

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-47-69

Песочные паттерны на регулярном графе
с вершинами степени восемь¹

П. В. Гранин, Н. С. Калинин, А. С. Саакян

Гранин Павел Витальевич — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: granininfo@gmail.com

Калинин Никита Сергеевич — Гуандун-Технион (Шаньтоу, Китай); Технион (г. Хайфа, Израиль).

e-mail: nikaanspb@gmail.com

Саакян Артур Суренович — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: hckray@vladloh.com

Аннотация

Система находится в критическом состоянии, если даже небольшое возмущение может привести к глобальным изменениям. Таковы, например, любые фазовые переходы: в воде, охлаждённой до нуля градусов, один центр кристаллизации быстро разрастается до большого кластера. Впервые концепцию самоорганизующейся критичности предложили Бэк, Тэнг и Вайзенфельд в 1987 году. В своей работе они описали систему, ставшую классической моделью самоорганизующейся критичности: на квадратной сетке в некоторых узлах лежат песчинки, суммарно конечное число. Если в одном из узлов лежит более трёх песчинок, происходит обвал: четыре песчинки из этого узла перераспределяются на соседние узлы, это может вызвать обвалы в них, потом в их соседях... Обвалы будут лавинообразно происходить до тех пор, пока система вновь не вернется в равновесное состояние, этот процесс называется релаксацией.

В настоящей статье представлены результаты экспериментального и теоретического исследования следующей задачи. Рассмотрим регулярный граф, вершинами которого являются точки плоскости, обе координаты которых целые, и каждая вершина соединена с 8 ближайшими вершинами. В точку (0,0) положим большое число песчинок и произведём релаксацию. Результат релаксации имеет очевидную фрактальную структуру, видимую в компьютерных экспериментах, и части этой структуры могут быть описаны.

Мы классифицируем некоторые возникающие паттерны и предлагаем гипотезы о их устройстве (опираясь на похожие результаты для других регулярных графов). Доказаны оценки на среднее число песка в появляющихся паттернах.

Ключевые слова: песочные модели, экспериментальная математика.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Гранин, П. В., Калинин, Н. С., Саакян, А. С. Песочные паттерны на регулярном графе с вершинами степени восемь // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 47–69.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 20-71-00007).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-47-69

Sandpile patterns on a regular graph of degree eight

P. V. Granin, N. S. Kalinin, A. S. Saakyan

Granin Pavel Vital'evich — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).*e-mail: granininfo@gmail.com***Kalinin Nikita Sergeevich** — Guangdong Technion Israel Institute of Technology (Shantou, China); Technion-Israel Institute of Technology (Haifa, Israel).*e-mail: nikaanspb@gmail.com***Saakyan Artur Surenovich** — Saint Petersburg State University (St. Petersburg).*e-mail: hckray@vladloh.com***Abstract**

The system is in critical condition if even a small disturbance can lead to global changes. These are, for example, any phase transitions: in water cooled to zero degrees, one crystallization center rapidly grows to a large cluster. The concept of self-organizing criticality was first proposed by Bak, Tang and Weisenfeld in 1987. In their work, they described a system that has become a classic model of self-organizing criticality: on a square grid, in some nodes, there are grains of sand, a finite number in total. If there are more than three grains of sand in one of the nodes, a toppling occurs: four grains of sand from this node are redistributed to neighboring nodes, this can cause topplings in them, then in their neighbors... Collapses will occur in an avalanche-like manner until the system returns to an equilibrium state, this process is called relaxation.

This article presents the results of an experimental and theoretical study of the following problem. Consider a regular graph whose vertices are points in the plane, both coordinates of which are integers, and each vertex is connected to the 8 nearest vertices. Put a large number of grains of sand at the point (0,0) and relax. The relaxation result has an obvious fractal structure, visible in computer experiments, and parts of this structure can be described.

We classify some emerging patterns and propose hypotheses about their structure (based on similar results for other regular graphs). Estimates for the average number of sand in the emerging patterns are proved.

Keywords: sandpile models, experimental math.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Granin, P. V., Kalinin, N. S., Saakyan, A. S. 2024. "Sandpile patterns on a regular graph of degree eight", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 47–69.

1. Общие определения, мотивация и план статьи

Работа посвящена изучению песочной модели на некотором регулярном графе. Приведем основные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Состоянием песочной модели на графе $G = (V, E)$ будем называть функцию $\phi: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Мы интерпретируем $\phi(x)$ как количество песчинок в вершине $x \in V$.

Если для $x \in V$ верно $\phi(x) \geq \deg(x)$ (число песчинок в вершине не менее степени вершины), то мы называем эту вершину нестабильной и разрешаем сделать в ней обвал. В результате такого обвала получается новое состояние ϕ' по следующему правилу:

$$\begin{cases} \phi'(y) = \phi(y) - \deg(y), & \text{если } y = x, \\ \phi'(y) = \phi(y) + 1, & \text{если } (x, y) \in E, \\ \phi'(y) = \phi(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

При обвале происходит перераспределение песка в графе — из нестабильной вершины в каждого соседа уходит по одной песчинке.

Состояние ϕ называется стабильным, если все вершины в графе являются стабильными, то есть для любой вершины $x \in V$ выполнено $\phi(x) < \deg(x)$.

Релаксацией называется выполнение обвалов в вершинах, пока эти обвалы возможны. Результат релаксации состояния ϕ будем обозначать ϕ° . Если существует конечная релаксация (а для состояний с конечным суммарным числом песчинок на связном бесконечном графе это всегда так), то состояние ϕ называется *стабилизируемым* или *релаксируемым* и определена функция числа обвалов, или *одометр*, $u: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для каждой вершины x равная количеству обвалов в x во время релаксации. Несложно показать [3], что число обвалов в вершине не зависит от порядка выполнения обвалов в вершинах. Из этого следует, что результат релаксации ϕ° не зависит от того, в каком порядке мы выполняли обвалы.

Иногда рассматривают песочные модели со «стоками» — выделенными вершинами графа, при попадании в которые песок «исчезает», или, что эквивалентно, в стоках запрещено делать обвалы. Наличие подобных вершин существенно для конечных графов, поскольку иначе процесс релаксации может не закончиться. Например, если суммарное количество песчинок во всех вершинах больше суммарной степени всех вершин. Нашим основным объектом изучения будет песочная модель на связном бесконечном графе (но с конечным суммарным числом песчинок), стоков в нашей модели не будет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для функции $f: V \rightarrow \mathbb{Z}$ на графе G , определим её дискретный лапласиан следующим образом:

$$\Delta_G f(x) = \sum_{y|(y,x) \in E} (f(y) - f(x)) = \sum_{y|(y,x) \in E} f(y) - \deg(x) \cdot f(x).$$

Обычно будет понятно о каком графе идёт речь, поэтому нижний индекс лапласиана мы будем опускать.

Если состояние η стабилизируемо, то результат его релаксации η° и одометр u любой релаксации связаны тождеством

$$\forall x \in V, 0 \leq \eta(x) + \Delta u(x) = \eta^\circ(x) < \deg(x).$$

Для доказательства тождества достаточно для каждой вершины x рассмотреть количество прибывающих в неё песчинок во время релаксации, и количество убывающих из неё песчинок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (Принцип наименьшего действия, [4]). Если $\eta: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w: V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяют условию $\eta(x) + \Delta w(x) < \deg(x)$ для всякого $x \in V$, тогда состояние η стабилизируемо, и его одометр и удовлетворяет условию $u \leq w$.

Рассмотрим граф G_8 — регулярный граф на вершинах \mathbb{Z}^2 степени 8, в котором точки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда $|x_1 - y_1| \leq 1$ и $|x_2 - y_2| \leq 1$.

Известно [16], что если в начало координат на пустой плоскости насыпать n песчинок и провести релаксацию, то полученная картинка растёт со скоростью \sqrt{n} . Поэтому разумно сжать полученное состояние в $n^{1/2}$ раз, и уже потом переходить к пределу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Определим состояние $\gamma_n: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ следующим образом:*

$$\begin{cases} \gamma_n(x_1, x_2) = n, & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \\ \gamma_n(x_1, x_2) = 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим за s_n результат релаксации этого состояния, то есть $s_n = \gamma_n^\circ$. Нашей основной мотивацией является описание s_n (Рис. 1).

Определим функцию $\bar{s}_n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\bar{s}_n(x) = s_n([n^{1/2}x]),$$

где $[x]$ означает ближайшую целую точку решётки. Если ближайших точек несколько, можно выбрать любую из них, и, поскольку множество

$$\{x \mid n^{1/2}x \text{ имеет несколько ближайших точек решётки}\}$$

имеет меру 0 на плоскости \mathbb{R}^2 , то наш выбор не повлияет на слабую сходимость, о которой далее пойдёт речь.*

Известно, что у \bar{s}_n есть предел в $*$ -слабой топологии. Первые экспериментальные результаты про этот предел были получены в [12].

План статьи. Наша работа посвящена изучению паттернов на Рис. 1. В следующей секции мы обсудим известные результаты [9, 13, 10] для аналогичной картинки на регулярном графе степени 4 на \mathbb{Z}^2 . Мы переносим методы этих статей на наш случай. Мы определяем множество конусов Γ_8 , которое предположительно кодирует устройство паттернов, изучаем его экспериментально и теоретически. В конце статьи мы приводим гипотезы о устройстве Γ_8 , которые мы наблюдаем на экспериментальных данных.

На Рис. 2 приведены области, замощённые повторяющимися паттернами, для каждой области — свой паттерн (детали ниже). Каждой области соответствует вершина конуса в Рис. 6 и паттерны для некоторых вершин указаны в Таблице 13.

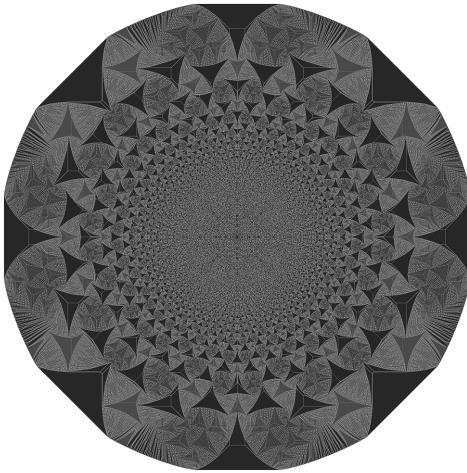


Рис. 1: Результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат. Оттенок серого отражает количество песка в вершине. Белому и чёрному цвету сопоставлено 0 и 7 песчинок соответственно.

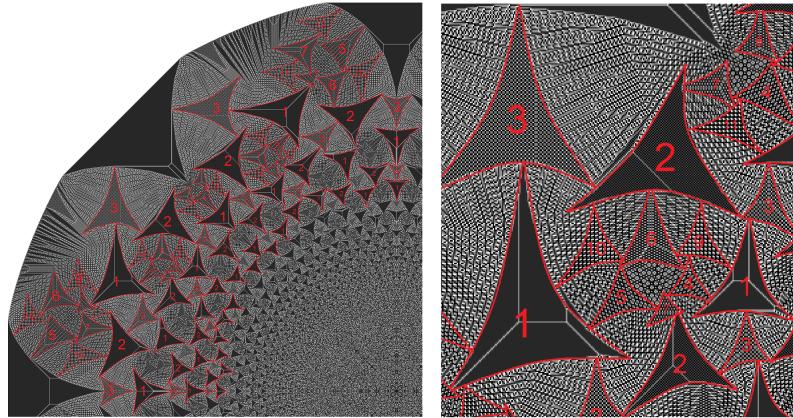


Рис. 2: Результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат на G_8 с отмеченными областями с паттернами из Таблицы 13.

2. Существующие результаты для стандартной решётки \mathbb{Z}^2

В статьях [9, 13, 10] рассматривается граф $G_4 = (\mathbb{Z}^2, E)$, вершины $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ в нём соединены ребром тогда и только тогда, когда $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$.

Теорема 1. [13] *В обозначениях предыдущей главы \bar{s}_n сходится слабо* к некоторой $s_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, выполняются следующие условия: носитель s_∞ лежит внутри некоторого круга, $\int_{\mathbb{R}^2} s_\infty dx = 1$, $0 \leq s_\infty \leq 3$.*

Мы наблюдаем, что аналогичный результат верен для графа G_8 и строго докажем это в другой статье (доказательство параллельно изложенному в [13]). В этой статье мы сосредоточимся на других аспектах задачи: частично опишем фрактальную структуру предела.

Предел s_∞ для G_4 имеет фрактальную структуру, которая была хорошо описана. Для этого рассматривалось множество Γ_4 стабилизируемых вещественных симметричных матриц размера 2×2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Матрица A называется стабилизируемой, если существует целозначная функция $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ такая, что*

$$u(x) \geq \frac{1}{2}x^t Ax, \quad \Delta u(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2,$$

где Δ — дискретный лапласиан функции u на графе G_4 .

Если задавать симметричные матрицы 2×2 тремя параметрами следующим образом:

$$M_4(a, b, c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix},$$

то множество $\Gamma'_4 = \{(a, b, c) \mid M_4(a, b, c) \in \Gamma_4\}$ является объединением замкнутых конусов над ковром Аполлония, см. Рис. 3.

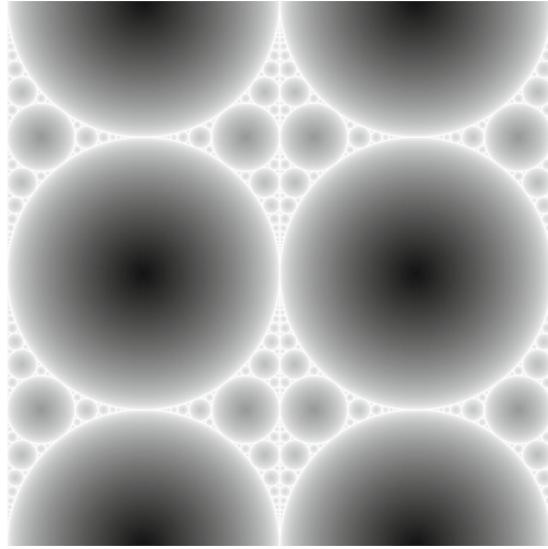


Рис. 3: Граница множества Γ'_4 . Оттенок серого в точке $(a, b) \in [0, 4] \times [0, 4]$ отражает наибольшее $c \in [2, 3]$ такое, что $(a, b, c) \in \Gamma'_4$. Белый и чёрный цвет соответствуют значениям $c = 2$ и $c = 3$ соответственно.

Обозначим за P_4 множество троек чисел (a, b, c) , соответствующих пикам конусов. Каждой тройке $(a, b, c) \in P_4$ соответствует область предела s_∞ , и на этой области предел s_∞ будет выглядеть как периодичный паттерн, определяемый функцией вида $\Delta[\frac{1}{2}x^t M_4(a, b, c)x + b_{(a,b,c)}x]$, где $b_{(a,b,c)}$ — некоторая линейная функция.

Классификация паттернов на G_4 позволяет описать структуру единицы песочной группы на подходящих эллипсах [11]. При этом граница носителя s_∞ до сих пор никак не описана, но есть оценки для похожих песочных моделей [2, 1]. Интересна связь песочных моделей с гармоническими функциями со значениями в окружности [15, 8], а также с тропическими кривыми [5, 7, 6].

3. Множество Γ_8 и его граница для регулярного графа G_8

В дальнейшем мы рассматриваем только граф G_8 .

Матрицы размера 2×2 мы параметризуем иначе:

$$M_8(a, b, c) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}.$$

Константа $1/6$ выбрана таким образом, чтобы получить удобную формулировку Теоремы 2.

Мы построим аналогичное множество Γ_8 стабилизируемых матриц и предъявим аналогичные гипотезы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Будем называть матрицу A стабилизируемой, если существует функция $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ такая, что*

$$u(x) \geq \frac{1}{2}x^t Ax, \quad \Delta u(x) \leq 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Здесь и далее под Δ подразумевается Δ_{G_8} , определённый в Разделе 1.

Пусть Γ_8 — множество вещественных симметричных стабилизируемых матриц 2×2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Пусть $q: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, тогда за $\lceil q \rceil$ будем обозначать функцию на \mathbb{Z}^2 , определённую следующим образом*

$$\lceil q \rceil(x_1, x_2) = \lceil q(x_1, x_2) \rceil,$$

где $\lceil \rceil$ — это окружление до целого числа вверх.

ЛЕММА 1. *$A \in \Gamma_8$ тогда и только тогда, когда состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ стабилизируемо, где*

$$q_A(x) = \frac{1}{2}x^t Ax.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \Gamma_8$, тогда существует u , удовлетворяющая Определению 5. Подставим в Предложение 1 $\eta = \Delta \lceil q_A \rceil$, $w = u - \lceil q_A \rceil$, и сразу получим, что η стабилизируемое состояние.

Пусть состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ стабилизируемо, пусть v — его одометр. Тогда функция $u = v + \lceil q_A \rceil$ подходит под условие Определения 5, а значит $A \in \Gamma_8$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Рассмотрим порядок на матрицах: $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $x^t Ax \leq x^t Bx$ для любого x .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $B \in \Gamma_8$ и $A \leq B$, то $A \in \Gamma_8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $B \in \Gamma$, значит состояние $\Delta \lceil q_B \rceil$ стабилизируемо, то есть существует $u: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такая, что $0 \leq \Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u < 8$. Но

$$\Delta \lceil q_B \rceil + \Delta u = \Delta(\lceil q_B \rceil + u) = \Delta \lceil q_A \rceil + \Delta(u + \lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil),$$

при этом $\lceil q_B \rceil - \lceil q_A \rceil \geq 0$, так как $B \geq A$, а значит состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ релаксируемо по Предложению 1. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Определим множество $\Gamma'_8 = \{(a, b, c) \mid M_8(a, b, c) \in \Gamma_8\} \subset \mathbb{R}^3$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $(a, b, c) \in \Gamma'_8$, то для любых $\phi \in [0, 2\pi]$, $r > 0$ выполнено $(a + r \cos(\phi), b + r \sin(\phi), c - r) \in \Gamma'_8$, а также $(a, b, c - r) \in \Gamma'_8$.*

Первое условие говорит о том, что если (a, b, c) лежит в Γ'_8 , то в Γ'_8 лежит и граница конуса с вертикальной осью, углом $\pi/2$ и вершиной (a, b, c) . Второе условие гарантирует то, что вместе с точкой (a, b, c) лежит не только граница, но и весь конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала вспомним результат Предложения 2, так что достаточно доказать, что для всякого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ верно

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a+r \cos(\phi) & b+r \sin(\phi) \\ b+r \sin(\phi) & c-r-a-r \cos(\phi) \end{pmatrix} x,$$

это равносильно

$$x_1^2(r - r \cos(\phi)) - 2x_1x_2(r \sin(\phi)) + x_2^2(r + r \cos(\phi)) \geq 0.$$

Заметить, что

$$\begin{aligned} & \left(x_1 \sqrt{1 - \cos(\phi)} \pm x_2 \sqrt{1 + \cos(\phi)} \right)^2 = \\ & x_1^2(1 - \cos(\phi)) \pm 2x_1x_2|\sin(\phi)| + x_2^2(1 + \cos(\phi)), \end{aligned}$$

а значит мы получили нужное неравенство.

Разберёмся со вторым утверждением, для него нам необходимо показать

$$x^t \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix} x \geq x^t \begin{pmatrix} c-r+a & b \\ b & c-r-a \end{pmatrix} x,$$

а это равносильно условию

$$x_1^2r + x_2^2r \geq 0.$$

□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Граница множества Γ'_8 непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что $\partial\Gamma'_8$ непусто. Это так, поскольку $(0, 0, 0) \in \Gamma'_8$, $(0, 0, 60) \notin \Gamma'_8$.

Пусть $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$. Докажем, что множество

$$V_{(a_0, b_0, c_0)} = \{(a, b, c) \mid c > c_0, (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 < (c - c_0)^2\}$$

не пересекается с Γ'_8 . Множество $V_{(a_0, b_0, c_0)}$ — это открытый конус с углом $\pi/2$, направленный вверх по оси z , с вершиной (a_0, b_0, c_0) . Пусть это не так и существует $(x, y, z) \in V_{(a_0, b_0, c_0)} \cap \Gamma'_8$. Тогда, по Предложению 3, во множестве Γ'_8 целиком лежит конус

$$\Lambda_{(x, y, z)} = \{(a, b, c) \mid c < z, (a - x)^2 + (b - y)^2 \leq (c - z)^2\}.$$

Но из $(x, y, z) \in V_{(a_0, b_0, c_0)}$ следует, что $(a_0, b_0, c_0) \in \text{int } \Gamma'_8$. В таком случае точка (a_0, b_0, c_0) не могла лежать на границе Γ'_8 , пришли к противоречию.

По аналогичным соображениям из условия $(a_0, b_0, c_0) \in \partial\Gamma'_8$ можно вывести, что открытый конус

$$\Lambda_{(a_0, b_0, c_0)} = \{(a, b, c) \mid c < c_0, (a - a_0)^2 + (b - b_0)^2 < (c - c_0)^2\}$$

принадлежит множеству Γ'_8 .

Из этих двух фактов мы получаем, что для всяких $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ существуют $Z_0, Z_1 \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall z < Z_0 (x, y, z) \in \Gamma'_8, \forall z > Z_1 (x, y, z) \notin \Gamma'_8$. Определим $z_0 = \sup\{z \mid (x, y, z) \in \Gamma'_8\}$. Понятно, что $(x, y, z_0) \in \partial\Gamma'_8$, более того, не существует $z_1 \neq z_0$ такого, что $(x, y, z_1) \in \partial\Gamma'_8$. Пусть существует, пусть, не умаляя общности, $z_0 < z_1$, тогда множеству Γ'_8 принадлежит открытый конус

$$\Lambda_{(x, y, z_1)} = \{(a, b, c) \mid c < z_1, (a - x)^2 + (b - y)^2 < (c - z_1)^2\}.$$

Но $(x, y, z_0) \in \Lambda_{(x, y, z_1)} \subset \text{int } \Gamma'_8$, пришли к противоречию с тем, что $(x, y, z_0) \in \partial \Gamma'_8$.

Таким образом мы показали, что $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ существует единственный $z \in \mathbb{R}$ такой, что $(x, y, z) \in \partial \Gamma'_8$. Также мы поняли, что если $(x, y, z) \in \partial \Gamma'_8$, то $\Lambda_{(x, y, z)} \cap \partial \Gamma'_8 = \emptyset$ и $V_{(x, y, z)} \cap \partial \Gamma'_8 = \emptyset$, где $\Lambda_{(x, y, z)}$ и $V_{(x, y, z)}$ — открытые конусы с вершиной (x, y, z) , направленные вниз и вверх по оси z соответственно.

Из этого следует, что граница множества Γ'_8 непрерывна. \square

Значит, для определения его границы достаточно проверять на принадлежность множеству Γ'_8 только тройки рациональных чисел. Или, что равносильно, для определения структуры множества Γ_8 достаточно проверять на принадлежность ему лишь рациональных матриц.

Алгоритм для определения принадлежности множеству Γ_8 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем называть функцию s на \mathbb{Z}^2 n -периодической, если $s(x+y) = s(x)$ для всяких $x \in \mathbb{Z}^2, y \in n\mathbb{Z}^2$.

ЛЕММА 2. Если коэффициенты A лежат в $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ для $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то состояние $\Delta \lceil q_A \rceil$ 2n-периодическое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in 2n\mathbb{Z}^2$, тогда $Ay \in 2\mathbb{Z}^2$, так что

$$q_A(x+y) - q_A(x) = \left(x^t + \frac{1}{2}y^t \right) Ay \in \mathbb{Z}.$$

Из этого следует, что функция $\lceil q_A \rceil - q_A$ будет 2n-периодической. Теперь запишем

$$\Delta \lceil q_A \rceil = \Delta(\lceil q_A \rceil - q_A) + \Delta q_A.$$

Теперь 2n-периодичность $\Delta \lceil q_A \rceil$ следует из 2n-периодичности $\Delta(\lceil q_A \rceil - q_A)$ и того, что Δq_A — константа (это же лапласиан, хоть и дискретный, квадратичной функции). \square

ЛЕММА 3. Пусть $u, v: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, определим функцию $w(x) = \min\{u(x), v(x)\}$. Если для некоторого x имеем $w(x) = u(x)$, то $\Delta w(x) \leq \Delta u(x)$.

Аналогично, минимум из счтного множества дискретных супергармонических функций (если он поточечно существует) — тоже супергармоническая функция.

ЛЕММА 4. n -периодическое состояние $\eta: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ стабилизируемо тогда и только тогда, когда оно стабилизируемо на торе $T_n = \mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η стабилизируемо на торе T_n с одометром \bar{v} , продолжим \bar{v} до n -периодической функции v на \mathbb{Z}^2 естественным образом. Легко видеть, что тогда $\eta + \Delta v \leq 7$, а значит η стабилизируемо на \mathbb{Z}^2 по Предложению 1.

Теперь пусть η стабилизируемо на \mathbb{Z}^2 с одометром $w: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Определим функцию $\bar{w}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ следующим образом

$$\bar{w}(x) = \min\{w(x+y) \mid y \in n\mathbb{Z}^2\}.$$

Функция \bar{w} будет n -периодической, а также будет удовлетворять условию $\eta + \Delta \bar{w} \leq 7$, это следует из предыдущей леммы. Обозначим \hat{w} спуск функции \bar{w} на T_n , \hat{w} удовлетворяет $\eta + \Delta_{T_n} \hat{w} \leq 7$. Следовательно, по Предложению 1, состояние η будет стабилизируемо на торе T_n . \square

Теперь мы знаем, что для того, чтобы посмотреть на структуру множества Γ_8 , можно определять принадлежность ему только рациональных матриц. А это, как мы показали выше, алгоритмизуемая задача, так что мы написали программу, которая с некоторой точностью вычислила границу Γ_8 , проверяя для рациональных a, b, c релаксируемость соответствующего состояния на торе.

4. Периодичность Γ_8 , оценка на среднее количество песка для стабилизируемых матриц

Теорема 2. Пусть $A = M_8(a, b, c)$, тогда среднее количество песка в состоянии $\Delta \lceil q_A \rceil$ равно c .

Доказательство. Для доказательства мы будем считать среднее количества песка в подграфе на вершинах $V_n = [-n, n] \times [-n, n]$ и устремим n к бесконечности.

Обозначим общее количество песка на V_n за S_n .

$$S_n = \sum_{x \in V_n} \Delta \lceil q_A \rceil (x) = \sum_{x \in V_n} \left(\sum_{y \sim x} \lceil q_A \rceil (y) - 8 \lceil q_A \rceil (x) \right).$$

Видно, что в этой сумме почти все члены сокращаются, остаются только значения около границы множества V_n . Для краткости обозначим $f(a, b) = \lceil q_A \rceil (a, b)$. Таким образом

$$\begin{aligned} S_n = 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} & (f(-n-1, t) + f(n+1, t) + f(t, -n-1) + f(t, n+1)) + \\ & + 2(f(-n-1, n) + f(-n, n+1) + f(n, n+1) + f(n+1, n) + \\ & + f(n+1, -n) + f(n, -n-1) + f(-n, -n-1) + f(-n-1, -n)) + \\ & + (f(-n-1, -n-1) + f(-n-1, n+1) + f(n+1, -n-1) + f(n+1, n+1)) - \\ & - 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} (f(t, n) + f(t, -n) + f(n, t) + f(-n, t)) - \\ & - 5(f(n, n) + f(-n, n) + f(n, -n) + f(-n, -n)). \end{aligned}$$

Вспомним, что нас интересует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(2n+1)^2}$. Для начала отметим, что в выражении для S_n лишь линейное по n количество членов, так что мы можем функцию $\lceil q_A \rceil$ заменить на q_A , предел не поменяется.

Также отметим, что $q_A(a, b)$ отличается от $q_A(a \pm 1, b \pm 1)$ лишь на линейный член по n . Так что если мы из всех членов в выражении для S_n , не находящихся под знаками суммирования, уберём ± 1 , то предел опять же не изменится. И в таком случае произойдёт много сокращений.

После этих умозаключений нас уже интересует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2n+1)^2}$, где

$$\begin{aligned} S'_n = 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} & (q_A(-n-1, t) + q_A(n+1, t) + q_A(t, -n-1) + q_A(t, n+1) - \\ & - q_A(t, n) - q_A(t, -n) - q_A(n, t) - q_A(-n, t)). \end{aligned}$$

Осталось наконец воспользоваться тем, как определено q_A .

$$\begin{aligned} q_A(-n-1, t) - q_A(-n, t) &= \frac{1}{12} ((c+a)(-n-1)^2 + 2b(-n-1)t + (c-a)t^2) - \\ & - \frac{1}{12} ((c+a)(-n)^2 + 2b(-n)t + (c-a)t^2) = \frac{1}{12} ((c+a)(2n+1) - 2bt), \\ q_A(n+1, t) - q_A(n, t) &= \frac{1}{12} ((c+a)(2n+1) + 2bt), \\ q_A(t, -n-1) - q_A(t, -n) &= \frac{1}{12} ((c-a)(2n+1) - 2bt), \\ q_A(t, n+1) - q_A(t, n) &= \frac{1}{12} ((c-a)(2n+1) + 2bt). \end{aligned}$$

Теперь собираем это всё вместе и получаем

$$S'_n = 3 \sum_{t \in [-n+1, n-1]} \frac{1}{6} \left((c+a)(2n+1) + (c-a)(2n+1) \right) = c(2n-1)(2n+1).$$

Следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2n+1)^2} = c$. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{Q}$.*

Если $c > 7$, то $M_8(a, b, c) \notin \Gamma_8$.

Если $c < 4$, то $M_8(a, b, c) \in \Gamma_8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Лемме 1 мы знаем, что нам надо проверить стабилизируемость состояния $\lceil q_A \rceil$. При этом, так как $A = M_8(a, b, c)$, и эти коэффициенты рациональные, то мы можем рассматривать стабилизируемость не на всём множестве \mathbb{Z}^2 , а только на торе подходящего размера. А это уже состояние на конечном графе со средним числом песчинок c и степенью всех вершин 8.

Теперь первое утверждение совсем тривиально (при релаксации на торе общее число песка не меняется, значит, всегда будут вершины с более чем семью песчинками), необходимо разобраться со вторым. И он верен, так как если в состоянии на конечном связном графе песчинок меньше, чем рёбер, то это состояние стабилизируемо. Этот факт доказан в диссертации [14]. \square

Гипотеза. *Результаты компьютерных вычислений указывают на более сильное свойство: если $c > 6$, то $M_8(a, b, c) \notin \Gamma_8$.*

ЛЕММА 5. $\Delta x^2 = \Delta y^2 = 6$, $\Delta xy = \Delta x = \Delta y = \Delta 1 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $A = M_8(a, b, c)$, $A' = M_8(a + 12k_1, b + 6k_2, c)$. Тогда $\Delta \lceil q_A \rceil = \Delta \lceil q_{A'} \rceil$.

Таким образом, для вычисления Γ_8 достаточно будет рассматривать лишь матрицы с $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 6]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \Delta \lceil q_{A'} \rceil &= \Delta \left[\frac{1}{12} \left((c+a+12k_1)x^2 + 2(b+6k_2)xy + (c-a-12k_1)y^2 \right) \right] = \\ &= \Delta \left[\frac{1}{12} \left((c+a)x^2 + 2bxy + (c-a)y^2 \right) + \left(k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) \right] = \\ &= \Delta \left(\left[\frac{1}{12} \left((c+a)x^2 + 2bxy + (c-a)y^2 \right) \right] + \left(k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) \right) = \\ &= \Delta \lceil q_A \rceil + \Delta \left(k_1x^2 + k_2xy - k_1y^2 \right) = \Delta \lceil q_A \rceil + 6k_1 + 0 \cdot k_2 - 6k_1 = \Delta \lceil q_A \rceil. \end{aligned}$$

\square

5. Примеры паттернов, соответствующих видимым вершинам ко- нусов в Γ_8

Мы провели следующие вычисления на компьютере: взяли все пары рациональных чисел $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 6]$ со знаменателем 256, и для каждой такой пары посчитали $\sup \{c \mid M_8(a, b, c) \in \Gamma_8\}$ с точностью до $1/256$. После этого, пользуясь периодичностью, эти данные продолжили на квадрат $[0, 12] \times [0, 12]$ по Предложению 5. Таким образом мы получили результат, отражённый на Рис. 4.

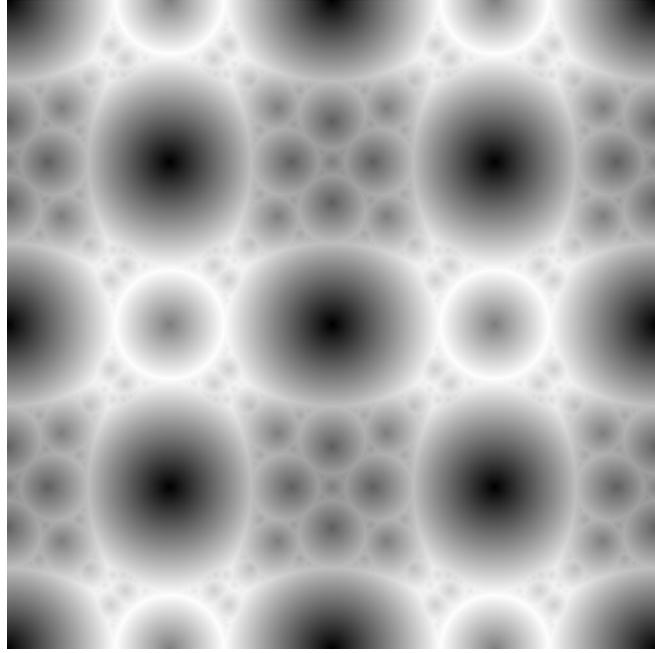


Рис. 4: Граница множества Γ'_8 . Оттенок серого в точке $(a, b) \in [0, 12] \times [0, 12]$ отражает наибольшее $c \in [4, 6]$ такое, что $(a, b, c) \in \Gamma'_8$. Белый и чёрный цвет соответствуют значениям $c = 4$ и $c = 6$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если $c > 6 + \frac{1}{128}$, то для всяких $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $(a, b, c) \notin \Gamma'_8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведённые вычисления показали, что для любых $n, m \in \mathbb{Z}$ выполнено $(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, 6 + \frac{1}{256}) \notin \Gamma'_8$.

Допустим, что существует тройка (a, b, c) такая, что $c > 6 + \frac{1}{128}$ и $(a, b, c) \in \Gamma'_8$. Возьмём $n = [256 \cdot a]$, $m = [256 \cdot b]$. Обозначим $D = \text{dist}((a, b), (\frac{n}{256}, \frac{m}{256}))$. Оценим D сверху:

$$D \leq \left|a - \frac{n}{256}\right| + \left|b - \frac{m}{256}\right| = \frac{1}{256} (|256 \cdot a - n| + |256 \cdot b - m|) \leq \frac{1}{256}.$$

По Предложению 3 из $(a, b, c) \in \Gamma'_8$ следует, что $(\frac{n}{256}, \frac{m}{256}, c - D) \in \Gamma'_8$. При этом $c - D > 6 + \frac{1}{256}$, пришли к противоречию с имеющимися результатами вычислений. \square

В ситуации с G_4 большую роль играли локальные максимумы на аналогичной картинке, они отвечали некоторым паттернам на областях в искомом пределе.

Также компьютер вычислил результат релаксации состояния, в котором в начале координат находится 10^7 песчинок, а в остальных вершинах песчинок нет, результат отражён на Рис. 1.

Из вычислений мы видим, какие тройки (a, b, c) будут точками локального максимума (относительно c), а также какой паттерн будет им соответствовать.

Далее для обозначения вершины с 0 песчинок будем использовать \square , для 1 — \blacksquare , для 2 — \boxtimes , для 3 — \boxdot , для 4 — \boxplus , для 5 — \boxminus , для 6 — \boxwedge , для 7 — \blacksquare .

Составим таблицу из вершин и соответствующим им паттернам, см. Рис 13.

Теперь в этих паттернах отметим границу, то есть путь по вершинам с 6 или 7 песчинками. Такие пути разделяют область на повторяющиеся паттерны.

номера вершин из таблицы выше	паттерн с отмеченной границей
4, 5	
6, 7	
8	
9, 10, 11, 12	
13, 14, 15, 16	

Рис. 5: Таблица 1

Мы взяли результат релаксации состояния с 10^7 песчинок в начале координат и отметили на нём области с паттернами из Таблицы 13, результат отражён на Рис. 2.

Заметим, что паттерны 13, 14, 15, 16 отличаются поворотом и зеркальной симметрией, аналогичным свойством обладают паттерны 9, 10, 11, 12. Рис. 6 даёт этому некоторое объяснение. Совпадают пары паттернов 4, 5 и 6, 7 (но разнятся между собой, хотя можно было бы предположить, что из симметрии Рис. 6 они должны совпадать).

6. Гипотезы, основанные на экспериментальных фактах

По имеющемуся приближению множества Γ'_8 мы построили трёхмерную модель этого множества. И это дало ощутимый толчок в постановке гипотез о фрактальной структуре этого множества. Эта модель, вместе с номерами конусов, соответствующими таблице выше, приведена на Рис. 6.

Ранее мы показали, что вместе с точкой (a, b, c) множество Γ'_8 будет содержать и целый конус с вершиной в этой точке. Первое и одно из самых важных предположений (оно подтверж-

ждается компьютерными вычислениями, а также было строго доказано для G_4) — множество Γ'_8 является объединением счётного числа конусов, и вершины этих конусов имеют некоторую фрактальную структуру, которую мы стремимся описать.

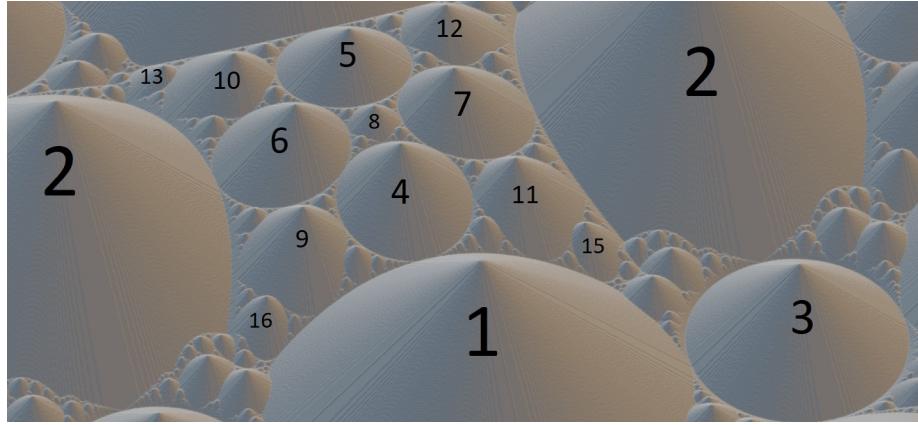


Рис. 6: 3d-модель множества Γ'_8 , номера соответствуют Таблице 13. Угол при вершинах всех конусов равен прямому, конус является поверхностью вращения вокруг вертикальной прямой. На изображении углы в вершинах конусов кажутся больше прямого, потому что мы смотрим "сверху".

По Рис. 4 и Рис. 6 видно, что «граница» конусов 4, 5, 6, 7 очень похожа на эллипс. В предположении, что это эллипс, мы сможем написать его уравнение. Сделаем это для конуса №7.

Гипотеза (Граница конуса №7).

Предположим, что граница конуса №7 — эллипс, полученный при пересечении конуса с вершиной (6.75, 3, 5.25) и какой-то гиперплоскости. Мы можем понять, что это за гиперплоскость, поскольку мы можем точно посчитать пересечения конусов 7 и 8 (зная координаты их вершин и то, что угол при вершине конуса прямой), а также конусов 7 и 2, это точки (6.25, 3, 4.75) и (7.5, 3, 4, 5) соответственно. А эти две точки проходят через гиперплоскость $x = 30 - 5z$. Возникает предположение, что в уравнение гиперплоскости не входит y .

Таким образом искомый эллипс — это пересечение конуса и гиперплоскости, то есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} (z - 5.25)^2 = (x - 6.75)^2 + (y - 3)^2 \\ x = 30 - 5z \end{cases}$$

Этот эллипс мы отметили на Рис. 7.

Аналогичным образом можно получить уравнение на границу конусов 4, 5, 6, мы ими в дальнейшем будем пользоваться, но выписывать не будем, иначе это будет слишком громоздко.

Теперь обратим внимание на область между конусами 5, 7, 8. Крупнее и с дополнительными обозначениями она изображена на Рис. 8.

На Рис. 8 уже отчётливо видна последовательность конусов, сходящихся к точке пересечения конусов 7 и 8 (точнее, к точке пересечения их границ-эллипсов), а именно к $(45/7, 24/7, 33/7)$. Опишем, что это за последовательность. Первое предположение — все вершины конусов из этой последовательности лежат в гиперплоскости $x - 3 = y$.

Следующее предположение вытекает из некоторого построения. В оригинальных статьях (про G_4) вершинам (a, b, c) сопоставлялись окружности на плоскости с центром (a, b) и радиусом $c - 2$, таким образом и получался ковёр Аполлония. Мы будем сопоставлять нашим

вершинам (a, b, c) окружности с центром (a, b) и радиусом $c - 4$. Иначе говоря, посмотрим на пересечение конусов с плоскостью $c = 4$.

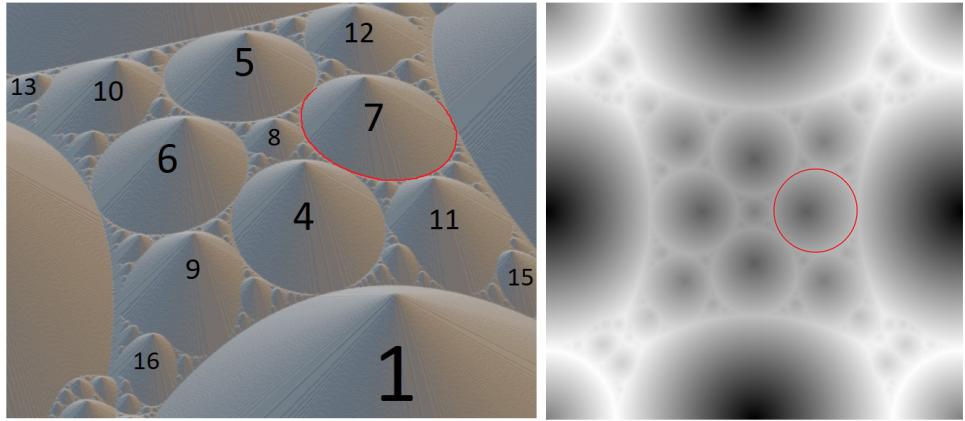


Рис. 7: Области из Рис. 6 и Рис. 4 с отмеченным эллипсом — границей конуса №7

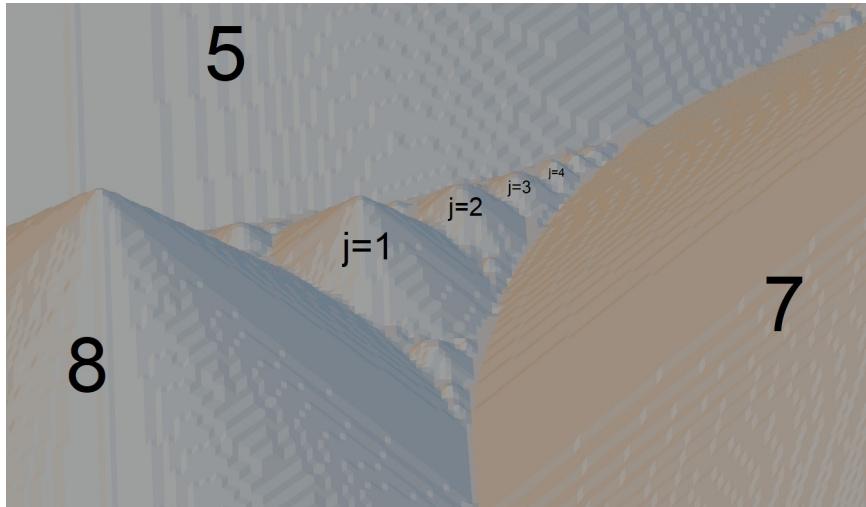


Рис. 8: Область между конусами 5, 7, 8

На Рисунке 9 изображены такие окружности для всех конусов из Таблицы 13, а также окружности для некоторых конусов, находящихся между конусами номер 1, 2, 3, 12. На рисунке отмечены точки A, B, C, D , их координаты равны $(6, 4), (7, 3), (6, 2), (5, 3)$ соответственно. Окружности, соответствующие конусам №1 имеют чёрный цвет и проходят через точки A, C . Окружности, соответствующие конусам №2 — синий цвет и проходят через B, D . Окружности, соответствующие конусам №3 — фиолетовый цвет, они находятся в углах первой области. Окружности для №4, №5 — оранжевый цвет, проходят через B, D . Окружности для №6, №7 — зелёный цвет, проходят через A, C . Окружность для №8 проходит через все четыре точки. Окружности для №9, №10, №11, №12 — красный цвет, проходят через пары точек $(C, D), (A, D), (C, B), (A, B)$ соответственно. Окружности для №13, №14, №15, №16 имеют светло-зелёный цвет.

Обозначим за $C_{(x,y)}(r)$ окружность с центром (x, y) и радиусом r . Пусть $E_5 = C_{(6,3.75)}(1.25)$, $E_7 = C_{(6.75,3)}(1.25)$, $E_8 = C_{(6,3)}(1)$ — это окружности, сопоставленные вершинам конусов 5, 7, 8.

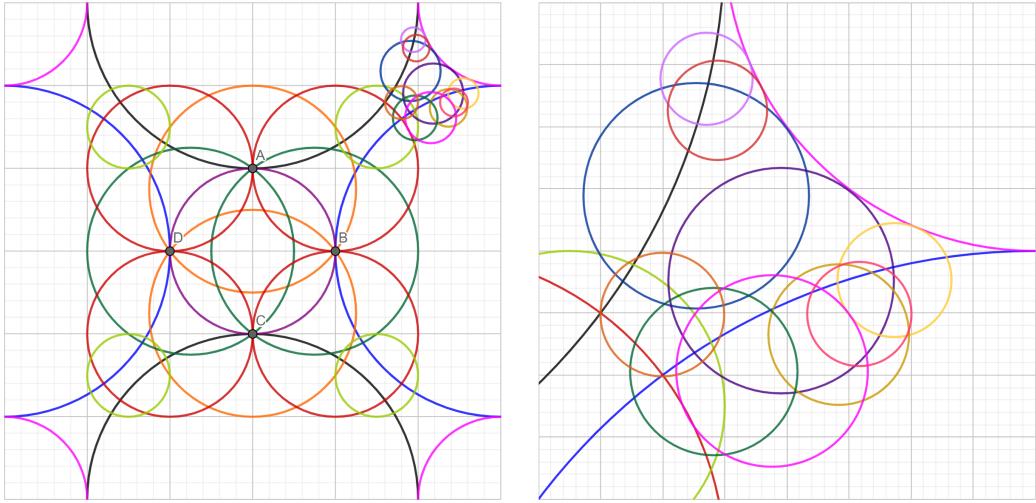


Рис. 9: Окружности, получаемые пересечением некоторых конусов плоскостью $c = 4$, на областях $[3, 9] \times [0, 6]$ и $[7.4, 9] \times [4.2, 5.8]$ соответственно.

Гипотеза. Пусть искомая последовательность вершин конусов — это $\{(a_j, b_j, c_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$. Можно считать, что $(a_0, b_0, c_0) = (6, 3, 5)$, это вершина конуса 8.

Пока что мы предположили, что $a_j - 3 = b_j$, и что $(a_j, b_j, c_j) \rightarrow (a_\infty, b_\infty, c_\infty) = (45/7, 24/7, 33/7)$. Теперь обозначим $P_j = C_{(a_j, b_j)}(c_j - 4)$, $P_\infty = C_{(a_\infty, b_\infty)}(c_\infty - 4)$. Отметим, что $E_8 = P_0$.

Окружности E_5 и E_8 пересекаются в точке $(7, 3)$ (конечно есть еще одна точка пересечения, она скорее относится к фрактальной структуре участка между конусами 5, 6, 10, и сейчас мы ей заниматься не будем). Окружности E_7 и E_8 пересекаются в точке $(6, 4)$. И компьютерные вычисления позволяют нам предположить, что для всякого $j \in \mathbb{N}$ окружности E_5 и P_j пересекаются в точке $(7, 3)$, а окружности E_7 и P_j — в точке $(6, 4)$. На Рис. 10 изображены эти окружности.

Также в поддержку этого предположения выступает то, что окружность P_∞ в некотором смысле оказывается предельной для последовательности $\{P_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Эта окружность тоже проходит через точки $(7, 3)$, $(6, 4)$. Более того, P_∞ касается E_5 и E_7 в этих точках, но это не удивительно, поскольку точка $(a_\infty, b_\infty, c_\infty)$ лежит на границе двух конусов, а значит и касается двух соответствующих окружностей.

Для полного описания этой последовательности нам осталось понять, какие радиусы этих окружностей, либо какие у них центры. Однако нам не удалось получить формулу для радиусов или центров, зависящую от j .

Также интересно себя ведут окружности, соответствующие сходящейся последовательности к пересечению конусов 2 и 7, со стороны конуса 12. На Рис. 11 изображена область множества Γ'_8 между конусами 2, 7, 12. Окружности, соответствующие этим конусам, изображены на Рис. 12.

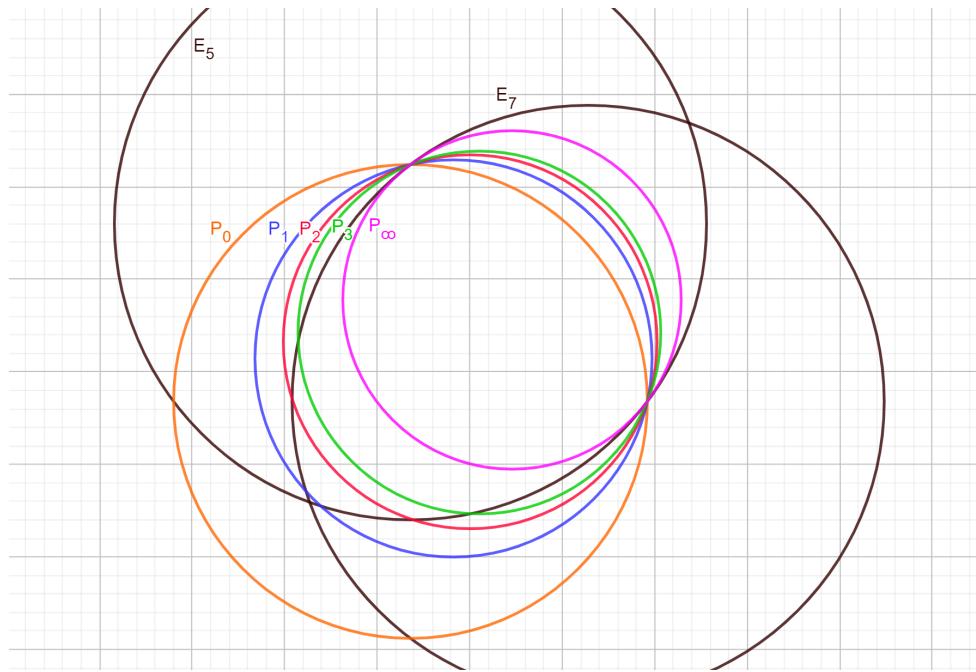


Рис. 10: Окружности, соответствующие конусам из Рис. 8.

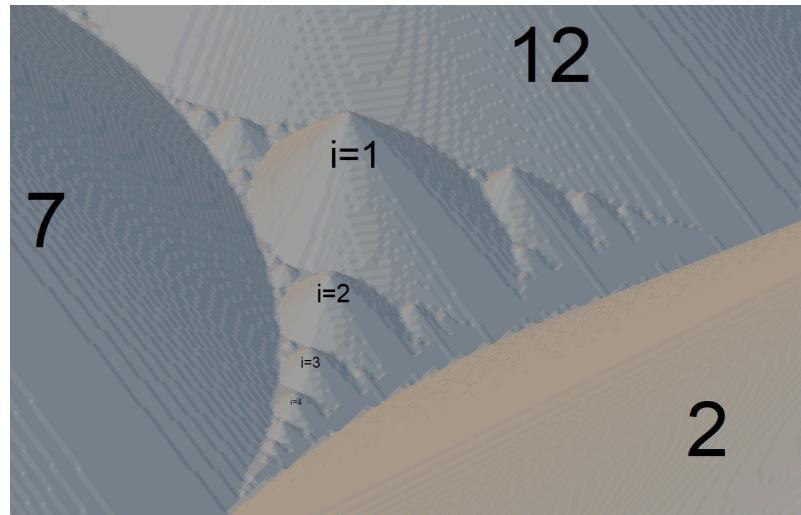


Рис. 11: Область между конусами 2, 7, 12

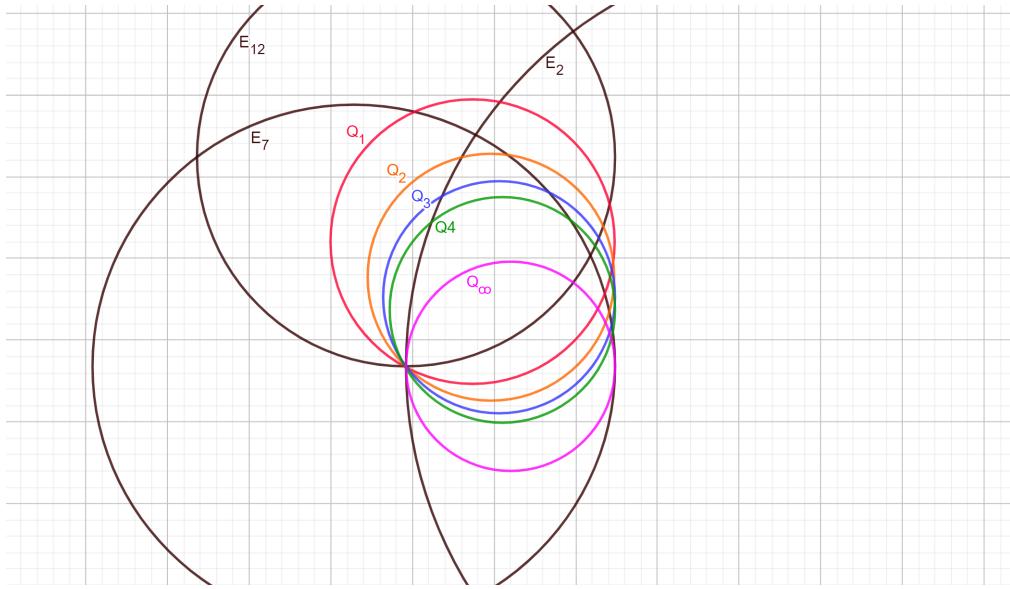


Рис. 12: Окружности, соответствующие конусам из Рис. 11.

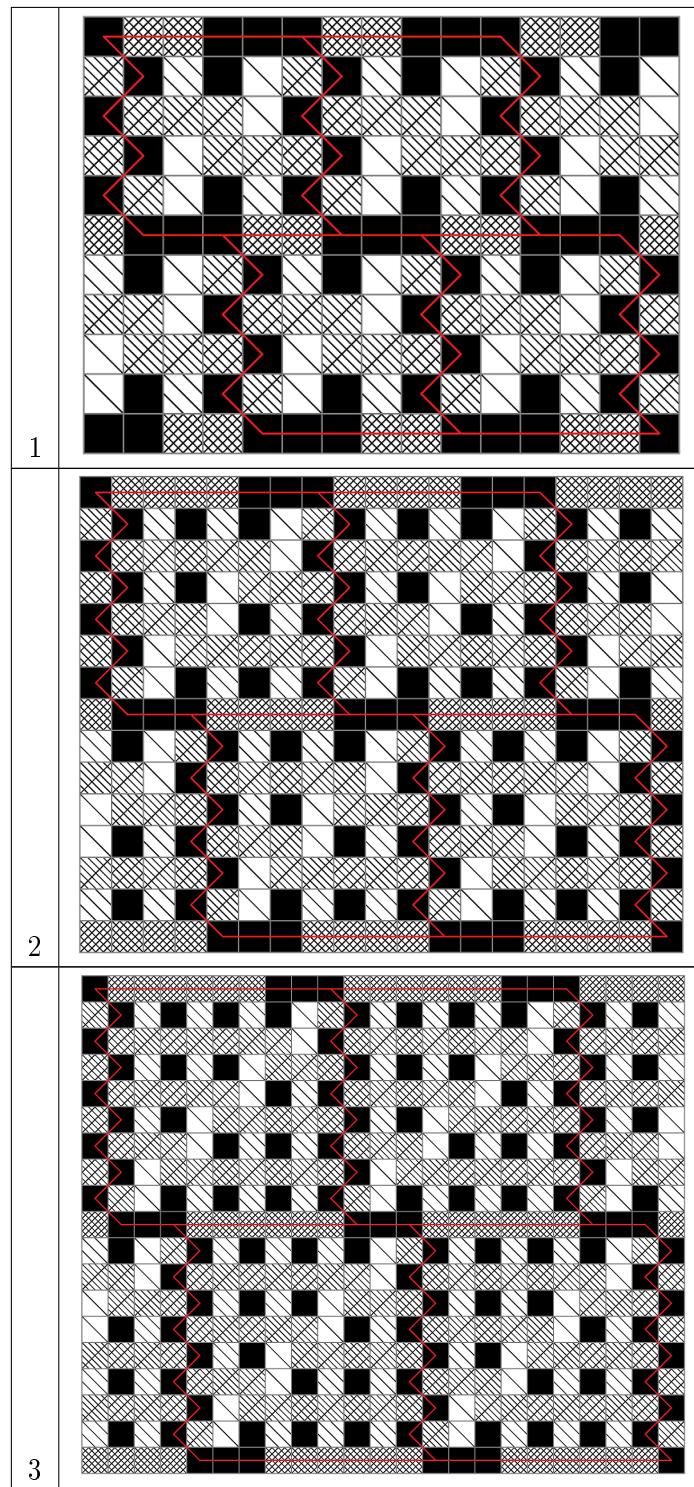
Гипотеза. Последовательность окружностей $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, представленная на Рис. 12, описывается следующим образом: $Q_i = C_{(x_i, y_i)}(r_i)$, где

$$x_i = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2i+3} \right)^2, \quad y_i = 3 + \frac{3}{2i+3}, \quad r_i = 8 - x_i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2i+3} \right)^2 + \frac{1}{2}.$$

При этом окружность, соответствующая конусу 12, совпадает с Q_0 .

Или, другими словами, во множестве Γ'_8 лежит последовательность конусов с вершинами $\{(x_i, y_i, r_i + 4)\}_{i=0}^{\infty}$. Соответствующие некоторым из этих вершин паттерны, вместе с границей, проведённой по вершинам с количеством песчинок 6 или 7, представлены в Таблице 6.

i	паттерн, соответствующий этой вершине
0	



Теперь мы сменим границу на прямоугольную и отметим красным и синим цветом участки на паттерне вершины Q_i , совпадающий с внутренней частью паттерна вершины Q_{i-1} . Соответствующие рисунки отражены в Таблице 6.

i	паттерн, соответствующий этой вершине
1	
2	
3	

№	(a, b, c)	паттерн, или же tile odometer	его расположение
1	$(0, 0, 6),$ $(6, 0, 6)$		
2	$(3, 3, 6),$ $(9, 3, 6)$		
3	$(3, 0, 5),$ $(9, 0, 5)$		
4	$(0, 2.25, 5.25),$ $(6, 2.25, 5.25)$		
5	$(0, 3.75, 5.25),$ $(6, 3.75, 5.25)$		
6	$(5.25, 3, 5.25),$ $(11.25, 3, 5.25)$		
7	$(6.75, 3, 5.25),$ $(0.75, 3, 5.25)$		
8	$(6, 3, 5),$ $(0, 3, 5)$		
9	$(5, 2, 5),$ $(11, 2, 5)$		
10	$(5, 4, 5),$ $(11, 4, 5)$		
11	$(7, 2, 5),$ $(1, 2, 5)$		
12	$(7, 4, 5),$ $(1, 4, 5)$		
13	$(4.5, 4.5, 4.5),$ $(10.5, 4.5, 4.5)$		
14	$(7.5, 4.5, 4.5),$ $(1.5, 4.5, 4.5)$		
15	$(7.5, 1.5, 4.5),$ $(1.5, 1.5, 4.5)$		
16	$(4.5, 1.5, 4.5),$ $(10.5, 1.5, 4.5)$		

Рис. 13: Таблица с паттернами для самых высоких пиков конусов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Alevy and S. Mkrtchyan. The limit shape of the leaky abelian sandpile model // arXiv preprint arXiv:2010.01946, 2020.
2. A. Bou-Rabee. A shape theorem for exploding sandpiles. // arXiv preprint arXiv:2102.04422, 2021.
3. D. Dhar. Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett., 64(14):1613–1616, 1990.
4. A. Fey, L. Levine, and Y. Peres. Growth rates and explosions in sandpiles // J. Stat. Phys., 138(1-3):143–159, 2010.
5. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpiles // Comptes Rendus Mathematique, 354(2):125–130, 2016.
6. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Introduction to tropical series and wave dynamic on them // Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 38(6):2843–2865, 2018.
7. N. Kalinin and M. Shkolnikov. Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions. Communications in Mathematical Physics, 378(3):1649–1675, 2020.
8. M. Lang and M. Shkolnikov. Harmonic dynamics of the abelian sandpile // Proceedings of the National Academy of Sciences, 116(8):2821–2830, 2019.
9. L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. Apollonian structure in the Abelian sandpile // Geom. Funct. Anal., 26(1):306–336, 2016.
10. L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. The Apollonian structure of integer superharmonic matrices // Ann. of Math. (2), 186(1):1–67, 2017.
11. A. Melchionna. The sandpile identity element on an ellipse // arXiv preprint arXiv:2007.05792, 2020.
12. S. Ostojic. Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 318(1):187–199, 2003.
13. W. Pegden and C. K. Smart. Convergence of the Abelian sandpile // Duke Math. J., 162(4):627–642, 2013.
14. D. Rossin. Propriétés combinatoires de certaines familles d’automates cellulaires // PhD thesis, Ph. D. Thesis, École Polytechnique, 2000.
15. K. Schmidt and E. Verbitskiy. Abelian sandpiles and the harmonic model // Communications in Mathematical Physics, 292(3):721–759, 2009.
16. Aliev, A.A., Kalinin, N.S. Convergence of a sandpile on a triangular lattice under rescaling // Matematicheskii Sbornik.- 2023.- vol. 214.- iss. 12.- pp. 3–25.

REFERENCES

1. Alevy, I. & Mkrtchyan, S. 2020, “The limit shape of the leaky abelian sandpile model”, *arXiv preprint arXiv:2010.01946*.

2. Bou-Rabee, A. 2021, “A shape theorem for exploding sandpiles”, *arXiv preprint arXiv:2102.04422*.
3. Dhar, D. 1990, “Self-organized critical state of sandpile automaton models”, *Phys. Rev. Lett.*, 64(14):1613–1616.
4. Fey, A., Levine, L. & Peres, Y. 2010, “Growth rates and explosions in sandpiles”, *J. Stat. Phys.*, 138(1-3):143–159.
5. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2016, “Tropical curves in sandpiles”, *Comptes Rendus Mathématique*, 354(2):125–130.
6. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2018, “Introduction to tropical series and wave dynamic on them”, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 38(6):2843–2865.
7. Kalinin, N. & Shkolnikov, M. 2020, “Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions”, *Communications in Mathematical Physics*, 378(3):1649–1675.
8. Lang, M. & Shkolnikov, M. 2019, “Harmonic dynamics of the abelian sandpile”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(8):2821–2830.
9. Levine, L., Pegden, W. & Smart, C. K. 2016, “Apollonian structure in the Abelian sandpile”, *Geom. Funct. Anal.*, 26(1):306–336.
10. Levine, L., Pegden, W. & Smart, C. K. 2017, “The Apollonian structure of integer superharmonic matrices”, *Ann. of Math.*, (2), 186(1):1–67.
11. Melchionna, A. 2020, “The sandpile identity element on an ellipse”, *arXiv preprint arXiv:2007.05792*.
12. Ostojic, S. 2003, “Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 318(1):187–199.
13. Pegden, W. & Smart, C. K. 2013, “Convergence of the Abelian sandpile”, *Duke Math. J.*, 162(4):627–642.
14. Rossin, D. 2000, “Propriétés combinatoires de certaines familles d’automates cellulaires”, *PhD thesis, Ph. D. Thesis, École Polytechnique*.
15. Schmidt, K. & Verbitskiy, E. 2009, “Abelian sandpiles and the harmonic model”, *Communications in Mathematical Physics*, 292(3):721–759.
16. Aliev, A. A., Kalinin, N. S. 2023, “Convergence of a sandpile on a triangular lattice under rescaling”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 214, iss. 12, pp. 3–25.

Получено: 05.10.2023

Принято в печать: 04.09.2024