ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-70-85

Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В рамках нелинейного метода угловых пограничных функций существование решений нелинейных краевых задач доказывается через построение барьерных функций. Барьерные функции конструируются через выделенные специальным образом опорные барьеры. Сами опорные барьеры также могут выступать в роли барьерных функций. При этом приходится доказывать выполнение определенных неравенств, которые представляют самостоятельный функциональный интерес. Исследование этих неравенств приводит к громоздким выкладкам. В настоящей работе предлагается способ, существенно упрощающий получение результатов. Возможные решения неравенств строятся в виде многочленов. Начальный этап предполагает выделение многочлена наивысшей интересующей степени. Такой многочлен называется коренным. Далее к коренному многочлену последовательно добавляются многочлены низших степеней, называемые примыкающими многочленами.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, барьерные функции, функциональные неравенства.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Денисов, А. И., Денисов, И. В. Решение неравенств с помощью коренных и примыкающих функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 70–85.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-70-85

Solving inequalities using radical and adjacent functions

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

Within the framework of the nonlinear method of angular boundary functions, the existence of solutions to nonlinear boundary value problems is proven through the construction of barrier functions. Barrier functions are constructed through specially designated support barriers. The support barriers themselves can also act as barrier functions. In this case, it is necessary to prove the fulfillment of certain inequalities that are of independent functional interest. The study of these inequalities leads to cumbersome calculations. This paper proposes a method that significantly simplifies obtaining results. Possible solutions to inequalities are constructed in the form of polynomials. The initial stage involves identifying the polynomial of the highest degree of interest. Such a polynomial is called radical. Next, polynomials of lower degrees, called adjacent polynomials, are successively added to the radical polynomial.

Keywords: nonlinear boundary value problems, barrier functions, functional inequalities.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Denisov, A. I., Denisov, I. V. 2024, “Solving inequalities using radical and adjacent functions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 70–85.

1. Введение

Развитие нелинейного метода угловых пограничных функций привело к необходимости исследовать задачи с нелинейностями различного вида. Такие исследования проводились с двух противоположных направлений. С одной стороны, были рассмотрены квадратичные нелинейности, а затем и кубические (см. [1]–[5]). Для доказательства разрешимости соответствующих нелинейных задач строились верхние и нижние барьеры, что предполагало исследование различных неравенств. С другой стороны, предметом исследований становились сами неравенства и изучались классы функций, удовлетворяющих таким неравенствам (см. [6], [7]).

Первое направление привело к рассмотрению многочленов $F(u)$, обладающих двумя свойствами:

1) $F(\bar{u}_0) = 0$;

2) $F'(u) > 0$ для $u \in [\bar{u}_0, \varphi]$;

(применяемые обозначения используются в других работах, поэтому принимаются и в настоящей). Кроме этого, были выделены три опорные барьерные функции (см. [8]), которые привели к неравенствам вида

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) \geq 0, \tag{1}$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) \geq 0 \tag{2}$$

и

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}} \int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F\left(\bar{u}_0 + s\right) \leq 0, \tag{3}$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$. Исследование этих неравенств приводит к громоздким выкладкам.

Второе направление, с одной стороны, вывело исследования на произвольные функции, а с другой стороны, возвращение к многочленам привело к иному взгляду на рассматриваемые неравенства. Первое, на что было обращено внимание, это линейность всех трех неравенств относительно искомых функций. Применительно к многочленам был сделан вывод о том, что при описании класса многочленов n-й степени, удовлетворяющих такому неравенству, можно, опираясь на конкретный многочлен n-й степени, все возможное разнообразие свести к многочленам $(n-1)$-й степени. Так появились коренные и примыкающие многочлены.

В настоящей работе предлагается способ исследования неравенств (1)–(3), использующий коренные и примыкающие многочлены.

2. О функциях, удовлетворяющих неравенству (1)

Введем следующие понятия.

Определение $\{F\}$. *Функция F принадлежит классу $\{F\} = \{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если*

1) $F(\bar{u}_0) = 0$;

2) $\bar{u}_0 < \varphi$;

3) *функция $F(u)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее первая производная $F'(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$.*

В классе $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ определим подкласс $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Определение $\{F_1\}$. *Функция F из класса $\{F,[\bar{u}_0, \varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_1,[\bar{u}_0, \varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (1):*

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) \geq 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Подкласс $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0), \quad A > 0,$$

для которых выполнение неравенства (1) очевидно:

$$F(\bar{u}_0 + s + t) - F(\bar{u}_0 + s) - F(\bar{u}_0 + t) = A(s + t) - As - At = 0.$$

При проверке неравенства (1) для нелинейных функций удобно пользоваться свойствами функций, принадлежащих подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Приведем эти свойства.

Свойство $\{F_1\}_{-}1$. *Подкласс $\{F_1\}$ является собственным подмножеством класса $\{F\}$.*

Пример $\{F_1\}_{-}1$. Функция

$$F(u) = \begin{cases} 2 + 3u + u^2, & \text{если} \quad u \leq 0 \\ 2 + 3u + u^2 - 3u^3, & \text{если} \quad u \geq 0 \end{cases}$$

принадлежит классу $\{F, [-1; 0,5]\}$, но не принадлежит подклассу $\{F_1, [-1; 0,5]\}$.

Свойство $\{F_1\}_{-}2$. *Если функция F принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, то для любого $u \in (\bar{u}_0, \varphi]$ производная $F'(u) > F'(\bar{u}_0)$.*

В частности, из свойства $\{F_1\}_{-}2$ следует, что график функции $F(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$ располагается выше касательной, проведенной в точке с абсциссой $u = \bar{u}_0$.

Пример $\{F_1\}_{-}2$. Выполнение неравенства $F'(u) \geq F'(\bar{u}_0)$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$ не является достаточным условием принадлежности функции класса $\{F\}$ подклассу $\{F_1\}$. Примером является функция из примера $\{F_1\}_{-}1$.

Свойство $\{F_1\}_{-}3$. *Если функция F принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, то существует число u_1 такое, что на промежутке $u \in [\bar{u}_0, u_1]$ вторая производная $F''(u) \geq 0$.*

Пример $\{F_1\}_{-}3$. Положительность второй производной на промежутке $[\bar{u}_0, u_1]$, где $u_1 < \varphi$, не является достаточным условием принадлежности функции F подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Так функция из примера $\{F_1\}_{-}1$ принадлежит классу $\{F, [-1; 0.5]\}$, имеет положительную вторую производную на промежутке $[-1, 0]$, но не принадлежит подклассу $\{F_1, [-1; 0.5]\}$.

Свойство $\{F_1\}_{-}4$. *Если функция F принадлежит классу $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ и $F''(u) \geq 0$ на промежутке $u \in [\bar{u}_0, u_1]$, где u_1 – некоторое число, большее, чем $\bar{u}_0$, то функция F принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \frac{\bar{u}_0+u_1}{2}]\}$.*

В частности, если функция F принадлежит классу $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ и $F''(u) \geq 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$, то эта функция принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Пример $\{F_1\}_{-}4$. Принадлежность функции F подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не является достаточным условием положительности второй производной $F''(u)$ на всем промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$. Так функция

$$F(u) = \begin{cases} -u^3 + 3u^2 + u, & \text{если} \quad u \in [0; 1] \\ \frac{1}{6}u^4 - \frac{4}{3}u^3 + 3u^2 + \frac{4}{3}u - \frac{1}{6}, & \text{если} \quad u \in [1; 9/4] \end{cases}$$

принадлежит подклассу $\{F_1, [0; 9/4]\}$, дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $[0; 9/4]$, а ее вторая производная

$$F''(u) : \begin{cases} > 0, & \text{если} \quad u \in [0; 1) \\ = 0, & \text{если} \quad u = 1 \\ < 0, & \text{если} \quad u \in (1; 9/4] \end{cases} .$$

3. О функциях, удовлетворяющих неравенству (2)

Будем считать, что функции F принадлежат классу $\{F\}$. При φ, достаточно близком к $\bar{u}_0$, левая часть неравенства (2) является положительной величиной. При удалении φ от $\bar{u}_0$ это неравенство может оказаться неверным для данной функции.

Определение $\{F_2\}$. *Функция $F(u)$ из класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (2):*

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) \geq 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Подкласс $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0), \quad A > 0,$$

для которых выполнение неравенства (2) очевидно:

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) =$$

$$= A\left(s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) - \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) At - \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) As = \frac{Ast}{\varphi - \bar{u}_0} \geq 0.$$

При проверке неравенства (2) для нелинейных функций также удобно пользоваться свойствами функций, принадлежащих подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Однако, проверку неравенства (2) можно упростить, если входящие в него выражения преобразовать к следующему виду:

$$\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0} = \varphi - (\varphi - \bar{u}_0)\left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right)\left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right),$$

$$\bar{u}_0 + s = \varphi - (\varphi - \bar{u}_0)\left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right),$$

$$\bar{u}_0 + t = \varphi - (\varphi - \bar{u}_0)\left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right).$$

Множеством значений всех трех величин является промежуток $(\bar{u}_0, \varphi]$, на котором производные $F'(u)$ должны быть положительными.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right), \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

относительно которой неравенство (2) примет более простой вид

$$g(xy) - xg(y) - yg(x) \geqslant 0, \quad x, y \in [0, 1), \tag{5}$$

где

$$x = 1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad y = 1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}. \tag{6}$$

Для $xy \neq 0$ неравенство (6) имеет вид

$$\frac{g(x)}{x} + \frac{g(y)}{y} \leqslant \frac{g(xy)}{xy},$$

допускающий геометрическое толкование: если рассмотреть радиус-вектор точки $(x,\ g(x))$ графика функции $g(x)$, то отношение $g(x)/x$ является тангенсом угла наклона радиус-вектора к положительному направлению оси Ox.

График функции $y = g(x)$ получается из графика функции $v = F(u)$ в результате следующих преобразований в системе координат Ouv.

1) Сначала из графика функции $v = F(u)$ симметрией относительно оси ординат Ov получается график функции $v = F(-u)$.

2) Далее из графика функции $v = F(-u)$ растяжением в $(\varphi - \bar{u}_0)$ раз вдоль оси ординат Ov получается график функции $v = F(-(\varphi - \bar{u}_0)u)$.

3) Затем из графика функции $v = F(-(\varphi - \bar{u}_0)u)$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс Ou на φ единиц вправо получается график функции $v = F(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)u)$.

4) Переобозначаем оси координат: u – на x, v – на y, и получаем график функции

$$y = g(x) = F(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x).$$

В связи с такой геометрией положительность производной $F'(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0,\ \varphi]$ влечет отрицательность производной $g'(x)$ на промежутке $[0,\ 1]$. Характер выпуклости функции $g(x)$ на промежутке $[0,\ 1]$ оказывается таким же, как у функции $F(u)$ на промежутке $[\bar{u}_0,\ \varphi]$.

Точка u из области определения функции $F(u)$ переходит в точку x области определения функции $g(x)$ по правилу

$$x = \frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}. \tag{7}$$

Обратный переход от функции $g(x)$ к функции $F(u)$ происходит по формуле

$$F(u) = g\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}\right). \tag{8}$$

Переход от функций $F(u)$ к функциям $g(x)$ позволяет трансформировать класс $\{F\}$ и подкласс $\{F_2\}$ соответственно в класс $\{G\}$ и подкласс $\{G_2\}$.

Определение $\{G\}$. *Функция* $g(x)$ *принадлежит классу* $\{G\}$*, если*

1) *значение* $g(1) = 0$;

2) *функция* $g(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема и ее первая производная* $g'(x) < 0$ *на промежутке* $[0, 1]$.

Определение $\{G_2\}$. *Функция* $g(x)$ *из класса* $\{G\}$ *принадлежит подклассу* $\{G_2\}$*, если для этой функции выполняется неравенство (5).*

Приведем свойства функций из подклассов $\{G_2\}$ и $\{F_2\}$.

Свойство $\{G_2\}_{-}1$. *Если* $g(x)$ – *функция класса* $\{G\}$ *и ее вторая производная* $g''(x) \geqslant 0$ *для* $x \in [0,\,1]$, *то* $g(x)$ *принадлежит подклассу* $\{G_2\}$.

Свойство $\{F_2\}_{-}1$. *Если* $F(u)$ – *функция класса* $\{F\}$ *и ее вторая производная* $F''(u) \geqslant 0$ *для* $u \in [\bar{u}_0, \varphi]$, *то* $F(u)$ *принадлежит подклассу* $\{F_2\}$.

Принадлежность функции подклассу $\{F_2\}$ не гарантирует положительности второй производной на каком-либо промежутке. Более того, подклассу $\{F_2\}$ принадлежат функции, вторая производная которых всюду отрицательна, например, квадратичные функции с отрицательной второй производной (см. [1]).

Свойство $\{G_2\}_{-}2$. *Подкласс* $\{G_2\}$ *является собственным подмножеством класса* $\{G\}$.

Например, кубические функции вида

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) = (\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x)^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 < 0,$$

при условии, что $\varphi > \bar{u}_0/2$, принадлежат классу $\{G\}$, но не принадлежат подклассу $\{G_2\}$.

Свойство $\{F_2\}_{-}2$. *Подкласс* $\{F_2\}$ *является собственным подмножеством класса* $\{F\}$.

Например, кубические функции вида

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 < 0,$$

при условии, что $\varphi > \bar{u}_0/2$, принадлежат классу $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, но не принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

4. Сравнение подклассов $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$

Свойство $\{F\}_{-}1$. *Пересечение подклассов* $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ *и* $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ *не пусто.*

Например, обоим подклассам принадлежат функции с положительной на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$ второй производной.

Свойство $\{F\}_{-}2$. *Подкласс* $\{F_2\}$ *не включается в* $\{F_1\}$.

Например, подклассу $\{F_2\}$ принадлежат квадратичные функции вида

$$F(u) = -A(u - \bar{u}_0)(u - \beta), \quad A > 0, \quad \bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0 + \beta}{2} < \beta,$$

но такие функции не принадлежат подклассу $\{F_1\}$.

Замечание. Вопрос о невключении подкласса $\{F_1\}$ в $\{F_2\}$ остается открытым.

5. О кубических многочленах, удовлетворяющих неравенству (2)

Важными представителями нелинейных функций, для которых стоит задача соответствия неравенствам (1)–(3), являются многочлены. Квадратичные функции класса $\{F\}$ полностью рассмотрены в работе [1]. А вот для кубических функций

$$F(u) = \pm A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

несмотря на значительные усилия (см. [2]–[5]), остаются "белые пятна".

В случае отрицательного коэффициента единственно возможным является случай

$$F(u) = -A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)(u - \beta), \tag{9a}$$

где

$$A > 0, \quad \beta < \bar{u}_0 < \varphi < \frac{\alpha + \bar{u}_0}{2} < \alpha. \tag{9b}$$

Для таких функций нелинейный метод угловых пограничных функций ранее не применялся из-за возникавших технических трудностей.

Соответствующие функции $g(x)$ имеют вид

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) =$$
$$= -A(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \bar{u}_0)(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \alpha)(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \beta) =$$
$$= A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)\left(x - \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \bar{u}_0}\right)\left(x - \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \bar{u}_0}\right),$$

то есть

$$g(x) = A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b), \tag{10a}$$

где

$$A > 0, \quad a = \frac{\varphi - \beta}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad b = \frac{\varphi - \alpha}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad a < \frac{a+1}{2} < 0 < 1 < b. \tag{10b}$$

Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Многочлен $g(x)$ класса $\{G\}$ вида (10) принадлежит подклассу $\{G_2\}$ тогда и только тогда, когда точка перегиба этого многочлена не принадлежит промежутку* $(0; 1/3)$.

Переформулируем предложение 1 для функций класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ с учетом того, что точка перегиба λ функции $g(x)$ переходит в точку перегиба γ функции $F(u)$ по формуле

$$\gamma = \varphi - \lambda(\varphi - \bar{u}_0). \tag{11}$$

Значению $\lambda = 0$ соответствует значение $\gamma = \varphi$, а значению $\lambda = 1/3$ – значение $\gamma = \varphi - (\varphi - \bar{u}_0)/3$.

Предложение 2. *Многочлен $F(u)$ класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ вида (9) принадлежит подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ тогда и только тогда, когда точка перегиба этого многочлена не принадлежит промежутку* $(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)/3;\ \varphi)$.

Далее будем рассматривать кубические многочлены класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0. \tag{12}$$

Соответствующие многочлены $g(x)$ класса $\{G\}$ имеют вид

$$g(x) = F\left(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x\right) =$$
$$= A(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x - \bar{u}_0)\left[(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x)^2 + p(\varphi - (\varphi - \bar{u}_0)x) + q\right] =$$
$$= -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)\left[x^2 - \frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}x + \frac{q + p\varphi + \varphi^2}{(\varphi - \bar{u}_0)^2}\right],$$

то есть

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1),$$

где

$$p_1 = -\frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}, \quad q_1 = \frac{\varphi^2 + p\varphi + q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2}.$$

Здесь $\varphi^2 + p\varphi + q > 0$, так как в противном случае $F(\varphi) = A(\varphi - \bar{u}_0)(\varphi^2 + p\varphi + q) \leq 0$. Поэтому $q_1 > 0$.

Классификацию многочленов $g(x)$ проведем по взаимному расположению корня $x = 1$ и точки перегиба. Многочленам $g(x)$ с точкой перегиба, расположенной правее корня $x = 1$, соответствуют многочлены $F(u)$ с точкой перегиба, расположенной левее корня $u = \bar{u}_0$. Такой случай исследован в работах [2], [3].

Интерес представляют многочлены $F(u)$, у которых точка перегиба расположена правее корня $u = \bar{u}_0$. У соответствующих многочленов $g(x)$ точка перегиба λ будет находиться левее корня $x = 1$:

$$\lambda = \frac{1 - p_1}{3} < 1,$$

откуда получаем $p_1 > -2$. Таким образом, рассматриваем многочлены класса $\{G\}$ вида

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1), \quad A > 0, \quad p_1 > -2, \quad q_1 > 0. \tag{13}$$

Такие многочлены имеют один из следующих трех видов.

1) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 > 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b), \tag{14a}$$

где

$$a = \frac{-p_1 - \sqrt{D}}{2}, \quad b = \frac{-p_1 + \sqrt{D}}{2}, \quad a < b < \frac{b+1}{2} < 0, \quad . \tag{14b}$$

2) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 = 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)^2, \tag{15a}$$

где

$$a = -\frac{p_1}{2}, \quad a < \frac{a+1}{2} < 0. \tag{15b}$$

3) Если дискриминант $D = p_1^2 - 4q_1 < 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x^2 + p_1 x + q_1), \tag{16a}$$

где

$$\lambda = \frac{1 - p_1}{3} < 0, \quad g'(0) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(q_1 - p_1) < 0. \tag{16b}$$

Предложение 3. *Многочлены класса $\{G\}$ вида (13) принадлежат подклассу $\{G_2\}$ тогда и только тогда, когда*

$$q_1 - p_1 \geq 3. \tag{17}$$

Переформулируем предложение 3 для многочленов $F(u)$ вида (12), у которых точка перегиба γ расположена правее корня $u = \bar{u}_0$:

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0 - p}{3} > \bar{u}_0.$$

Условия (14)–(16) зависят от знака дискриминанта

$$D = p_1^2 - 4q_1 = \left(\frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0}\right)^2 - 4\,\frac{\varphi^2 + p\varphi + q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2} = \frac{p^2 - 4q}{(\varphi - \bar{u}_0)^2}\,,$$

поэтому для функций $F(u)$ получаются следующие три вида, соответствующие условиям (14)–(16).

1) Если $p^2 - 4q > 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x-1)(x-a)(x-b),$$

$$F(u) = g\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}\right) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - 1\right)\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - a\right)\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - b\right) =$$
$$= A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)(u - \beta),$$

где

$$\alpha = \varphi - b(\varphi - \bar{u}_0), \quad \beta = \varphi - a(\varphi - \bar{u}_0).$$

Таким образом, виду (14) соответствует

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)(u - \beta), \quad A > 0, \tag{18a}$$

где

$$\bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0 + \alpha}{2} < \alpha < \beta. \tag{18b}$$

2) Если $p^2 - 4q = 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x - 1)(x - a)^2,$$

$$F(u) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - 1\right)\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - a\right)^2 = A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)^2,$$

где

$$\alpha = \varphi - a(\varphi - \bar{u}_0).$$

Таким образом, виду (15) соответствует

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)(u - \alpha)^2, \quad A > 0, \tag{19a}$$

где

$$\bar{u}_0 < \varphi < \frac{\bar{u}_0 + \alpha}{2} < \alpha. \tag{19b}$$

3) Если $p^2 - 4q < 0$, то

$$g(x) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3(x - 1)\left(x^2 + p_1 x + q_1\right),$$

$$F(u) = -A(\varphi - \bar{u}_0)^3\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0} - 1\right)\left(\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}\right)^2 + p_1\left(\frac{\varphi - u}{\varphi - \bar{u}_0}\right) + q_1\right) =$$
$$= A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right),$$

где

$$p = (\varphi - u)p_1 - 2\varphi, \quad q = q_1(\varphi - \bar{u}_0)^2 - p_1\varphi(\varphi - \bar{u}_0) + \varphi^2.$$

Таким образом, виду (16) соответствует

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0, \tag{20a}$$

с условиями, что точка перегиба γ функции $F(u)$ должна располагаться правее значения φ и значение производной $F'(\varphi)$ должно быть положительным:

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0 - p}{3} > \varphi, \quad F'(\varphi) = A(3\varphi^2 + 2(p - \bar{u}_0)\varphi + q - \bar{u}_0 p) > 0. \tag{20b}$$

Теперь можно переформулировать предложение 3, если учесть, что условие (17) переходит в условие

$$q_1 - p_1 = \frac{q + p\varphi + \varphi^2}{(\varphi - \bar{u}_0)^2} + \frac{2\varphi + p}{\varphi - \bar{u}_0} = \frac{q + p\varphi + \varphi^2 + (2\varphi + p)(\varphi - \bar{u}_0)}{(\varphi - \bar{u}_0)^2} \geq 3,$$

которое эквивалентно неравенству

$$q + p\varphi + \varphi^2 + (2\varphi + p)(\varphi - \bar{u}_0) \geq 3(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

или

$$2(p + 2\bar{u}_0)(\varphi - \bar{u}_0) + \bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q \geq 0.$$

Так как

$$\gamma = \frac{\bar{u}_0 - p}{3} > \bar{u}_0,$$

то $2\bar{u}_0 + p < 0$ и условию (17) соответствует условие

$$\varphi - \bar{u}_0 \leq \frac{\bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q}{-2(2\bar{u}_0 + p)}. \tag{21}$$

Здесь $\bar{u}_0^2 + p\bar{u}_0 + q > 0$, так как в противном случае значения функции

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

при $u > \bar{u}_0$ и достаточно близких к $\bar{u}_0$ будут отрицательными.

Предложение 4. *Многочлены класса* $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0)\left(u^2 + pu + q\right), \quad A > 0,$$

вида (18)–(20) принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие (21).*

6. О функциях, удовлетворяющих неравенству (3)

Рассмотрим неравенство (3):

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0 + s\right) \leq 0,$$

где s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$.

Определение $\{F_3\}$. *Функция F из класса $\{F, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$, если для этой функции выполняется неравенство (3).*

Подкласс $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ не пуст, так как ему принадлежат линейные функции вида

$$F(u) = A(u - \bar{u}_0), \quad A > 0,$$

для которых выполнение неравенства (3) очевидно:

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0 + u)du - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0 + t\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0 + s\right) =$$

$$= A\left(s + t - 2\sqrt{st}\right) - \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t Audu - A\left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)t - A\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)s = -\frac{1}{2}A\sqrt{st} \leq 0.$$

7. О коренных и примыкающих функциях

Решения неравенств (1)–(3) обладают следующим общим свойством.

Свойство 1. *Класс $\{F\}$ является линейным пространством, а подклассы $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ и $\{F_3\}$ – его подпространства.*

Такое же свойство справедливо и для функций класса $\{G\}$: *класс $\{G\}$ является линейным пространством, а подкласс $\{G_2\}$ – его подпространство.*

Свойство 1 лежит в основе метода коренных и примыкающих функций. Метод позволяет строить решение каждого неравенства типа (1)–(3) в виде суммы $F_1 + F_2$, где функции F_1 и F_2 принадлежат одному и тому же подклассу, но одна из них значительно проще другой. Например, если нужно найти многочлены n-й степени, удовлетворяющие неравенству (1), то достаточно выбрать конкретный многочлен n-й степени, удовлетворяющий неравенству (1). Такой многочлен назовем *коренным.* Широкий класс многочленов n-й степени из подкласса $\{F_1\}$ будет определяться через многообразие многочленов из подкласса $\{F_1\}$ меньшей степени. Такме многочлены назовем *примыкающими.*

Предложение 5. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)(u - \alpha), \quad \text{где} \quad \alpha \leq \bar{u}_0 - 1,$$

принадлежат подклассу $\{F_1\}$.

Доказательство. Очевидно, что рассматриваемые многочлены принадлежат классу $\{F\}$. Будут ли они принадлежать подклассу $\{F_1\}$?

Фиксируем число $\beta \in (\bar{u}_0 - 1, \bar{u}_0)$ и коренной многочлен 2-й степени

$$F_1(u) = (u - \bar{u}_0)(u - \beta).$$

Так как вторая производная $F_1''(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \bar{u}_0 + 2(\varphi - \bar{u}_0)]$, то по свойству 4.1 функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_1, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (\beta - \alpha)(u - \bar{u}_0).$$

Такие многочлены принадлежат подклассу $\{F_1\}$ при $\beta - \alpha > 0$.

По свойству 1 сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_1\}$ при любых $\alpha \leq \bar{u}_0 - 1$. *Предложение 5 доказано.*

Предложение 6. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left(u^2 + \bar{u}_0 u + q\right), \quad \bar{u}_0 > 0, \quad q > \bar{u}_0^2,$$

принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Доказательство. Имеем

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left[\left(u^2 + \bar{u}_0 u + \bar{u}_0^2\right) + (q - \bar{u}_0^2)\right] = \left(u^3 - \bar{u}_0^3\right) + (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Фиксируем коренной многочлен 3-й степени

$$F_1(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 > 0.$$

Вторая производная $F_1''(u) > 0$ на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$, поэтому по свойству 2.2 функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Они принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$.

По свойству 1 сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. *Предложение 6 доказано.*

Предложение 7. *Многочлены вида*

$$F(u) = (u - \bar{u}_0)\left(u^2 + \bar{u}_0 u + q\right), \quad \bar{u}_0 > 0, \quad q > \bar{u}_0^2,$$

принадлежат подклассу $\{F_2, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Доказательство. Как и выше, имеем

$$F(u) = \left(u^3 - \bar{u}_0^3\right) + (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Фиксируем коренной многочлен 3-й степени

$$F_1(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \bar{u}_0 > 0.$$

Докажем, что он принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$. Проверка неравенства (3) значительно упрощается, если в нем отбросить последнее слагаемое и рассмотреть более сильное неравенство

$$F_1\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right) F_1(\bar{u}_0 + t) - \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right) F_1(\bar{u}_0 + s) \leq 0,$$

или

$$-\sqrt{st}\left(\frac{1}{s}F_1(\bar{u}_0 + s) + \frac{1}{t}F_1(\bar{u}_0 + t)\right) - F_1\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) + F_1(\bar{u}_0 + s) + F_1(\bar{u}_0 + t) \geq 0. \quad (21)$$

Левая часть полученного неравенства является функцией, симметричной относительно s и t. Ее можно привести к переменным

$$u = \sqrt{st} \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad v = \frac{s+t}{2} \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (22)$$

Имеем

$$F_1(\bar{u}_0 + u) = (\bar{u}_0 + u)^3 - \bar{u}_0^3 = u\left[(\bar{u}_0 + u)^2 + \bar{u}_0(\bar{u}_0 + u) + \bar{u}_0^2\right] = u\left(u^2 + 3\bar{u}_0 u + 3\bar{u}_0^2\right),$$

$$F_1(\bar{u}_0 + s) + F_1(\bar{u}_0 + t) = \left(s^3 + 3\bar{u}_0 s^2 + 3\bar{u}_0^2 s\right) + \left(t^3 + 3\bar{u}_0 t^2 + 3\bar{u}_0^2 t\right) =$$

$$= (s+t)^3 - 3st(s+t) + 3\bar{u}_0(s+t)^2 - 6\bar{u}_0 st + 3\bar{u}_0^2(s+t) = 8v^3 - 6u^2 v + 12\bar{u}_0 v^2 - 6\bar{u}_0 u^2 + 6\bar{u}_0^2 v,$$

$$\frac{1}{t}F(\bar{u}_0 + t) + \frac{1}{s}F(\bar{u}_0 + s) = \left(t^2 + 3\bar{u}_0 t + 3\bar{u}_0^2\right) + \left(s^2 + 3\bar{u}_0 s + 3\bar{u}_0^2\right) =$$

$$= (s+t)^2 - 2st + 3\bar{u}_0(s+t) + 6\bar{u}_0^2 = 4v^2 - 2u^2 + 6\bar{u}_0 v + 6\bar{u}_0^2,$$

$$F\left(\bar{u}_0 + s + t - 2\sqrt{st}\right) = F(\bar{u}_0 + 2v - 2u).$$

В результате замены (22) неравенство (21) примет вид

$$-u(4v^2 - 2u^2 + 6\bar{u}_0 v + 6\bar{u}_0^2) - F(\bar{u}_0 + 2v - 2u) + 8v^3 - 6u^2 v + 12\bar{u}_0 v^2 - 6\bar{u}_0 u^2 + 6\bar{u}_0^2 v \geq 0,$$

или

$$H := 8v^3 - 6u^2v + 12\bar{u}_0v^2 - 6\bar{u}_0u^2 + 6\bar{u}_0^2v - 4uv^2 + 2u^3 - 6\bar{u}_0uv - 6\bar{u}_0^2u - F(\bar{u}_0 + 2v - 2u) \geq 0. \quad (23)$$

Найдем образ квадрата $G:\ (0, \varphi - \bar{u}_0] \times (0, \varphi - \bar{u}_0]$ при отображении

$$(s,t) \to \left(\sqrt{st}, \frac{s+t}{2}\right) = (u,v).$$

Так как

$$\frac{s+t}{2} \geq \sqrt{st},$$

то точки (s,t) квадрата G отображаются в точки (u,v) сектора $v > u > 0$. Две стороны квадрата G:

$$s = 0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{и} \quad t = 0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

переходят в один и тот же отрезок

$$u = 0, \quad v \in \left(0, \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}\right]. \quad (24)$$

Диагональ квадрата G: $t = s$, $s \in (0, \varphi - \bar{u}_0]$, переходит в отрезок биссектрисы

$$v = u, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (25)$$

И, наконец, оставшиеся две стороны квадрата G:

$$s = \varphi - \bar{u}_0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{и} \quad t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$

переходят в один и тот же кусок параболы

$$v = \frac{u^2}{2(\varphi - \bar{u}_0)} + \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0]. \quad (26)$$

Образом квадрата G является криволинейный треугольник Γ, ограниченный линиями (24)–(26) и накрываемый дважды.

Исследуем функцию H, определенную в (23), на экстремумы в треугольнике Γ. Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -12uv - 12\bar{u}_0u - 4v^2 + 6u^2 - 6\bar{u}_0v - 6\bar{u}_0^2 + 2F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = 24v^2 - 6u^2 + 24\bar{u}_0v + 6\bar{u}_0^2 - 8uv - 6\bar{u}_0u - 2F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 0,$$

приводят к соотношениям

$$F'(\bar{u}_0 + 2v - 2u) = 6uv + 6\bar{u}_0u + 2v^2 - 3u^2 + 3\bar{u}_0v + 3\bar{u}_0^2 = 12v^2 - 3u^2 + 12\bar{u}_0v + 3\bar{u}_0^2 - 4uv - 3\bar{u}_0u,$$

которые выполняются только при $v = u$. Поэтому внутри треугольника Γ точек экстремума нет. Остается проверить выполнение неравенства (23) на границе треугольника Γ.

1) На стороне

$$u = 0, \quad v \in \left(0, \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}\right],$$

значения

$$H(0,v) = 8v^3 + 12\bar{u}_0v^2 + 6\bar{u}_0^2v - F(\bar{u}_0 + 2v) = F(\bar{u}_0 + 2v) - F(\bar{u}_0 + 2v) = 0 \geq 0.$$

2) На стороне
$$v = u,\ u \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$
значения
$$H(u,u) = 8u^3 - 6u^3 + 12\bar{u}_0u^2 - 6\bar{u}_0u^2 + 6\bar{u}_0^2u - 4u^3 + 2u^3 - 6\bar{u}_0u^2 - 6\bar{u}_0^2u - F(\bar{u}_0) = 0 \geq 0.$$

3) Для проверки неравенства (23) на стороне
$$v = \frac{u^2}{2(\varphi - \bar{u}_0)} + \frac{\varphi - \bar{u}_0}{2}, \quad u \in (0, \varphi - \bar{u}_0],$$
удобнее вернуться к переменным (s,t) и рассмотреть одну из двух сторон квадрата G
$$s = \varphi - \bar{u}_0,\ t \in (0, \varphi - \bar{u}_0], \quad \text{или} \quad t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0].$$

Для определенности рассмотрим сторону $t = \varphi - \bar{u}_0,\ s \in (0, \varphi - \bar{u}_0]$. Запишем неравенство (21) в виде
$$\left(1 - \sqrt{\frac{s}{t}}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \sqrt{\frac{t}{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left((\bar{u}_0 + (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2\right) \geq 0.$$

Его нужно доказать при $t = \varphi - \bar{u}_0$:
$$\left(1 - \sqrt{\frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}}\right) F(\varphi) + \left(1 - \sqrt{\frac{\varphi - \bar{u}_0}{s}}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left((\bar{u}_0 + (\sqrt{\varphi - \bar{u}_0} - \sqrt{s})^2\right) \geq 0?$$

Сделаем замену
$$z = \sqrt{\frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}}, \quad 0 < z \leq 1. \tag{27}$$

В результате получим неравенство
$$(1-z)F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)\right) - \frac{1-z}{z}F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)z^2\right) - F\left(\bar{u}_0 + (\varphi - \bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0.$$

Здесь
$$F(\bar{u}_0 + u) = u\left(u^2 + 3\bar{u}_0u + 3\bar{u}_0^2\right),$$
или
$$F(\bar{u}_0 + u) = uh(u), \quad \text{где} \quad h(u) = u^2 + 3\bar{u}_0u + 3\bar{u}_0^2.$$

Соответственно нужно доказать неравенство
$$(1-z)(\varphi - \bar{u}_0)h(\varphi - \bar{u}_0) - (1-z)(\varphi - \bar{u}_0)zh\left((\varphi - \bar{u}_0)z^2\right) - (\varphi - \bar{u}_0)(1-z)^2h\left((\varphi - \bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0,$$
которое после деления на $(1-z)(\varphi - \bar{u}_0)$ принимает вид
$$h(\varphi - \bar{u}_0) - zh\left((\varphi - \bar{u}_0)z^2\right) - (1-z)h\left((\varphi - \bar{u}_0)(1-z)^2\right) \geq 0. \tag{28}$$

Заменим $\varphi - \bar{u}_0$ на a и будем считать его параметром. Преобразуем левую часть неравенства (28):
$$h(a) - zh\left(az^2\right) - (1-z)h\left(a(1-z)^2\right) = \left(a^2 + 3\bar{u}_0a + 3\bar{u}_0^2\right) - z\left(a^2z^4 + 3\bar{u}_0az^2 + 3\bar{u}_0^2\right) -$$
$$- \left[a^2(1-z)^4 + 3\bar{u}_0a(1-z)^2 + 3\bar{u}_0^2\right] + z\left[a^2(1-z)^4 + 3\bar{u}_0a(1-z)^2 + 3\bar{u}_0^2\right] =$$

$$= a\left[a + 3\bar{u}_0 - a(1-z)^4 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + a(4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z) + 3\bar{u}_0(2z^2 - z)\right].$$

Поэтому неравенство (28) эквивалентно неравенству

$$g := a + 3\bar{u}_0 - a(1-z)^4 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + a\left(4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z\right) + 3\bar{u}_0\left(2z^2 - z\right) \geq 0. \qquad (29)$$

Изучим зависимость значений g от параметра a на промежутке $a > 0$. Производная

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 1 - (1-z)^4 + 4z^4 - 6z^3 + 4z^2 - z = z\left(3z^3 - 2z^2 - 2z + 3\right) > 0,$$

поэтому g возрастает на промежутке $a > 0$ и ее значения

$$g(a) > g(0) = 3\bar{u}_0 - 3\bar{u}_0(1-z)^2 + 3\bar{u}_0\left(2z^2 - z\right) = 3\bar{u}_0\left(z^2 + z\right) > 0.$$

Таким образом, неравенство (29) верно. Вместе с ним верно и (23) при $t = \varphi - \bar{u}_0$. Это завершает доказательство неравенства (21), и можно утверждать, что функция $F_1(u)$ принадлежит подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$.

Примыкающими будут многочлены 1-й степени

$$F_2(u) = (q - \bar{u}_0^2)(u - \bar{u}_0).$$

Как показано выше, они принадлежат подклассу $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. Поэтому сумма

$$F_1(u) + F_2(u) = F(u)$$

будет многочленом подкласса $\{F_3, [\bar{u}_0, \varphi]\}$ при условии $q > \bar{u}_0^2$. *Предложение 7 доказано.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.57. - № 2. 2017. - С. 255–274. (English transl.: Denisov I.V. Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. Vol. 57. № 2. pp. 253-271.)

2. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. №2. 2021. - С. 256–267. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. №2. pp. 242–253.)

3. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2024.- т. 25.- вып. 1.- С. 25-–40.

4. Денисов, И. В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – Т.61. №11. 2021. - С. 1894-1903. (English transl.: Denisov I.V. Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. №11. pp. 1855-1863.)

5. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник.- 2023.- т. 24.- вып. 1.- С. 27–39.

6. Денисов, И. В. О классах функций, определяемых функциональными неравенствами // Известия Тульского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Информатика».- 2000.- т.6.- вып. 1.- С. 79–84.

7. Денисов, И. В. О некоторых классах функций // Чебышевский сборник.- 2009.- т. 10.- вып. 2 (30).– С. 79–108.

8. Денисов, А. И., Денисов, И. В. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач // Чебышевский сборник.- 2024.- т. 25.- вып. 2.- С. 235–242.

REFERENCES

1. Denisov, I. V., 2017, “Angular Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Quadratic Nonlinearity”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 57. No. 2. pp. 253–271.

2. Denisov, I. V., 2021 “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Parabolic Equations with Cubic Nonlinearities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 61. No. 2. pp. 242-–253.

3. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2024, “Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 25–40.

4. Denisov, I. V., 2021, “Corner Boundary Layer in Boundary Value Problems with Nonlinearities Having Stationary Points”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 61. No. 11. pp. 1855–1863.

5. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2023, “Nonlinear method of angular boundary functions in problems with cubic nonlinearities”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, no. 1, pp. 27–39.

6. Denisov, I. V., 2000, “On classes of functions defined by functional inequalities”, *Izvestiya of Tula State University. Series “Mathematics. Mechanics. Computer Science”*, vol. 6. no. 1, pp. 79–84.

7. Denisov, I. V., 2009, “About some classes of functions”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 10, no. 2, pp. 79–108.

8. Denisov, A. I., Denisov, I. V., 2024, “The support barrier functions for nonlinear parabolic problems”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 235–242.

Получено: 06.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024