_i \leqslant f \leqslant q_j$ и $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$, где $g \equiv \sup \pi$ и $h \equiv \inf \varkappa$. Рассмотрим множества $P \equiv \{p_i \mid i \in I\}$ и $Q \equiv \{q_j \mid j \in J\}$ в C. По лемме 3 сечение (P, Q) является тесным.

Рассмотрим множества $P'' \equiv \{u \in C \mid u \leqslant f\}$ и $Q'' \equiv \{v \in C \mid f \leqslant v\}$. Для них $P \subset P''$ и $Q \subset Q''$. Возьмём функции $g'' \equiv \sup P'' \in SC_b^l(T, \mathcal{G})$ и $h'' \equiv \inf Q'' \in SC_b^u(T, \mathcal{G})$. Тогда из $g \leqslant g'' \leqslant f \leqslant h'' \leqslant h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{R}$ вытекает $g'' \sim f \sim h'' \bmod \mathcal{R}$. Поскольку сечение (P'', Q'') не обязательно регулярно, рассмотрим пару (P', Q'), где $P' \equiv \{p' \in C \mid p' \leqslant h''\}$ и $Q' \equiv \{q' \in C \mid g'' \leqslant q'\}$. Так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, проверяется, что (P', Q') является регулярным сечением, $P'' \subset P'$ и $Q'' \subset Q'$.

Рассмотрим функции $g' \equiv \sup P'$ и $h' \equiv \inf Q'$ в $F_b(T)$. Для них $g'' \leqslant g'$ и $h' \leqslant h''$. Поэтому неравенство $g \leqslant g'' \leqslant g' \leqslant h' \leqslant h'' \leqslant h$ и эквивалентность $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$ означают, что все эти функции эквивалентны. Кроме того, $P \subset P'' \subset P'$ и $Q \subset Q'' \subset Q$. Следовательно, (P, Q) является счётным подсечением регулярного сечения (P', Q').

Поскольку $g \sim h'$ и $g' \sim h$, по лемме 2 сечения (P, Q') и (P', Q) являются тесными. Поэтому $d \equiv (P', Q') \in D^0(C)$.

По построению $g \in SC_b^l(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$, $h \in SC_b^u(T, \mathcal{G}^0) \cap U(T, \mathcal{SP}^0)$ и $g \leqslant f \leqslant h$. Поскольку $g \sim h \bmod \mathcal{R}^0$, имеем $f \sim g \bmod \mathcal{R}^0$. Поэтому $f \in F_d$. В итоге $v_0 d \equiv F_d = \bar{f} \bmod \mathcal{R}^0 = a$. $\square$

Для латлинеала $|A, \mathbb{1}|$ можно построить его *канторово секвенциальное пополнение* $C_s(A)$ точно так же, как это делается для $\mathbb{Q}$ (см. [13, 1.4.3]). Из теоремы 2 и статьи [16] следует, что счётно-дедекиндово расширение $C \rightarrowtail D^0(C)$ совпадает с его канторовым секвенциальным пополнением $C \rightarrowtail C_s(C)$.

Кроме того, для кольца $|C, \mathbf{1}|$ можно взять его *классическое кольцо частных* $Q^{cl}(C)$ (см. [16]) и в нём взять его *ограниченную часть* $Q_b^{cl}(C)$. Поскольку латалгебра $Q_b^{cl}(C)$ не замкнута относительно $\bar{\mathbf{1}}$-равномерной сходимости последовательностей, можно взять её $\bar{\mathbf{1}}$-равномерное пополнение $\overline{Q}_b^{cl}(C)$. В указанной работе было дано его функциональное описание в виде изоморфизма $\overline{Q}_b^{cl}(C) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Z^0$.

Более того, для кольца $|C, \mathbf{1}|$ можно взять его *рационально-полное кольцо частных* $Q(C)$ (см. [5] и [7]) и в нём взять его ограниченную часть $Q_b(C)$. Поскольку латалгебра $Q_b(C)$ не замкнута относительно $\bar{\mathbf{1}}$-равномерной сходимости последовательностей, можно взять её $\bar{\mathbf{1}}$-равномерное пополнение $\overline{Q}_b(C)$. В работе [5] было дано его функциональное описание в виде $\overline{Q}_b(C) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Z$.

3. Характеризация дедекиндова и счётно-дедекиндова расширений c-латлинеала непрерывных ограниченных функций

В разделе 2 были даны функциональные описания множеств $D(C)$ и $D^0(C)$ в виде функционально-факторных семейств Z и Z^0. На этих семействах можно рассматривать естественные структуры $\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{1}}, +, \cdot, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge$. Эти структуры разделяются на две принципиально разные части. Кольцевые структуры $+$ и $\cdot$ связаны дистрибутивным равенством $a(b+c) = ab+ac$. В то же время латлинеальные структуры $+$ и $\wedge$ связаны лишь дистрибутивным неравенством $a\wedge(b+c) \leq a\wedge b+a\wedge c$. По этой причине работа с последними структурами является концептуально более сложной, чем с первыми. Поэтому нахождение латлинеальных аналогов важных кольцевых свойств и работа с ними занимают гораздо больше времени.

В частности, ещё в 1956 году Ю. Утуми [17] расширил понятие классической делимости в кольцах и определил понятие *делимости относительно плотного идеала* D кольца A. Это позволило в статье [7] дать кольцевые характеризации расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$.

Латлинеальный аналог “горизонтального” свойства плотности идеала D в кольце A в виде “вертикального” свойства плотности сечения (P, Q) в c-латлинеале $|A, \mathbb{1}|$ был найден в статье [3] и в виде более общего “вертикального” свойства плотности сечения (P, Q) в произвольном латлинеале $|A, \mathbb{1}|$ был найден в статье [11].

3.1. Привлечение локальных свойств

Далее будем рассматривать только *c-расширения* $u\colon |C, \mathbf{1}| \rightarrowtail |A, \mathbb{1}|$, т. е. инъективные отображения $u\colon C \rightarrowtail A$, сохраняющие все c-латлинеальные структуры c-латлинеалов $|C, \mathbf{1}|$ и $|A, \mathbb{1}|$.

Ещё в статьях [7, 6, 3] было показано, что для характеризации расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$ общих латлинеальных свойств недостаточно и нужно привлекать “локальные” свойства, определяемые через структуру *измельчения*.

Идеал B латлинеала $|A, \mathbb{1}|$ называется *замкнутым*, если для любого элемента $a \in A$ и для любой последовательной $(b_n \in B \mid n \in \mathbb{N})$ из условия $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ (p \geq n \Rightarrow |a - b_p| < 1/k)$ вытекает принадлежность $a \in B$. Ансамбль всех замкнутых идеалов в A обозначим через $\mathcal{C}(A)$.

Далее Λ_b будет обозначать некоторую выделенную открытую π-базу в пространстве $(T, \mathcal{G})$, т. е. подансамбль ансамбля $\mathcal{G}$ такой, что $\forall\ G \in \mathcal{G}\ \exists E \in \Lambda_b\ (E \subset G)$. Наделим его порядком по вложению. Элемент $E \in \Lambda_b$ называется *вершиной коллекции* $(E_\xi \in \Lambda_b \mid \xi \in \Xi)$, если $E_\xi \subset E$ для любого ξ и для любого $L \in \Lambda_b$, такого, что $\varnothing \neq L \subset E$, существуют ξ_0 и $M \subset \Lambda_b$, такие, что $\varnothing \neq M \subset L$ и $M \subset E_{\xi_0}$ (см. [7]). Обозначим это свойство через $E = \operatorname{top}(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$.

Коллекция $\mathfrak{A} \equiv (A_E \in \mathcal{C}(A) \mid E \in \Lambda_b)$ называется *базисным измельчением c-латлинеала* A, если:

а) $A_E = A$, если и только если $E = \varnothing$;

б) $\bigcap(A_E \mid E \in \Sigma_b) = \{0\}$;

в) $E_1 \subset E_2$ влечёт $A_{E_1} \subset A_{E_2}$;

г) $E = \operatorname{top}(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_E = \bigcap(A_{E_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

c-Латлинеал A с базисным измельчением $\mathfrak{A}$ назовём *cr_b-латлинеалом* (буква “r” от слова “refinement”) и обозначим через $|A, \mathfrak{A}|$.

На исходном c-латлинеале C рассмотрим исходное выделенное базисное измельчение $\mathfrak{C}_b \equiv (C_E \in \mathcal{C}(C) \mid E \in \Lambda_b)$, в котором $C_E \equiv \{c \in C \mid \operatorname{cl} E \cap \operatorname{coz} c = \varnothing\}$.

c-Расширение $u\colon C \rightarrowtail A$, в котором $|A, \mathfrak{A}|$ является cr_b-латлинеалом, называется *cr_b-расширением cr_b-латлинеала* $|C, \mathfrak{L}_b|$, если: а) $u[C_E] \subset A_E$ для любого $E \in \Lambda_b$ и б) $uc \in A_E$ влечёт $c \in C_E$. Такое расширение обозначим через $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$.

Пусть $B \subset A$. Рассмотрим множество $B^\perp \equiv \{a \in A \mid \forall b \in B\ (|a| \wedge |b| = 0)\}$. Коллекция $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной*, если для любого непустого множества $E \in \Lambda_b$ и для любого дизъюнктно замкнутого множества $B = B^{\perp\perp}$, такого что $B^\perp \not\subset A_E$, существует такое множество $F \in \Lambda_b$, что $\varnothing \neq F \subset E$ и $B \subset A_F$. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ называется *насыщенным*, если измельчение $\mathfrak{A}$ является насыщенным.

Далее, для того, чтобы дать параллельные определения и для Z, и для Z^0, будем использовать значок $\theta \in \{\varnothing, 0\}$. Если $\theta = \varnothing$, то $Z^\theta \equiv Z$, если $\theta = 0$, то $Z^\theta \equiv Z^0$. Этот значок в том же смысле будем использовать и в других местах.

На c-латлинеале Z^θ рассмотрим базисное измельчение $\mathfrak{A}_b^\theta \equiv (Z_E^\theta \in \mathcal{C}(Z^\theta) \mid E \in \Lambda_b)$, такое что $Z_E^\theta \equiv \{\bar{f} \in Z^\theta \mid \forall n \in \mathbb{N}\ (\operatorname{cl} E \cap \operatorname{coz}_n f \in \mathcal{R}^\theta)\}$, где $\operatorname{coz}_n f \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\}$ (см. [14, 2.2.5]). Тогда исходное дедекиндово расширение $u\colon C \rightarrowtail Z^\theta$ превращается в *cr_b-расширение* $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |Z^\theta, \mathfrak{A}_b^\theta|$.

Пусть $u\colon C \rightarrowtail A$ и $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$ являются c-расширениями c-латлинеала C. *Морфизмом из c-расширения $u\colon C \rightarrowtail A$ в c-расширение $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$* называется гомоморфизм $v\colon |A, \mathbb{1}| \mapsto |\widetilde{A}, \widetilde{\mathbb{1}}|$ латлинеалов с единицами, такой, что $v \circ u = \widetilde{u}$. *Морфизмом из cr_b-расширения $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ в cr_b-расширение $\widetilde{u}\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |\widetilde{A}, \widetilde{\mathfrak{A}}|$* назовём такой морфизм v из $u\colon C \rightarrowtail A$ в $\widetilde{u}\colon C \rightarrowtail \widetilde{A}$, что $v[A_E] \subset \widetilde{A}_E$ для любого $E \in \Lambda_b$. Морфизм v из u в $\tilde{u}$ назовём *биморфизмом*, если отображение множеств $v\colon A \twoheadrightarrow \widetilde{A}$ является биективным и системное отображение $v^{-1}\colon |\widetilde{A}, \widetilde{\mathfrak{A}}| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ является морфизмом из $\tilde{u}$ в u.

Если вдобавок отображение v инъективно и $va \in \widetilde{A}_E$ влечёт $a \in A_E$, то скажем, что второе cr_b-расширение *больше* первого или первое cr_b-расширение *вкладывается* во второе.

3.2. Свойства полноты и граничности типа $Z^{\theta c}$

Пусть сначала $|A, \mathbb{1}|$ — латлинеал с единицей.

Элемент $a \in A$ назовём *t-мажорантой множества* P, если пара $(P, \{a\})$ является t-сечением. Обозначим это свойство через $a = \operatorname{t-maj} P$. Элемент $a \in A$ назовём *t-минорантой множества* Q, если пара $(\{a\}, Q)$ является t-сечением. Обозначим это свойство через $a = \operatorname{t-min} Q$.

Лемма 5. *Пусть (P, Q) — t-сечение в A, $a \in A$ и $p \le a \le q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$. Тогда $a = \operatorname{t-maj} P$ и $a = \operatorname{t-min} Q$.*

Доказательство. Пусть $\forall p \in P\ ((1/n + p - a)_+ \wedge x = 0)$ для некоторого $x \in A_+$. Так как $a \le q$, то $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x = 0)$. Значит, $a = \operatorname{t-maj} P$. Второе равенство выводится таким же образом. □

Пусть теперь $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал. Сечение (P, Q) назовём *r-тесным*, если для любого $E \in \Lambda_b$, любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x \in A_E)$ следует $x \in A_E$. Из второго свойства измельчения следует, что r-тесное сечение является тесным. r-Тесное сечение назовём также *rt-сечением*.

Элемент $a \in A$ назовём *r-тесной мажорантой* или *rt-мажорантой множества* $P \subset A$, если пара $(P, \{a\})$ является rt-сечением. Обозначим это свойство через $a = \operatorname{rt-maj} P$. Элемент $a \in A$ назовём *r-тесной минорантой* или *rt-минорантой множества* Q, если пара $(\{a\}, Q)$ является rt-сечением. Обозначим это свойство через $a = \operatorname{rt-min} Q$.

Лемма 6. *Пусть $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал, (P, Q) — rt-сечение в A, $a \in A$ и $p \le a \le q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$. Тогда $a = \operatorname{rt-maj} P$ и $a = \operatorname{rt-min} Q$.*

Доказательство. Пусть $\forall p \in P\ ((1/n + p - a)_+ \wedge x \in A_E)$ для некоторого $x \in A_+$. Так как $a \leq q$, то $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((1/n + p - q)_+ \wedge x \in A_E)$. Значит, $a = \text{rt-maj}\, P$. Второе равенство выводится таким же образом. $\square$

Далее будем использовать введённый ранее значок $\theta \in \{\varnothing, 0\}$. Скажем, что сечение (P, Q) в A является *сечением типа* θ, если при $\theta = \varnothing$ множества P и Q имеют произвольные мощности, а при $\theta = 0$ сечение (P, Q) является счётным.

Пусть в cr_b-латлинеале $|A, \mathfrak{A}|$ выделено подмножество B. Множество всех rt-сечений (P, Q) типа θ в A, таких, что $P \subset B$ и $Q \subset B$, обозначим через $\mathcal{C}ut^\theta(B, A)$.

cr_b-Латлинеал $|A, \mathfrak{A}|$ назовём *полным типа* $Z^{\theta c}$ *относительно* B, если для любого rt-сечения $(P, Q) \in \mathcal{C}ut^\theta(B, A)$ существует элемент $a \in A$, такой, что $a = \text{rt-maj}\, P = \text{rt-min}\, Q$. При $B = A$ получим определение (*абсолютно*) *полного типа* ${}^aZ^{\theta c}$ *cr_b-латлинеала* $|A, \mathfrak{A}|$. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ назовём *полным типа* $Z^{\theta c}$, если cr_b-латлинеал $|A, \mathfrak{A}|$ является полным типа $Z^{\theta c}$ относительно подмножества $u[C]$. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ назовём (*абсолютно*) *полным типа* ${}^aZ^{\theta c}$, если *cr_b-латлинеал* $|A, \mathfrak{A}|$ является полным типа ${}^aZ^{\theta c}$.

Элемент $a \in A$ назовём *граничным типа* $Z^{\theta c}$ *относительно* B, если существует rt-сечение $(P, Q) \in \mathcal{C}ut^\theta(B, A)$, такое, что $a = \text{rt-maj}\, P = \text{rt-min}\, Q$. Рассмотрим в A его c-подлатлинеал $Z^{\theta c}(B, A)$, порождённый множеством всех граничных элементов типа $Z^{\theta c}$ относительно B. cr_b-Расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$ назовём *граничным cr_b-расширением типа* $Z^{\theta c}$ *cr_b-латлинеала* $|C, \mathfrak{L}_b|$, если $A = Z^{\theta c}(u[C], A)$.

cr_b-Пополнением типа $Z^{\theta c}|{}^aZ^{\theta c}$ *cr_b-латлинеала* $|C, \mathfrak{L}_b|$ назовём насыщенное cr_b-расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |A, \mathfrak{A}|$, которое является:

а) наибольшим из всех граничных cr_b-расширений типа $Z^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathfrak{L}_b|$;

б) наименьшим из всех полных cr_b-расширений типа $Z^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathfrak{L}_b|$;

в) полным типа ${}^aZ^{\theta c}$.

Теорема 3. *θ-Дедекиндово cr_b-расширение $u\colon |C, \mathfrak{L}_b| \rightarrowtail |Z^\theta, \mathfrak{A}_b^\theta|$ является единственным (с точностью до биморфизма cr_b-расширений cr_b-латлинеала $|C, \mathfrak{L}_b|$) cr_b-пополнением типа $Z^{\theta c}|{}^aZ^{\theta c}$ cr_b-латлинеала $|C, \mathfrak{L}_b|$.*

Доказательство этой теоремы проводится практически так же, как доказательство теоремы характеризации *риманова cr_μ-расширения* $|C, \mathfrak{L}_\mu| \rightarrowtail |R_\mu, \mathfrak{A}_\mu|$, изложенное в [10].

3.3. Равносильность свойств тесноты и плотности сечений в c-латлинеалах

В работах [3] и [4] характеризация θ-дедекиндовых расширений $u\colon C \rightarrowtail Z$ и $u_0\colon C \rightarrowtail Z^0$ была дана не через свойство тесноты сечений, а через свойство их плотности.

Покажем, что для c-латлинеалов эти свойства равносильны.

Пусть A — латлинеал. Сечение (P, Q) в A будем называть *плотным*, если $\inf\{q - p \mid p \in P \wedge \wedge\, q \in Q\} = 0$.

Предложение 1. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и (P, Q) — сечение в A. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P, Q) является тесным*;

2) *сечение (P, Q) является плотным.*

Доказательство. По упомянутой в доказательстве леммы 1 теореме Крейнов – Какутани c-латлинеал A изоморфен c-латлинеалу $C \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ для некоторого тихоновского пространства $(T, \mathcal{G})$. Поэтому будем считать, что $A = C$.

1) $\vdash$ 2). Рассмотрим открытые множества $U_n \equiv \{t \in T \mid \exists p \in P\ \exists q \in Q\ (q(t) - p(t) < 1/n)\}$. Так же как в доказательстве леммы 2 проверяется, что множества U_n являются плотными.

Пусть $a \in C$ и $a \leqslant q - p$ для любых p и q. Тогда $a(t) \leqslant q(t) - p(t) < 1/n$ для некоторых p и q и всех $t \in U_n$. Из плотности U_n и непрерывности a следует неравенство $a(t) \leqslant 1/n$ для любого $t \in T$. Из архимедовости $\mathbb{R}$ следует, что $a(t) \leqslant 0$ для любого $t \in T$, т. е. $a \leqslant 0$. Таким образом, имеет место 2).

2) $\vdash$ 1). Пусть $x \in C_+$ и $(\mathbf{1}/n + p - q)_+ \wedge x = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и любых p и q. Предположим, что $x > 0$, т. е. $\varnothing \neq G \equiv \operatorname{coz} x \in \mathcal{G}^0$. Если $t \in G$, то $(1/n + p(t) - q(t))_+ = 0$ влечёт $1/n + p(t) - q(t) \leqslant 0$, т. е. $q(t) - p(t) \geqslant 1/n$. Возьмём $0 < y \equiv x \wedge (\mathbf{1}/n) \in C_+$. Тогда $q(t) - p(t) \geqslant y(t)$ для любого $t \in G$ и $q(t) - p(t) \geqslant 0 = y(t)$ для любого $t \in T \setminus G$. Значит, $q - p \geqslant y$ для любых p и q. Поскольку сечение (P, Q) является плотным, $y \leqslant 0$. Из полученного противоречия следует, что $x = 0$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и $P, Q \subset A$, $a \in A$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) $a = \text{t-maj}\, P$ $[a = \text{t-min}\, Q]$;

2) $a = \sup P$ $[a = \inf Q]$.

Доказательство. 1) $\vdash$ 2). Пусть $a = \text{t-maj}\, P$, т. е. пара $(P, \{a\})$ является тесным сечением. По предложению 1 сечение $(P, \{a\})$ плотно, т. е. $\inf\{a - p \mid p \in P\} = 0$. Отсюда $0 = a + \inf\{-p \mid p \in P\} = a - \sup\{p \mid p \in P\} = a - \sup P$, т. е. $a = \sup P$.

2) $\vdash$ 1). Пусть $a = \sup P$. Тогда как и выше $\inf\{a - p \mid p \in P\} = 0$. Отсюда по предложению 1 вытекает, что сечение $(P, \{a\})$ является тесным, т. е. $a = \text{t-maj}\, P$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал и I — замкнутый идеал в A. Тогда $\overline{A} \equiv A/I$ является c-латлинеалом.*

Доказательство. Рассмотрим норму $\|a\|_{\mathbb{1}} \equiv \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |a| \leqslant x\mathbb{1}\}$. Далее мы будем опираться на сведения из пункта 2.2.7 книги [14]. Система $|\overline{A}, \|\cdot\|_{\mathbb{1},\overline{A}}|$ является банаховым пространством. Латлинеал $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является архимедовым, где $\bar{\mathbb{1}} \equiv \bar{1} \bmod I$. Легко проверяется, что он является ограниченным.

Имеем $\|\cdot\|_{\mathbb{1},\overline{A}} = \|\cdot\|_{\bar{\mathbb{1}}}$. Поэтому система $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является банаховым пространством. Поскольку $\bar{\mathbb{1}}$ является единицей, латлинеал $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является равномерно полным относительно равномерной сходимости последовательностей. Следовательно, $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ является c-латлинеалом. $\square$

Далее для $B \subset A$ и $a \in A$ образы $\pi[B]$ и $\pi(a)$ в $\overline{A}$ при фактор-отображении $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/I$ обозначаются кратко через $\overline{B}$ и $\bar{a}$ без указания I и π.

Следствие 2. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал, I — замкнутый идеал в A, $\overline{A} \equiv A/I$ и (P, Q) — сечение в A. Тогда для c-латлинеала $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ следующие заключения равносильны*:

1) *сечение $(\overline{P}, \overline{Q})$ в $\overline{A}$ является тесным*;

2) *сечение $(\overline{P}, \overline{Q})$ в $\overline{A}$ является плотным.*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 2 и 1. $\square$

Следствие 3. *Пусть $|A, \mathbb{1}|$ — c-латлинеал, I — замкнутый идеал в A, $\overline{A} \equiv A/I$, $P, Q \subset A$ и $a \in A$. Тогда для c-латлинеала $|\overline{A}, \bar{\mathbb{1}}|$ следующие заключения равносильны*:

1) $\bar{a} = \text{t-maj}\, \overline{P}$ $[\bar{a} = \text{t-min}\, \overline{Q}]$;

2) $\bar{a} = \sup \overline{P}$ $[\bar{a} = \inf \overline{Q}]$.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 2 и следствия 1 предложения 1. □

Пусть теперь $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал. Для $E \in \Lambda_b$ будем рассматривать фактор-c-линеал A/A_E по замкнутому идеалу A_E и фактор-отображение $\pi_E \colon A \twoheadrightarrow A/A_E$.

Сечение (P,Q) в A назовём r-плотным, если $\inf\{\pi_E(Q) - \pi_E(P) \mid p \in P \wedge q \in Q\} = 0$ в A/A_E для любого $E \in \Lambda_b$.

Предложение 3. *Пусть $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал и (P,Q) — сечение в A. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *сечение (P,Q) является r-тесным*;

2) *сечение (P,Q) является r-плотным.*

Доказательство. Утверждение следует из предложений 2 и 1. □

Пусть $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал. Элемент $a \in A$ назовём *r-супремумом множества $P \subset A$* [*r-инфимумом множества $Q \subset A$*], если $\pi_E(a) = \sup \pi_E[P]$ [$\pi_E(a) = \inf \pi_E[Q]$] в c-латлинеале A/A_E для любого $E \in \Lambda_b$. Обозначим это свойство через $a = \text{r-sup}\, P$ [$a = \text{r-inf}\, Q$].

Предложение 4. *Пусть $|A, \mathfrak{A}|$ — cr_b-латлинеал, $P, Q \subset A$ и $a \in A$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) $a = \text{rt-maj}\, P$ [$a = \text{rt-min}\, Q$];

2) $a = \text{r-sup}\, P$ [$a = \text{r-inf}\, Q$].

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 1 предложения 1 и следствия 3 предложения 2. □

Из предложений 3 и 4 следует, что введённые выше понятия полноты и граничности можно равносильно переопределить не через свойство r-тесноты сечений, а через свойство их r-плотности. Тогда теорема 3 приобретёт вид, приведённый в статье [3].

4. Заключение

Теорема 3 и теорема характеризации, упомянутого в разделе 3.2 риманова cr_μ-расширения $|C, \mathfrak{L}_\mu| \rightarrowtail |R_\mu, \mathfrak{A}_\mu|$, изложенная в статье [10], показывают удивительное сходство между возникшими в разных областях математики и в разное время θ-дедекиндовым расширением $C \rightarrowtail Z^\theta$ и римановым расширением $C \rightarrowtail R_\mu$ c-латлинеала C. А именно, счётно-дедекиндово расширение $C \rightarrowtail Z^0$ и риманово расширение $C \rightarrowtail R_\mu$ обладают одинаковыми общими латлинеальными свойствами. Они отличаются только локальными свойствами, выражаемыми через отличные друг от друга cr_b-измельчения и cr_μ-измельчения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. M. MacNeille, Partially ordered sets // Trans. AMS, 42:4 (1937), 416–460.

2. V. K. Zakharov, Functional characterization of absolute and Dedekind completion // Bull. de l'Academia Polonais des Sci. Ser. math., 39:5-6 (1981), 293–297.

3. В. К. Захаров, Описание некоторых расширений семейства непрерывных функций посредством порядковых границ // Доклады РАН, 400:4 (2005), 444–448. EDN: OONKMB.

4. В. К. Захаров, Характеризация классических расширений семейства непрерывных функций как некоторых дедекиндовых оболочек // Доклады РАН, 411:4 (2006), 444–448. EDN: HZIUEP.

5. V. K. Zakharov, On functions connected with absolute, Dedekind completion, and divisible envelope // Periodica Math. Hungar, 18:1 (1987), 17–26.

6. В. К. Захаров, Связь между классическим кольцом частных кольца непрерывных функций и функциями, интегрируемыми по Риману // Фундам. и прикл. матем., 1:1 (1995), 161–176.

7. В. К. Захаров, Расширения кольца непрерывных функций, порождённые классическим, рациональным и регулярным кольцами частных как делимые оболочки // Матем. сб., 186:12 (1995), 81–118.

8. V. K. Zakharov, Classical extensions of the ring of continuous functions and the corresponding preimages of a completely regular space // J. of Math. Sciences, 73:1 (1995), 114–139.

9. В. К. Захаров, Связи между расширением Римана и классическим кольцом частных и между прообразом Семадени и секвенциальным абсолютом // Труды Моск. матем. об-ва, 57 (1996), 254–279.

10. В. К. Захаров, Характеризация расширения решеточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций, порождённого функциями, μ-интегрируемыми по Риману, посредством порядковых границ // Алгебра и анализ, 35:4 (2023), 135–166. EDN: OSCXNS.

11. V. K. Zakharov, Characterization of the extension of lattice linear space of continuous bounded functions generated by μ-Riemann-integrable functions by means of order boundaries // Lobachevskii Journal of Math., 43:11 (2022), 3315–3334. DOI: 10.1134/S1995080222140384.

12. В. К. Захаров, Т. В. Родионов, Характеризация счетно-дедекиндова расширения решеточного линейного пространства непрерывных ограниченных функций посредством порядковых границ // Межд. конфер. “Математика в созвездии наук”. К юбилею ректора МГУ, акад. В. А. Садовничего. Тезисы докладов, М.: Издательский дом МГУ, 2024, 51–52.

13. V. K. Zakharov, T. V. Rodionov, Sets, Functions, Measures. Vol. I: Fundamentals of Set and Number Theory, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/1, Berlin: de Gruyter, 2018. DOI: 10.1515/9783110550948.

14. V. K. Zakharov, T. V. Rodionov, A. V. Mikhalev, Sets, Functions, Measures. Vol. II: Fundamentals of Function and Measure Theory, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/2, Berlin: de Gruyter, 2018. DOI: 10.1515/9783110550962.

15. К. Иосида, Функциональный анализ, Москва: Мир, 1967.

16. V. K. Zakharov, On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients // Periodica Math. Hungar, 19:2 (1987), 113–133.

17. Yu. Utumi, On quotient rings // Osaka Math. J., 8:1 (1956), 1–18.

REFERENCES

1. MacNeille, H. M., 1937. “Partially ordered sets”, *Trans. AMS*, vol. 42, no. 4, pp. 416–460. DOI: 10.2307/1989739.

2. Zakharov, V. K., 1981. “Functional characterization of absolute and Dedekind completion”, *Bull. de l’Academia Polonais des Sci. Ser. math.*, vol. 39, no. 5-6, pp. 293–297.

3. Zakharov, V. K., 2005. “Description of extensions of families of continuous functions by means of order boundaries”, *Doklady Math.*, vol. 71, no. 1, pp.80–83.

4. Zakharov, V. K., 2006. “Characterization of the classical extensions of the family of continuous functions as Dedekind hulls”, *Doklady Math.*, vol. 74, no. 3, pp.849–853. DOI: 10.1134/S1064562406060160.

5. Zakharov, V. K., 1987. “On functions connected with absolute, Dedekind completion, and divisible envelope” *Periodica Math. Hungar.*, vol. 18, no. 1, pp. 17–26.

6. Zakharov, V. K., 1995. “Connection between the classical ring of quotients of the ring of continuous functions and Riemann integrable functions”, *Fundam. Prikl. Mat.*, vol. 1, no. 1, pp. 161–176 (in Russian).

7. Zakharov, V. K., 1995. “Extensions of the ring of continuous functions generated by the classical, rational, and regular rings of fractions as divisible hulls” *Sb. Math.*, vol. 186, no. 12, pp. 1773–1809.

8. Zakharov, V. K., 1995. “Classical extensions of the ring of continuous functions and the corresponding preimages of a completely regular space”, *J. of Math. Sciences*, vol. 73, no. 1, pp. 114–139.

9. Zakharov, V. K., 1996. “Relationships between the Riemann extension and the classical ring of quotients and between the Semadeni preimage and the sequential absolute”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 57, pp. 223–243.

10. Zakharov, V. K., 2023. “Characterization of the extension of the lattice linear space of continuous bounded functions, generated by Riemann μ-integrable functions, by means of order boundaries” // *St. Petersburg Math. Journal*, vol. 35, no. 4.

11. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., 2024. “Characterization of the countably Dedekind extension of the lattice linear space of continuous bounded functions by means of order boundaries”, *Int. confer. «Mathematics in the Constellation of Sciences», dedicated to the 85th anniversary of V. A. Sadovnichii. Abstracts*, MSU, Moscow, pp. 51–52 (in Russian).

12. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., 2018. “Sets, Functions, Measures. Vol. I: Fundamentals of Set and Number Theory”, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/1, *de Gruyter, Berlin.* DOI: 10.1515/9783110550948.

13. Zakharov, V. K., Rodionov, T. V., Mikhalev, A. V., 2018. “Sets, Functions, Measures. Vol. II: Fundamentals of Function and Measure Theory”, *De Gruyter Studies in Mathematics*, vol. 68/2, *de Gruyter, Berlin.* DOI: 10.1515/9783110550962.

14. Zakharov, V. K., 2022. “Characterization of the extension of lattice linear space of continuous bounded functions generated by μ-Riemann-integrable functions by means of order boundaries”, *Lobachevskii Journal of Math.*, vol. 43, no. 11, pp. 3315–3334. DOI: 10.1134/S1995080222140384.

15. Yosida, K., 1965. “Functional Analysis”, *Springer Verlag, Berlin.*

16. Zakharov, V. K., 1987. “On functions connected with sequential absolute, Cantor completion, and classical ring of quotients”, *Periodica Math. Hungar.*, vol. 19, no. 2, pp. 113–133.

17. Utumi, Yu., 1956. “On quotient rings”, *Osaka Math. J.*, vol. 8, no. 1, pp. 1–18.

Получено: 01.04.2024
Принято в печать: 04.09.2024