

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.325

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-11-36

Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел

И. Аллаков, Б. Х. Эрдонов

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Эрдонов Бекмурод Холбой оглы — базовый докторант, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: bekturod.erdonov@mail.ru

Аннотация

Пусть X — достаточно большое действительное число, b_1, b_2, b_3 — целые числа с условием $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, $a_{ij}, (i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 5})$ — целые положительные числа, $p_1, \dots, p_5$ — простые числа. Положим $B = \max\{3|a_{ij}|\}, (i = 1, 2, 3; j = \overline{1, 5}), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), K = 36\sqrt{3}B^5|\vec{b}|$, $E_{3,5}(X) = \text{card}\{b_i | 1 \leq b_i \leq X, b_i \neq a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5, i = 1, 2, 3\}$. В работе доказано, что система $b_i = a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5, (i = 1, 2, 3)$ разрешимо в простых числах $p_1, \dots, p_5$, для всех троек $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3), 1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, за исключением не более чем $E_{3,5}(X) < X^{3-\varepsilon}$ троек из них, а также получена оценка снизу для $R(\vec{b})$ — количество решений этой системы, то есть доказано справедливости неравенство $R(\vec{b}) \gg K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$, для всех $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них.

Ключевые слова: оценка, положительная разрешимость, конгруэнт разрешимость, постоянная Эйлера, эффективная константа, фиксированное число, простое число, система линейных уравнений, степенная оценка, сравнения.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Аллаков, И., Эрдонов, Б.Х. Об одновременном представлении чисел суммой пяти простых чисел // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 11–36.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 511.325

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-11-36

On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers

I. Allakov, B. Kh. Erdonov

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Erdonov Bekmurod Kholboy ugli — basic doctoral student, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: bekmurod.erdonov@mail.ru

Abstract

Let X —be a sufficiently large real number, b_1, b_2, b_3 —be integers with the condition $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, $a_{ij}, (i = 1, 2, 3; j = \overline{1,5})$ positive integers, $p_1, \dots, p_5$ —prime numbers. Let us set $B = \max\{3|a_{ij}|\}, (i = 1, 2, 3; j = \overline{1,5}), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), K = 36\sqrt{3}B^5|\vec{b}|, E_{3,5}(X) = \text{card}\{b_i | 1 \leq b_i \leq X, b_i \neq a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5, i = 1, 2, 3\}$. In the paper it is proved that the system $b_i = a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5, (i = 1, 2, 3)$ is solvable in prime numbers $p_1, \dots, p_5$, for all triples $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3), 1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, with the exception of no more than $E_{3,5}(X)$ triples of them, and a lower bound is obtained for the $R(\vec{b})$ —number of solutions of this system, that is, the inequality $R(\vec{b}) >> K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$ is proved to be true, for all (b_1, b_2, b_3) with the exception of no more than $X^{3-\varepsilon}$ triples of them.

Keywords: estimate, positive solvability, congruent solvability, Euler's constant, effective constant, fixed number, prime number, system of linear equations, power estimate, comparisons.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Allakov, I., Erdonov, B.Kh. 2024, "On the simultaneous representation of numbers by the sum of five prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 11–36.

1. Введение

Рассмотрим системы линейных уравнений

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m, \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

где $b_1, b_2, \dots, b_s$ —натуральные числа, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ — целые коэффициенты, $p_1, p_2, \dots, p_m$ — простые числа (см. §1, гл. III, [1]). Обозначим через $U_{s,m}(X)$ — множество наборов $(b_1, b_2, \dots, b_s)$, $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, для которых система (1) неразрешима в простых числах, т.е. $U_{s,m}(X) = \{ (b_1, b_2, \dots, b_s), 1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X, b_i \neq a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{im}p_m \}$ и пусть $E_{s,m}(X) = \text{card } U_{s,m}(X)$ — количество элементов в множестве $U_{s,m}(X)$.

При $m \geq 2s + 1$ Wu Fang [2], исследуя системы (1), в некоторых дополнительных условиях, получил асимптотическую формулу для числа решений системы (1).

М. С. Liu и К. М. Tsang [3] рассмотрели, частный случай системы (1) при $s = 2$, $m = 3$ и доказали степенную оценку $E_{2,3}(X) \leq X^{2-\varepsilon}$, где X - достаточно большое действительные число, ε - абсолютная, эффективно вычисляемая, положительная малая постоянная.

И. Аллаков [4] улучшил, а затем в [5] обобщил эти результаты для системы (1) при $s = n$, $m = n + 1$.

Разрешимость системы (1) связана следующими двумя условиями [1, 6]:

а) для любого простого p существуют такие целые числа $l_1, \dots, l_m$ с условиями $1 \leq l_1, \dots, l_m \leq p - 1$, которые удовлетворяют систему линейных сравнений:

$$a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + \dots + a_{im}l_m \equiv b_i \pmod{p}, \quad (i = 1, \dots, s);$$

б) существуют такие действительные положительные числа $y_1, \dots, y_m$ для которых выполняются равенства $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m = b_i$, $(i = 1, \dots, s)$.

Обозначим $W_{s,m}(X)$ - множество векторов $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$, $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_s \leq X$, которые удовлетворяют условиям а) и б).

Далее, И. Аллаков и Б. Х. Абраев [7, 8] изучали системы (1) при $s = 2$ и $m = 4$.

Из выше изложенного следует, что вопрос исследования системы (1) при $s = 3$, $m = 5$ и $s = 3$, $m = 6$ остаётся открытым.

В данной статье рассматриваем именно тот случай, когда $s = 3$, $m = 5$. Полагая $s = 3$, $m = 5$ из (1) получим следующую систему:

$$b_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3 + a_{i4}p_4 + a_{i5}p_5, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Отметим, что работе [9] нами доказано, что если для действительных положительных чисел $y_1, \dots, y_5$ выполняется неравенство

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 + a_{i5}y_5 > 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

тогда справедлива оценка

$$\text{card}W_{3,5}(X) \gg X^3 B^{-28} (\log \log B)^{-1}.$$

Из этой оценки следует, что векторы $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, которые удовлетворяют условиям а) и б) достаточно много.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\Delta_{ijk} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 5, \quad i \neq j \neq k.$$

Обозначим, через $\Delta_{bjk}, \Delta_{ibk}, \Delta_{ijb}$ - определитель, полученный из Δ_{ijk} заменой i, j, k -столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, соответственно. Чтобы избежать тривиальности наложим на коэффициенты следующие условия:

$$\Delta_{123}\Delta_{124}\Delta_{125}\Delta_{134}\Delta_{135}\Delta_{145}\Delta_{234}\Delta_{235}\Delta_{245}\Delta_{345} \neq 0,$$

$$\text{НОД}(\Delta_{123}, \Delta_{124}, \Delta_{125}, \Delta_{134}, \Delta_{135}, \Delta_{145}, \Delta_{234}, \Delta_{235}, \Delta_{245}, \Delta_{345}) = 1. \quad (4)$$

В дальнейшем рассмотрим только те (b_1, b_2, b_3) , которые удовлетворяют этим двум условиям. В настоящей работе доказано:

ТЕОРЕМА. Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое действительное число, тогда:

а) существует положительное постоянное A , такое, что при $X > B^A$ справедлива оценка

$$E_{3,5}(X) < X^{3-\varepsilon};$$

b) пусть $K = 36\sqrt{3}B^5 \left| \vec{b} \right|$ и $R(\vec{b})$ – количество представлений $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ в виде (2), тогда для $R(\vec{b})$ при заданном $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ справедлива оценка $R(\vec{b}) \gg K^{2-\varepsilon}(\log K)^{-5}$, для всех (b_1, b_2, b_3) за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них.

2. Обозначения и идея доказательства теоремы

Пусть a_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = \overline{1,5}$) целые числа удовлетворяющие условию (3), $c_1, c_2, \dots$ – эффективно вычисляемые положительные константы и δ достаточно малое эффективно вычисляемое положительное постоянное. $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел и пусть $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$.

Для любого целого $q \geq 1$ через $\sum_{(q)}$ обозначим суммирование по всем $l_1, \dots, l_5$ удовлетворяющим условиям $1 \leq l_j \leq q$, $(l_j, q) = 1$, $\sum_{j=1}^5 a_{ij}l_j \equiv b_i \pmod{q}$, ($i = 1, 2, 3$) и пусть

$$N(q) = \sum_{(q)} 1. \quad (5)$$

Определим X и N так чтобы выполнялось соотношении

$$X \geq B^{\exp(\delta^{-2})}, \quad N = 108B^5X. \quad (6)$$

Положим:

$$Q := N^\delta, \quad L := NQ^{-1/90}, \quad T = Q^{1/\sqrt{\delta}}. \quad (7)$$

Из (6) следует, что

$$B \leq Q^\delta. \quad (8)$$

Через $\chi \pmod{q}$ и $\chi_0 \pmod{q}$ обозначим произвольный характер Дирихле и главный характер Дирихле по модулю q , соответственно. Известно [10], что существует постоянное c_1 такое, что L – функции $L(s, \chi)$ –могут иметь только один вещественный нуль $\tilde{\beta}$ для одного вещественного примитивного характера $\tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ по модулю $\tilde{r}$ ($\tilde{r} \leq T$), в области $\sigma > 1 - c_1(\log T)^{-1}$, $|t| \leq T$. Если такой нуль $\tilde{\beta}$ существует, то он единственный и такой нуль функции $L(s, \tilde{\chi})$ назовем исключительным нулем $L(s, \chi)$ функции, а $\tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ назовем исключительным характером. Если существует такой нуль, то он удовлетворяет соотношению [11]

$$\frac{c_2}{\tilde{r}^{1/2} \log^2 \tilde{r}} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq \frac{c_1}{\log T}. \quad (9)$$

Пусть

$$\omega = \begin{cases} (1 - \tilde{\beta}) \log T, & \text{если существует исключительный нуль } \tilde{\beta} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для произвольного $y \in \mathbb{R}$ и положительного целого q определим $e(y) = e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) = e\left(\frac{y}{q}\right)$,

$$\begin{cases} S(y) := \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) e(ny), & S_\chi(y) := \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n) \chi(n) e(ny), \\ I(y) := \int_L^N e(xy) dx, & \tilde{I}(y) := \int_L^N x^{\tilde{\beta}-1} e(xy) dx, \\ I_\chi(y) := \int_L^N e(xy) \sum_{|\gamma| \leq T}' x^{\rho-1} dx, \end{cases} \quad (10)$$

где $\sum_{|\gamma| \leq T}'$ — означает, что суммирование ведётся по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ в области $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1 \log^{-1} T$, $|\gamma| \leq T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$) и $\Lambda(n)$ — функция Мангольда. Пусть

$$\tau = N^{-1} T^{1/6}. \quad (11)$$

Для произвольных целых чисел h_1, h_2, h_3, q с условием

$$1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq q \leq Q, \quad (h_1, h_2, h_3, q) = 1 \quad (12)$$

определим куб $m(h_1, h_2, h_3, q)$ равенством

$$m(h_1, h_2, h_3, q) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left| x_i - \frac{h_i}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q}, \quad i = 1, 2, 3 \right\}, \quad (13)$$

а M_1 и M_2 определим равенством

$$M_1 = \cup m(h_1, h_2, h_3, q), \quad M_2 = [\tau, 1 + \tau]^3 \setminus M_1. \quad (14)$$

В равенстве (14) объединение берётся по всем h_1, h_2, h_3, q которые удовлетворяют условию (12).

Нетрудно видеть, что эти трёхмерные кубы $m(h_1, h_2, h_3, q)$ взаимно не пересекаются и лежат в $[\tau, 1 + \tau]^3$.

Для произвольных $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ и $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ положим

$$\bar{x}_b = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad \bar{x}_j = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3, \quad (j = \overline{1, 5}) \quad (15)$$

и

$$I(\vec{b}) = \sum \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_5). \quad (16)$$

Здесь суммирование ведётся по всем n_j , которые удовлетворяют условиям $L < n_1, \dots, n_5 \leq N$ и $\sum_{j=1}^5 a_{ij} n_j = b_i$, $(i = 1, 2, 3)$. В силу (10), (14) и (16) имеем

$$\begin{aligned} I(\vec{b}) &= \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} \int_{\tau}^{\tau+1} e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^5 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \left(\iiint_{M_1} + \iiint_{M_2} \right) e(-\bar{x}_b) \prod_{j=1}^5 S(\bar{x}_j) dx_1 dx_2 dx_3 = I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует, что $I(\vec{b}) > I_1(\vec{b}) - |I_2(\vec{b})|$. Теперь если мы покажем, что $I(\vec{b}) > 0$, то можно будет утверждать система (2) разрешимо в простых числах. Доказательство теоремы следует из следующих двух лемм:

ЛЕММА 2.1. *Для всех троек (b_1, b_2, b_3) , $(1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X)$, за исключением не более чем $X^2 Q^{-1/37}$ троек из них, справедлива оценка $I_2(\vec{b}) < N^2 Q^{-1/9}$.*

ЛЕММА 2.2. *Для всех троек $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ троек из них, справедлива оценка $I_1(\vec{b}) \gg N^2 Q^{-51/466}$.*

Теперь докажем эти леммы.

3. Доказательство леммы 2.1

При $n = 3$ из леммы 3.3.1 работы И. Аллакова [1] имеем: Если $(x_1, x_2, x_3) \in M_2$, то справедлива оценка

$$\min \{S(\bar{x}_1), S(\bar{x}_2), S(\bar{x}_3)\} \ll NB^{1/2} Q^{-1/8} \log^4 N. \quad (18)$$

Прежде всего, согласно определению $S(y)$ в (10) для произвольного $\Delta_{ijk} \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |S(\bar{x}_i)|^2 |S(\bar{x}_j)|^2 |S(\bar{x}_k)|^2 |S(\bar{x}_l)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \sum_{\substack{L < n_1, \dots, n_8 \leq N \\ n_1 = n_2, \dots, n_7 = n_8}} \Lambda(n_1) \dots \Lambda(n_8) \ll (N \log N)^4. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя тождества Парсеваля (см. [12], стр. 152) и оценку (18) имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \sum_{b_2=-\infty}^{\infty} \sum_{b_3=-\infty}^{\infty} |I_2(\vec{b})|^2 \ll \left(N Q^{-\frac{1}{8}} B^{\frac{1}{2}} \log^4 N \right)^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(|S(\bar{x}_1)|^2 |S(\bar{x}_2)|^2 |S(\bar{x}_4)|^2 |S(\bar{x}_5)|^2 + \right. \\ & \quad \left. + |S(\bar{x}_1)|^2 |S(\bar{x}_3)|^2 |S(\bar{x}_4)|^2 |S(\bar{x}_5)|^2 + |S(\bar{x}_2)|^2 |S(\bar{x}_3)|^2 |S(\bar{x}_4)|^2 |S(\bar{x}_5)|^2 \right) dx_1 dx_2 dx_3 \ll \\ & \ll N^6 Q^{-1/4} B \log^{12} N \end{aligned}$$

Таким образом, количество $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ не более чем $(N^6 Q^{-1/4} B \log^{12} N) N^{-4} Q^{2/9} < X^2 Q^{-1/37}$, для которых справедлива оценка $|I_2(\vec{b})| \geq N^2 Q^{-1/9}$. Так как $B \leq Q^\delta$. Таким образом доказана лемма 2.1. $\square$

4. Большие дуги. Упрощение интеграла $I_1(\vec{b})$

Для произвольного характера $\chi(\text{mod } q)$ обозначим

$$C_\chi(m) := \sum_{1 \leq l \leq q} \chi(l) e_q(ml) \quad \text{и} \quad C_q(m) = C_{\chi_0}(m).$$

Очевидно, что $|C_\chi(m)| \leq \varphi(q)$. Если для произвольного $(x_1, x_2, x_3) \in m(h_1, h_2, h_3, q)$ обозначим $x_j = \frac{h_j}{q} + \eta_j$, $(j = 1, 2, 3)$, то в силу (13) справедливо неравенство

$$|\eta_j| < \frac{\tau}{q}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (20)$$

По аналогии (15) обозначим:

$$\begin{cases} \bar{h}_j := a_{1j}h_1 + a_{2j}h_2 + a_{3j}h_3, & \bar{h}_b := b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3, \\ \bar{\eta}_j := a_{1j}\eta_1 + a_{2j}\eta_2 + a_{3j}\eta_3, & \bar{\eta}_b := b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3, \end{cases} \quad (j = \overline{1,5}) \quad (21)$$

тогда $\bar{x}_j = \frac{\bar{h}_j}{q} + \bar{\eta}_j$, $(j = \overline{1,5})$. Используя свойство ортогональности характеров [10, 11], сумму $S(\bar{x}_j)$ определенную в (10) можем представить в следующем виде:

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) S_{\chi}(\bar{\eta}_j) + O(\log^2 N). \quad (22)$$

Далее при $1 \leq j \leq 5$ обозначим

$$\begin{cases} G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := \sum_{\chi \pmod{q}} C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) I_{\chi}(\bar{\eta}_j) & \text{и} \\ H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) := C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) - \delta_q C_{\bar{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) - G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \end{cases} \quad (23)$$

где если $\tilde{r}|q$, то $\delta_q = 1$ и если $\tilde{r} \nmid q$, то $\delta_q = 0$.

Используя лемму 3.1 работы [13], из (22) получим:

$$S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi(q)} \left[H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) + O\left(\varphi(q) N B T^{-5/6} \log^2 N\right) \right],$$

так как, согласно равенствам (21), (11) и (20) имеет место неравенство $|\eta_j| N \leq 3 B T^{1/6} q^{-1}$. Согласно утверждению а) леммы 6.3 работы [3], для $H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$ имеет место тривиальная оценка $\ll N \varphi^2(q)$, которая играет доминирующую роль в остаточном члене “ O ”. Таким образом, для произвольных $(x_1, x_3, x_3) \in m(h_1, h_3, h_3, q)$ справедлива оценка

$$\prod_{j=1}^5 S(\bar{x}_j) = \frac{1}{\varphi^5(q)} \prod_{j=1}^5 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) + O\left(\varphi^4(q) N^5 B T^{-5/6} \log^2 N\right). \quad (24)$$

Обозначим через $\sum_{\bar{h}}'$ сумму, по h_1, h_2, h_3 , удовлетворяющих условию (12). Тогда согласно (17), (14) и (24) имеет место равенства

$$\begin{aligned} I_1(\vec{b}) &= \sum_{q \leq Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \iiint_{\left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]^3} e_q(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^5 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 + \\ &+ O\left(N^2 Q^5 B T^{-\frac{1}{3}} \log^2 N\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что согласно (23) при раскрытии произведения

$$\prod_{j=1}^5 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) = \left(F_1^{(1)} - F_2^{(1)} - F_3^{(1)}\right) \cdots \left(F_1^{(5)} - F_2^{(5)} - F_3^{(5)}\right)$$

появляется 243 слагаемых вида $F = F_1 F_2 F_3 F_4 F_5$, где $F_j^{(k)}$ ($k = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$) равен одному из этих $C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j)$ или $-\delta_q C_{\bar{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j)$ или $C_{\bar{\chi}}(\bar{h}_j) \tilde{I}_{\chi}(\bar{\eta}_j)$.

Далее, расширим пределы интегрирования в (25) от куба $\left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]^3$ до всего пространства $\mathbb{R}^3$. Обозначим $D_1 := \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]^3 \setminus \left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]^3$ и $D_2 := \mathbb{R}^3 \setminus \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]^3$ и оцениваем интегралы по D_1 и D_2 . Покажем, что

$$\iiint_{D_1} Fe(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll N^2 Q^{-4} \quad (26)$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1}$ троек (b_1, b_2, b_3) в рассматриваемом интервале. Также

$$\iiint_{D_2} Fe(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll N^2 Q^{-4} \quad (27)$$

для всех $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$.

Используя эти две оценки из (27) получим лемму.

ЛЕММА 4.1. В рассматриваемом интервале справедливо равенство

$$I_1(\vec{b}) = \sum_{q \leq Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\vec{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \iiint_{\mathbb{R}^3} e_q(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^5 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 + O(N^2 Q^{-1})$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1}$ троек $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из них.

Сначала докажем (26). Рассмотрим сумму по всем b_1, b_2, b_3 трехкратного интеграла $\iiint_{D_1}$.

Тогда согласно тождеству Парсеваля имеем

$$\sum_{b_1=-\infty}^{\infty} \sum_{b_2=-\infty}^{\infty} \sum_{b_3=-\infty}^{\infty} \iiint_{D_1} |Fe(-\bar{\eta}_b)|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \iiint_{D_1} |F|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \quad (28)$$

Для любого $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in D_1$ согласно равенству (21) справедливо неравенство $\frac{\tau}{q} < \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, |\eta_3|\} \leq 6B^2 \max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\}$. Поскольку согласно (7) и (11) имеет место неравенство $\max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\} > \frac{\tau}{6qB^2} = \frac{T^{1/6}}{6qB^2 N} > N^{-1}$ и в части а) леммы 6.3 работы [3] самая слабая оценка $I_\chi(y) \ll N(L|y|)^{-1/2}$, поэтому

$$\min\{|F_i|, |F_j|, |F_k|\} \ll \varphi(q) N L^{-1/2} T^{-1/12} (6QB^2 N)^{1/2}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Из этого и применив результаты работы И.Аллакова (см.[1] стр. 88) при $n = 3$, в правой части (28) получим оценка:

$$\begin{aligned} \iiint_{D_1} |F|^2 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 &\ll (\min\{|F_1|, |F_2|, |F_3|\})^2 \iiint_{D_1} (|F_1|^4 |F_4|^2 |F_5|^2 + |F_2|^4 |F_4|^2 |F_5|^2 + \\ &+ |F_3|^4 |F_4|^2 |F_5|^2) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll Q^{12} N^{12} B^4 L^{-5} T^{-1/3} \log^3 N. \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно (7) и (8) для правой части (29) справедливо $\ll X^3 N^4 Q^{-9} = (N^2 Q^{-4})^2 (X^3 Q^{-1})$. Тогда путем не сложных рассуждений из (28) можем получить (26).

Теперь докажем (27). Так как для произвольных $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in D_2$ выполняется неравенство $\max\{|\bar{\eta}_1|, |\bar{\eta}_2|, |\bar{\eta}_3|\} \geq \frac{1}{6B^2} \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, |\eta_3|\} \gg B^{-2}$, то из части а) леммы 6.3 работы [3] и из неравенства $|\bar{\eta}_j| \gg B^{-2} \gg T(\pi L)^{-1}$ получим

$$\min\{|F_i|, |F_j|, |F_k|\} \ll \varphi(q) B^2, \quad (1 \leq i < j < k \leq 5). \quad (30)$$

Известно, что $|F| = |F_1 F_2 F_3 F_4 F_5| \ll |F_1 F_2 F_3|^{\frac{5}{3}} + \dots + |F_3 F_4 F_5|^{\frac{5}{3}}$. Согласно (30) справедливо

$$\begin{aligned} \iiint_{D_2} |F| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 &\ll (\min \{|F_i|, |F_j|, |F_k|\})^{\frac{1}{6}} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(|F_i|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} + |F_j|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} + \right. \\ &\quad \left. + |F_k|^{\frac{3}{2}} |F_4|^{\frac{5}{3}} |F_5|^{\frac{5}{3}} \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \ll (\varphi(q) B^2)^{\frac{1}{6}} (QN)^{\frac{29}{6}} L^{-3} T^{\frac{5}{12}} \log^3 N, \end{aligned} \quad (31)$$

так как согласно части b) леммы 6.3 работы [3] справедлива оценка

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} |F_i|^{\frac{3}{2}} |F_j|^{\frac{5}{3}} |F_k|^{\frac{5}{3}} d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 &= \Delta_{ijk}^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_i|^{\frac{3}{2}} d\bar{\eta}_i \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_j|^{\frac{5}{3}} d\bar{\eta}_j \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_k|^{\frac{5}{3}} d\bar{\eta}_k \right) \ll \\ &\ll \left(Q^{\frac{3}{2}} N^{\frac{3}{2}} L^{-1} T^{\frac{1}{4}} \log N \right) \left(Q^{\frac{5}{3}} N^{\frac{5}{3}} L^{-1} T^{\frac{1}{6}} \log N \right)^2. \end{aligned}$$

Из равенства (31) с учетом (7) непосредственно следует (27).

5. Сингулярный ряд

Для произвольного целого $q \geq 1$ и для любых простых p обозначим

$$A(q) := \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^5 C_q(\bar{h}_j), \quad (32)$$

$$s(p) := 1 + A(p). \quad (33)$$

Принимая во внимание определение $N(q)$ в (5) и для вектор $\vec{b}$ из $W_{3,5}(X)$, для всех простых p выполняется $N(p) > 0$.

Вводим некоторые арифметические свойства функции $A(q)$, $s(p)$ и $N(q)$.

- ЛЕММА 5.1. а) функции $A(q)$ и $N(q)$ мультипликативные относительно q ;
 б) для любого натурального числа $k \geq 2$ имеем $A(p^k) = 0$.
 в) $N(p^k) = p^{2k-2} N(p)$ справедливо для любого натурального числа;
 д) $s(p) = p^3 \varphi^{-5}(p) N(p)$ и следовательно $s(p) > 0$ для всех p .
 е) для простого p и натурального q справедливо равенство $q^3 \varphi^{-5}(q) N(q) = \prod_{p|q} s(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЕ А). Используем идею L.K.Ниа [14] при введенную на странице 100. Пусть $(m, n) = 1$. Тогда существуют целые u, v такие, что для которых выполняется равенство $mu + nv = 1$. Отсюда положим $h_i = k_i n + l_i m$, где $k_i = v h_i$, $l_i = u h_i$, ($i = 1, 2, 3$). Из (32)

$$\bar{h}_b = \bar{k}_b n + \bar{l}_b m, \quad \bar{h}_j = (a_{1j} k_1 + a_{2j} k_2 + a_{3j} k_3) n + (a_{1j} l_1 + a_{2j} l_2 + a_{3j} l_3) m = \bar{k}_j n + \bar{l}_j m$$

и с учетом $C_{mn}(\bar{h}_j) = C_m(\bar{k}_j) C_n(\bar{l}_j)$ получим

$$\begin{aligned} A(mn) &= \frac{1}{\varphi^5(m) \varphi^5(n)} \sum_{\bar{h}}' e^{-2\pi i \frac{\bar{k}_b n + \bar{l}_b m}{mn}} \prod_{j=1}^5 C_m(\bar{k}_j) C_n(\bar{l}_j) = \\ &= \left(\frac{1}{\varphi^5(m)} \sum_{\bar{k}}' e_m(-\bar{k}_b) \prod_{j=1}^5 C_m(\bar{k}_j) \right) \left(\frac{1}{\varphi^5(n)} \sum_{\bar{l}}' e_n(-\bar{l}_b) \prod_{j=1}^5 C_n(\bar{l}_j) \right) = A(m) A(n). \end{aligned}$$

Если учесть

$$N(q) = \frac{1}{q^3} \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq q} 'e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^5 C_q(-\bar{h}_j)$$

мультипликативность $N(q)$ следует из мультипликативности $A(q)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЕ В). Известно, что справедливо равенство (см. Н.Насе [15] теорема 272)

$$C_q(m) = \mu\left(\frac{q}{(q, m)}\right) \varphi(q) \varphi^{-1}\left(\frac{q}{(q, m)}\right) \quad (34)$$

где $\mu(m)$ – функция Мёбиуса. Предположим, что $k \geq 2$. Если $\prod_{j=1}^5 C_{p^k}(\bar{h}_j) \neq 0$, то согласно определению μ в (34), убедимся, что p должен делить все $\bar{h}_j = a_{1j}h_1 + a_{2j}h_2 + a_{3j}h_3$, ($j = \overline{1,5}$). По определению $A(p^k)$ в (32) $(h_1, h_2, h_3, p) = 1$ поскольку следует, что простые числа p должны делить все Δ_{ijk} . Но это противоречит условию (4). Значит $A(p^k) = 0$ для всех $k \geq 2$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЕ С). Согласно (4) мы можем положить $p \nmid \Delta_{123}$. Система сравнений $\sum_{j=1}^5 a_{ij}l_j \equiv b_i \pmod{p^k}$, ($i = 1, 2, 3$) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \Delta_{123}l_1 + \Delta_{423}l_4 + \Delta_{523}l_5 \equiv \Delta_{b23} \pmod{p^k} \\ \Delta_{123}l_2 + \Delta_{143}l_4 + \Delta_{153}l_5 \equiv \Delta_{1b3} \pmod{p^k} \\ \Delta_{123}l_3 + \Delta_{124}l_4 + \Delta_{125}l_5 \equiv \Delta_{12b} \pmod{p^k} \end{cases}.$$

Это означает, что $N(p^k)$ равно количеству l_4, l_5 удовлетворяющего условию

$$1 \leq l_4, l_5 \leq p^k, \quad p \nmid l_4, \quad p \nmid l_5 \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta_{423}l_4 + \Delta_{523}l_5 \not\equiv \Delta_{b23} \pmod{p^k} \\ \Delta_{143}l_4 + \Delta_{153}l_5 \not\equiv \Delta_{1b3} \pmod{p^k} \\ \Delta_{124}l_4 + \Delta_{125}l_5 \not\equiv \Delta_{12b} \pmod{p^k} \end{cases} \quad (35)$$

положим $l_4 = pt_1 + s_1$ и $l_5 = pt_2 + s_2$, где $1 \leq s_1 \leq p-1$, $0 \leq t_1 < p^{k-1}$ и $1 \leq s_2 \leq p-1$, $0 \leq t_2 < p^{k-1}$. Тогда сравнение (35) можем написать в виде

$$\begin{cases} s_1\Delta_{423} + s_2\Delta_{523} \not\equiv \Delta_{b23} \pmod{p^k} \\ s_1\Delta_{143} + s_2\Delta_{153} \not\equiv \Delta_{1b3} \pmod{p^k} \\ s_1\Delta_{124} + s_2\Delta_{125} \not\equiv \Delta_{12b} \pmod{p^k} \end{cases}.$$

Отсюда следует $N(p^k) = p^{2k-2}N(p)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЕ D). На основании (33)

$$\begin{aligned} s(p) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{l_1, \dots, l_5 \leq p} \chi_0(l_1) \dots \chi_0(l_5) \sum_{h_1, h_2, h_3 \leq p} e_p((a_{11}h_1 + a_{21}h_2 + a_{31}h_3)l_1 + \dots \\ &\quad \dots + (a_{15}h_1 + a_{25}h_2 + a_{35}h_3)l_5 - (b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3)) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varphi^5(p)} \left(\sum_{\substack{l_1, \dots, l_5 \leq p \\ \sum_{j=1}^5 a_{ij} l_j = b_j, i=1,2,3}} 1 \right) p^3 = \frac{p^3}{\varphi^5(p)} N(p).$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЕ Е). Пусть $q = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$. Тогда, согласно утверждениям а), с) и d) имеем нижеследующее:

$$\frac{q^3}{\varphi^5(q)} N(q) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^3}{\varphi^5(p_i)} N(p_i) = \prod_{p|q} \frac{p^3}{\varphi^5(p)} N(p).$$

Таким образом доказана лемма 5.1 полностью. □

В наших последующих исследованиях нужны более точные оценки для некоторых произведений и сумм, включающих в себя $s(p)$ и $A(q)$. В частности, установим сходимость $\prod_p s(p)$ и $\sum_q |A(q)|$. Чтобы достичь этого исключаем из рассмотрения те тройки $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ из $[1, X]^3$, для которых $\Delta_{12b} \Delta_{13b} \Delta_{14b} \Delta_{15b} \Delta_{23b} \Delta_{24b} \Delta_{25b} \Delta_{34b} \Delta_{35b} \Delta_{45b} = 0$. Известно, что число таких элементов не превышает $10X^2$ и эти элементы можно включить в множество $U_{3,5}(X)$.

Теперь простые числа разделим на две части следующим образом:

$$P_B = \left\{ p : p \mid \underbrace{\Delta_{123} \dots \Delta_{345} \Delta_{12b} \dots \Delta_{45b}}_{20} \right\} \text{ и } P_G = \{ p : p \nmid P_B \}.$$

Легко видеть, что $2 \in P_B$ и $N(3) > 0$ означает $3 \in P_B$.

ЛЕММА 5.2. Для $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ удовлетворяющие условию $\Delta_{12b} \Delta_{13b} \Delta_{14b} \Delta_{15b} \Delta_{23b} \Delta_{24b} \Delta_{25b} \Delta_{34b} \Delta_{35b} \Delta_{45b} \neq 0$ имеем:

a) $-\frac{68}{p^2} \leq A(p) \leq \frac{14}{p}$ для всех p , и если $p \in P_G$ то $-\frac{4}{p^2} \leq A(p) < 0$;

b) для всех p , $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p)) \ll (\log \log N)^{14}$;

c) $\prod_p s(p)$ сходится абсолютно и $\prod_p s(p) > c_4 > 0$;

d) Для любых $y \geq 1$

$$\sum_{q \geq y} |A(q)| \ll y^{-1} N^{c_5 / \log \log N} \log^{68}(y+2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) согласно (33) и леммы 5.1 d) имеем

$$A(p) = p^3 \varphi^{-5}(p) N(p) - 1 \quad (36)$$

Исходя из условий (4), можем предполагать, что $p \nmid \Delta_{123}$. Так как $N(p)$ - количество наборов $(l_1, \dots, l_5)$, удовлетворяющих условиям $1 \leq l_1, \dots, l_5 \leq p-1$ и $\sum_{j=1}^5 a_{ij} l_j \equiv b_i \pmod{p}$, ($i = 1, 2, 3$), то решая эти сравнения относительно l_1, l_2, l_3 находим

$$\begin{cases} l_1 \equiv \frac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{623} - \Delta_{423} l_4 - \Delta_{523} l_5) \pmod{p} \\ l_2 \equiv \frac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{163} - \Delta_{143} l_4 - \Delta_{153} l_5) \pmod{p} \\ l_3 \equiv \frac{1}{\Delta_{123}} (\Delta_{126} - \Delta_{124} l_4 - \Delta_{125} l_5) \pmod{p} \end{cases}$$

А из этого следует, что $N(p)$ - количество l_4, l_5 с условиями

- 1) $1 \leq l_4, l_5 \leq p-1$,
- 2) $\Delta_{b23} \not\equiv \Delta_{423}l_4 + \Delta_{523}l_5 \pmod{p}$,
- 3) $\Delta_{1b3} \not\equiv \Delta_{143}l_4 + \Delta_{153}l_5 \pmod{p}$,
- 4) $\Delta_{12b} \not\equiv \Delta_{124}l_4 + \Delta_{125}l_5 \pmod{p}$.

Согласно принципу включения и исключения для $N(p)$ имеем

$$N(p) = (p-1)^2 - M(\alpha) - M(\beta) - M(\gamma) + M(\alpha, \beta) + M(\beta, \gamma) + M(\alpha, \gamma) - M(\alpha, \beta, \gamma), \quad (37)$$

где $M(\alpha), M(\beta), \dots$ означает количество l_4, l_5 удовлетворяющие соответствующим условиям:

- α) $1 \leq l_4, l_5 \leq p-1, \quad \Delta_{b23} \equiv \Delta_{423}l_4 + \Delta_{523}l_5 \pmod{p}$,
- β) $1 \leq l_4, l_5 \leq p-1, \quad \Delta_{1b3} \equiv \Delta_{143}l_4 + \Delta_{153}l_5 \pmod{p}$,
- γ) $1 \leq l_4, l_5 \leq p-1, \quad \Delta_{12b} \equiv \Delta_{124}l_4 + \Delta_{125}l_5 \pmod{p}$.

Очевидно, что $N(p) \leq (p-1)^2$, и согласно (36) для всех p следует неравенство $A(p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^3 - 1 \leq \frac{14}{p}$.

Согласно вышеуказанным условиям 2), 3) и 4) $N(p) > 0$ означает, что $p \nmid (\Delta_{b23}, \Delta_{423}, \Delta_{523})$ $(\Delta_{1b3}, \Delta_{143}, \Delta_{153})$ $(\Delta_{12b}, \Delta_{124}, \Delta_{125})$. Поскольку, если $p \mid \Delta_{124}$ и $p \mid \Delta_{125}$, то должна быть $p \nmid \Delta_{12b}$, тогда условия γ) не могут выполняться. Если $p \nmid \Delta_{124}$, $p \mid \Delta_{125}$ или $p \mid \Delta_{124}$, $p \nmid \Delta_{125}$, то условиям γ) удовлетворяют $p-1$ значений, вне зависимости от того, что $p \mid \Delta_{12b}$ или $\Delta_{12b} \nmid p$. Отсюда $M(\gamma) \leq p-1$. Аналогично мы можем видеть, что $M(\beta) \leq p-1$ и $M(\alpha) \leq p-1$. Тогда из (37) заключаем, что $N(p) \geq (p-1)(p-4)$. Таким образом, из (36) получим неравенства

$$A(p) \geq \frac{p^3(p-4)}{(p-1)^4} - 1 = \frac{-6p^2 + 4p - 1}{(p-1)^4} \geq -\frac{68}{p^2}.$$

Теперь рассмотрим $p \in P_G$. В силу определения P_G мы можем видеть, что $M(\alpha) = M(\beta) = M(\gamma) = p-1$, $M(\alpha, \beta) = M(\beta, \gamma) = M(\alpha, \gamma) = 1$ и $M(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Поэтому $N(p) = (p-1)^2 - 3(p-1) + 3$ при $p \geq 5$ имеем

$$A(p) = \frac{p^3(p^2 - 5p + 7)}{(p-1)^5} - 1 = \frac{-3p^3 + 10p^2 - 5p + 1}{(p-1)^5}$$

и следует неравенство $-\frac{4}{p^2} \leq A(p) \leq 0$. Таким образом, вытекает утверждение а) леммы 5.2.

Теперь рассмотрим случай б) и с). Сначала докажем, что $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p))$.

В случае $A(p) > 0$, это очевидно. Пусть $A(p) < 0$, то в силу утверждения а)

$$\begin{aligned} \prod_p (1 + |A(p)|) &= \prod_p (1 + A(p) - 2A(p)) \ll \prod_p \left(1 + A(p) + \frac{2 \cdot 68}{p^2}\right) = \\ &= \prod_p (1 + A(p)) \prod_p \left(1 + \frac{2 \cdot 68}{p^2(1 + A(p))}\right). \end{aligned}$$

Здесь, $(1 + A(p))p^2 \geq \left(1 - \frac{68}{p^2}\right)p^2$ и $\prod_p \left(1 + \frac{136}{p^2(1 + A(p))}\right) \leq \prod_p \left(1 + \frac{136}{\left(1 - \frac{68}{p^2}\right)p^2}\right) \ll 1$, так что $\prod_p (1 + |A(p)|) \ll \prod_p (1 + A(p))$.

Предполагаем, что $\langle P_G \rangle$ и $\langle P_B \rangle$ множества положительных целых свободных от квадратов, простые делители которых принадлежат P_G и P_B соответственно. Тогда для числа $t > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{q \leq t} |A(q)| \leq \sum_{q_1 \in \langle P_B \rangle} |A(q_1)| \sum_{q_2 \in \langle P_G \rangle} |A(q_2)| \leq \prod_{p \in P_B} (1 + A(p)) \prod_{\substack{p \in P_G \\ p \leq t}} (1 + A(p)) \leq$$

$$\leq \prod_{p \in P_B} \left(1 + \frac{14}{p}\right) \prod_{p \leq t} \left(1 + \frac{4}{p^2}\right) \ll \prod_{p \in P_B} \left(1 + \frac{14}{p}\right) \ll \prod_{p \in P_B} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-14}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{q=1}^{\infty} |A(q)| = \prod_p s(p)$, сходится и $\prod_{p \in P_B} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-14} = \prod_{p \in P_B} \left(\frac{\varphi(p)}{p}\right)^{-14} = \left(\frac{\varphi(K)}{K}\right)^{-14} \ll (\log \log N)^{14}$, где $K = \prod_{p \in P_B} p \leq (6B^3)^{20} \ll N$.

Следовательно, мы доказали утверждения b) и первую часть с). Вторая часть с), т.е. $\prod_p s(p) > c_4 > 0$ следует из первой части с) и леммы 5.1 d).

Утверждение d) доказывается аналогично утверждению 4) из леммы 4.4 в работе М.С.Лиу, К.М.Тсанг [13]. $\square$

Пусть $\chi_j \pmod{r_j}$, $(j = \overline{1,5})$ - примитивные характеры и $r = [r_1, \dots, r_5]$ наибольший общий делитель чисел $r_1, \dots, r_5$. В дальнейшем нам необходимо иметь оценку выражений суммы вида:

$$Z(q) = Z(q, \chi_1, \dots, \chi_5) = \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^5 C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j), \quad (38)$$

где число q кратное числу r , а χ_0 - главный характер по модулю q .

ЛЕММА 5.3. *Имеют место следующие утверждения:*

a) $Z(r) = r^3 \sum_{(r)}' \prod_{j=1}^5 \chi_j(l_j);$

b) пусть $r|q$ и $q = q'q''$, $(r, q'') = 1$ и каждый простой делитель числа q' делит r , тогда $Z(q) = Z(q') \varphi^5(q'') A(q'')$ и $Z(q') = 0$ если $q' > r$;

c) справедлива оценка $\sum_{q \leq Q, r|q} \varphi^{-5}(q) Z(q) \ll \prod_p s(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) при $q = r$ из (38) получим

$$\begin{aligned} Z(r) &= \sum_{\bar{h}}' e_r(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^5 C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j) = \sum_{\bar{h}}' e_r(-\bar{h}_b) C_{\chi_1 \chi_0}(\bar{h}_1) \dots C_{\chi_5 \chi_0}(\bar{h}_5) = \\ &= \sum_{1 \leq l_1, \dots, l_5 \leq r} \prod_{j=1}^5 \chi_j(l_j) \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq r}' e_r \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 (a_{ij} l_j - b_i) h_i \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Если

$$\sum_{j=1}^5 a_{ij} l_j = b_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (40)$$

то можно не учитывать условие $(h_1, h_2, h_3, r) = 1$, и тогда из (39) естественно следует утверждение а) леммы. Условие (40) выполняется в силу определения суммы $\sum_{(r)}$.

Теперь покажем, что в этом случае можно не учитывать условие $(h_1, h_2, h_3, r) = 1$. Пусть $\chi \pmod{q}$ индуцирован примитивным характером $\chi^* \pmod{r^*}$ и $q_1 = q/(q, m)$, тогда справедливо равенство (см. стр. 450, [16])

$$C_{\chi}(m) = \begin{cases} \bar{\chi}^* \left(\frac{m}{(m, q)} \right) \frac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)} \mu \left(\frac{q_1}{r^*} \right) \chi^* \left(\frac{q_1}{r^*} \right) C_{\chi^*}(1), & \text{если } r^* | q; \\ 0, & \text{если } r^* \nmid q. \end{cases} \quad (41)$$

Пусть $(h_1, h_2, h_3, r) > 1$ и $p | (h_1, h_2, h_3, r)$. Так как $r = [r_1, \dots, r_5]$, то мы можем полагать $p \nmid r_1$. Поэтому $r_1 \nmid r(a_{11}h_1 + \dots + a_{31}h_3)^{-1}$ и следовательно, в силу (41) $C_{\chi_1 \chi_0}(\bar{h}_1) = 0$. Таким

образом, если $(h_1, h_2, h_3, r) > 1$, то $\prod_{j=1}^5 C_{\chi_j \chi_0}(\bar{h}_j) = 0$. Части b) и c) леммы доказываются рассуждениями, аналогичными рассуждениям, которые использованы в леммах 4.5 и 4.6 в работах М.С.Лiu, К.М. Tsanga [13]. $\square$

6. Особый интеграл задачи

Относительно особого интеграла задачи справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Если ρ_j ($j = \overline{1,5}$) произвольные комплексные числа с условием $0 < \operatorname{Re} \rho_j \leq 1$, то справедливо равенство

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^5 \int_L^N x_j^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x) dx \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = N^2 |\Delta_{345}|^{-1} \iint_D \prod_{j=1}^5 (Nx_j)^{\rho_j-1} dx_1 dx_2 \quad (42)$$

где x_3, x_4, x_5 и область интегрирования D определяются следующими равенствами:

$$\begin{cases} x_3 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{b45} N^{-1} - \Delta_{145} x_1 - \Delta_{245} x_2) \\ x_4 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{3b5} N^{-1} - \Delta_{315} x_1 - \Delta_{325} x_2) \\ x_5 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{34b} N^{-1} - \Delta_{341} x_1 - \Delta_{342} x_2) \end{cases} \quad (43)$$

и

$$D = \{x_1, x_2 : LN^{-1} \leq x_3, x_4, x_5 \leq 1\}. \quad (44)$$

Кроме того, если $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, то за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ значений (b_1, b_2, b_3) справедлива оценка

$$\iint_D dx_1 dx_2 \gg Q^{-1/50}. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^5 \int_L^N x_j^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x_j) dx_j \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{-y}^y \int_{-y}^y \int_{-y}^y e(-\bar{\eta}_b) \times \\ & \times \left(\prod_{j=1}^5 \int_L^N x_j^{\rho_j-1} e(\bar{\eta}_j x_j) dx_j \right) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \lim_{y \rightarrow \infty} N^2 \int_{L/N}^1 \dots \int_{L/N}^1 \left(\prod_{j=1}^5 (Nx_j)^{\rho_j-1} \right) \times \\ & \times \left(\prod_{i=1}^3 \frac{\sin(2\pi(a_{i1}x_1 + \dots + a_{i5}x_5 - b_i N^{-1})y)}{\pi(a_{i1}x_1 + \dots + a_{i5}x_5 - b_i N^{-1})} \right) dx_1 \dots dx_5 = \lim_{y \rightarrow \infty} N^2 J(y). \end{aligned} \quad (46)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$t_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{i5}x_5 - b_i N^{-1}, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$D(x_1, x_2) = \left\{ \vec{t} = (t_1, t_2, t_3) \mid t_i = \sum_{j=1}^5 a_{ij}x_j - b_i N^{-1}, \quad i = 1, 2, 3; \quad LN^{-1} \leq x_3, x_4, x_5 \leq 1 \right\}. \quad (47)$$

Тогда

$$\begin{cases} x_3 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{t45} + \Delta_{b45} N^{-1} - \Delta_{145} x_1 - \Delta_{245} x_2) \\ x_4 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{3t5} + \Delta_{3b5} N^{-1} - \Delta_{315} x_1 - \Delta_{325} x_2) \\ x_5 = \Delta_{345}^{-1} (\Delta_{34t} + \Delta_{34b} N^{-1} - \Delta_{341} x_1 - \Delta_{342} x_2) \end{cases} \quad (48)$$

Используя эти обозначения и из (46) имеем:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N^2 J(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} N^2 \int_{L/N}^1 \int_{L/N}^1 (Nx_1)^{\rho_1-1} (Nx_2)^{\rho_2-1} \times \\ \times \left(\iint_{Q(x_1, x_2)} \frac{1}{|\Delta_{345}|} \prod_{j=3}^5 (Nx_j)^{\rho_j-1} \frac{\sin 2\pi t_{j-2} y}{\pi t_{j-2}} dt_{j-2} \right) dx_1 dx_2. \quad (49)$$

На правой части (49) применим теорему Жордана об интеграле Дирихле (см. [12], стр. 408). В силу теоремы, если функция $g(t)$ интегрируема и дифференцируема в интервале $\mu \leq t \leq \lambda$, тогда справедливо равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\mu}^{\lambda} g(t) \frac{\sin(2\pi t y)}{\pi t} dt = \begin{cases} g(0), & \text{если } \mu \leq 0 < \lambda; \\ \frac{1}{2}g(0), & \text{если } \mu = 0 \text{ или } \lambda = 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как $\vec{t} = (0, 0, 0)$ принадлежит $D(x_1, x_2)$, поэтому из этой теоремы и из равенства (44), (49) вытекает (42), т.е. получим

$$\lim_{y \rightarrow \infty} N^2 J(y) = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \iint_D \prod_{j=1}^5 (Nx_j)^{\rho_j-1} dx_1 dx_2$$

Из (47) и (48) при $\vec{t} = (0, 0, 0)$ соответственно следует (44) и (43).

Теперь докажем (45). В зависимости от знака определителя Δ_{345} доказательство оценки (45) делим на два случая.

1-случай. Пусть $\Delta_{345} > 0$. Согласно (43) и (44) кратный интеграл равен сумме подинтервалов

$$\begin{cases} \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{245}LN^{-1}}{-\Delta_{145}} \leq x_1 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{245} - \Delta_{b45}N^{-1}}{-\Delta_{145}}; \\ \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{145}LN^{-1}}{-\Delta_{245}} \leq x_2 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{145} - \Delta_{b45}N^{-1}}{-\Delta_{245}}; \\ \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{3b5}N^{-1} + \Delta_{325}LN^{-1}}{-\Delta_{315}} \leq x_1 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{325} - \Delta_{3b5}N^{-1}}{-\Delta_{315}}; \\ \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{3b5}N^{-1} + \Delta_{315}LN^{-1}}{-\Delta_{325}} \leq x_2 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{315} - \Delta_{3b5}N^{-1}}{-\Delta_{325}}; \\ \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{34b}N^{-1} + \Delta_{342}LN^{-1}}{-\Delta_{341}} \leq x_1 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{342} - \Delta_{34b}N^{-1}}{-\Delta_{341}}; \\ \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{34b}N^{-1} + \Delta_{341}LN^{-1}}{-\Delta_{342}} \leq x_2 \leq \frac{\Delta_{345} + \Delta_{341} - \Delta_{34b}N^{-1}}{-\Delta_{342}}; \end{cases} \quad (50)$$

на области $[LN^{-1}, 1]^2$, здесь мы считаем, что $-\Delta_{145}, -\Delta_{245}, -\Delta_{315}, -\Delta_{325}, -\Delta_{341}, -\Delta_{342}$ положительны. Это всегда возможно, в противном случае мы можем переобозначить индексы коэффициентов a_{ij} . Для $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ имеем $|\Delta_{ijb}| \leq 6B^2X$ и согласно (6), (7) и (8) нижняя граница интервала в (50) удовлетворяет неравенство

$$\leq (12B^3Q^{-1/90} + 6B^2XN^{-1}) |\Delta_{145}|^{-1} \leq (17B^3)^{-1},$$

а верхняя граница интервала удовлетворяет неравенству

$$\geq (1 - 6B^2 X N^{-1}) |\Delta_{145}|^{-1} \geq \frac{1}{6B^3} - \frac{1}{108B^6} \geq \frac{1}{12B^3} \left(2 - \frac{1}{9B^3}\right) \geq (12B^3)^{-1}.$$

Таким образом, первый интервал в (50) содержит под интервал $[(17B^3)^{-1}, (12B^3)^{-1}]$, совершенно аналогично можно показать, что второй интервал в (50) тоже содержит под интервал $[(17B^3)^{-1}, (12B^3)^{-1}]$. Поверхность, созданная первой областью $\gg B^{-6}$, содержит эту область. Совершенно аналогично можно показать, что это утверждение справедливо и для остальных интервалов в (50). Так что для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ и при $\delta < \frac{1}{300}$ выполняется неравенство $\iint_D dx_1 dx_2 \gg B^{-6} \gg Q^{-6\delta} \gg Q^{-1/50}$.

2-случай. Пусть $\Delta_{345} < 0$. В этом случае тоже интеграл $\iint_D dx_1 dx_2$ равен сумме площадей следующих под интервалов в $[LN^{-1}, 1]^2$

$$\begin{cases} \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{245}LN^{-1}}{-\Delta_{145}} \leq x_1 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{245}}{-\Delta_{145}}, \\ \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{145}LN^{-1}}{-\Delta_{245}} \leq x_2 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{145}}{-\Delta_{245}}, \\ \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{325}LN^{-1}}{-\Delta_{315}} \leq x_1 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{325}}{-\Delta_{315}}, \\ \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{315}LN^{-1}}{-\Delta_{325}} \leq x_2 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{315}}{-\Delta_{325}}, \\ \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{342}LN^{-1}}{-\Delta_{341}} \leq x_1 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{342}}{-\Delta_{341}}, \\ \frac{\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{341}LN^{-1}}{-\Delta_{342}} \leq x_2 \leq \frac{LN^{-1}\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{341}}{-\Delta_{342}}. \end{cases} \quad (51)$$

Так как $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, тогда согласно определению $W_{3,5}(X)$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} \Delta_{345}y_3 = \Delta_{b45} + \Delta_{415}y_1 + \Delta_{425}y_2 \\ \Delta_{345}y_4 = \Delta_{3b5} + \Delta_{135}y_1 + \Delta_{235}y_2 \\ \Delta_{345}y_5 = \Delta_{34b} + \Delta_{431}y_1 + \Delta_{432}y_2 \end{cases}$$

имеет решение в положительных вещественных числах $y_1, \dots, y_5$. Отсюда следует $\Delta_{4b5} > 0$, $\Delta_{b35} > 0$, $\Delta_{43b} > 0$. Для каждого $k \geq 1$ существует не более, чем X^2 значений (b_1, b_2, b_3) в $[1; X]^3$ таких, что $k = \Delta_{4b5}$. Поэтому $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ и удовлетворяющих условию $-\Delta_{b45}\Delta_{415}^{-1} \leq NQ^{-1/100}$ и $-\Delta_{b45}\Delta_{425}^{-1} \leq NQ^{-1/100}$ существует не более $\leq \max\{\Delta_{415}, \Delta_{425}\} X^2 NQ^{-1/100}$ значений троек. Применяя те же рассуждения к $-\Delta_{3b5}\Delta_{135}^{-1}$, $-\Delta_{3b5}\Delta_{235}^{-1}$ и $-\Delta_{34b}\Delta_{431}^{-1}$, $-\Delta_{34b}\Delta_{432}^{-1}$ получим

$$-\Delta_{b45}(N\Delta_{415})^{-1} > Q^{-1/100}, \dots, -\Delta_{34b}(N\Delta_{432})^{-1} > Q^{-1/100}. \quad (52)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & [\max\{\Delta_{415}, \Delta_{425}\} + \max\{\Delta_{135}, \Delta_{235}\} + \max\{\Delta_{431}, \Delta_{432}\}] X^2 NQ^{-1/100} \leq \\ & \leq 18B^3 X^2 NQ^{-1/100} \leq X^3 Q^{-1/101}, \end{aligned}$$

$\Delta_{345} < 0$, $|\Delta_{ijb}N^{-1}| \leq (18B^3)^{-1}$ и согласно (6) имеем следующее:

$$\Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{245}LN^{-1} < 0, \dots, \Delta_{345} - \Delta_{b45}N^{-1} + \Delta_{341}LN^{-1} < 0$$

т.е. нижняя граница в (51) отрицательна и также согласно (52) и (7) для его верхней границы выполняется неравенство

$$\geq Q^{-1/100} - 12B^3Q^{-1/90} > \frac{1}{2}Q^{-1/100}.$$

Это означает, что выражение

$$\iint_{(D)} dx_1 dx_2 \geq \left(\frac{1}{2}Q^{-1/100} - LN^{-1} \right)^2 \gg Q^{-1/50}$$

справедливо для всех троек, кроме $X^2Q^{-1/101}$ троек, принадлежащих $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$. Таким образом доказана лемма 6.1. $\square$

7. Доказательство леммы 2.2 и теоремы

В силу (23) при раскрытии произведения $\prod_{j=1}^5 H_j(\bar{h}, q, \bar{\eta})$ получается 243 слагаемых. Их можно разделить на три группы следующим образом:

$$T_1) \prod_{j=1}^5 C_q(\bar{h}_j) I(\bar{h}_j);$$

$$T_2) 211 \text{ слагаемых, каждый из которых имеет по крайней мере один множитель } G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta});$$

$$T_3) \text{ оставшиеся } 31 \text{ слагаемых.}$$

Для удобства определим:

$$M_i := \sum_{q \leq Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \iiint_{\mathbb{R}^3} T_i e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (53)$$

Легко заметить, что M_i — является вещественным числом. Используя обозначение (53), в силу леммы 4.4 для всех рассмотренных троек $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$, за исключением X^3Q^{-1} значений из них, можем написать в виде:

$$I_1(\vec{b}) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2Q^{-1}). \quad (54)$$

Пусть

$$M_0 = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \prod_p s(p) \iint_D dx_1 dx_2. \quad (55)$$

Тогда в силу утверждения с) леммы 5.2 и леммы 6.1 справедлива оценка

$$M_0 \gg N^2 B^{-3} Q^{-1/50} \quad (56)$$

за исключением не более чем $X^3Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$.

ЛЕММА 7.1. Для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ справедливо равенство $M_1 = M_0 + O(N^2Q^{-4/5})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (42) $\rho_j = 1$ и используя лемму 5.2 d) из (53) находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{q \leq Q} \varphi^{-5}(q) \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^5 C_q(\bar{h}_j) \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^5 \int_L^N e(\bar{\eta}_j x) dx \right) e(-\bar{\eta}_b) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = \\ &= N^2 |\Delta_{345}|^{-1} \iint_D dx_1 dx_2 \left(\sum_{q \leq Q} A(q) \right) = N^2 |\Delta_{345}|^{-1} \iint_{(D)} dx_1 dx_2 \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q) \right) + \end{aligned}$$

$$+O\left(N^2Q^{-1}N^{c_5/\log\log N}\log^{68}Q\right). \quad (57)$$

В силу леммы 5.1 а), б) и (33)

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_p (1 + A(p)) = \prod_p s(p)$$

и ясно, что $N^{c_5/\log\log N}\log^{68}Q < Q^{1/5}$. Из этого и равенств (55), (57) следует доказываемая лемма. $\square$

Теперь оценим M_3 . Пусть $m_1, m_2, \dots$ различные целые числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и

$$G(m_1, m_2, \dots) := \sum_{(\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_{m_1}) \tilde{\chi}(l_{m_2}) \dots \quad (58)$$

$$P(m_1, m_2, \dots) := \iint_D (Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \dots dx_1 dx_2 \quad (59)$$

где область D определена в (44). Очевидно,

$$|P(m_1, m_2, \dots)| \leq 1. \quad (60)$$

ЛЕММА 7.2. *Имеют место следующие оценки:*

- а) $|G(m_1, m_2, \dots)| \leq N(\tilde{r}) \leq \varphi^2(\tilde{r})$;
- б) $G(m_1, m_2, \dots) \ll B^{30} \tilde{r}^{5/4}$ за исключением не более, чем $X^{3\tilde{r}^{-1/2}}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) следует из определения функции $N(\tilde{r})$ и его мультипликативности, если учитывать лемму 5.1. с).

Докажем б). Для удобства рассмотрим конкретный набор из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, например $1, 2, 3$, то есть $G(1, 2, 3)$. Согласно (58) $G(1, 2, 3)$ можно представить в виде [1]

$$G(1, 2, 3) = \frac{1}{\tilde{r}^3} \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r}} e_{\tilde{r}}(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_2) C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_5).$$

Используя тождество Парсеваля получим:

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 = \frac{1}{\tilde{r}^3} \left| \sum_{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r}} C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}}(\bar{h}_3) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_5) \right|^2.$$

Так как $\tilde{\chi}$ — является примитивным характером, то справедливо равенство $C_{\tilde{\chi}}(m) = \tilde{\chi}(m) C_{\tilde{\chi}}(1)$ и $C_{\tilde{\chi}}(1) = \sqrt{\tilde{r}}$. Поэтому

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 \leq \sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r} \\ (h_1, h_2, h_3, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_5)|^2. \quad (61)$$

Известно, что модуль квадратичного характера $\tilde{\chi}$ должен иметь вид $\tilde{r} = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k$ (здесь $\nu_1 = 2^t$, $t = \{0, 2, 3\}$ и $\nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_k$ нечетные простые числа).

Пусть $U_1 = \{\nu_j \mid \nu_j \nmid \Delta_{123} \Delta_{124} \dots \Delta_{345}, j \geq 2\}$ и $U_2 = \{\nu_j \mid \nu_j \notin U_1\}$, а также обозначим $u_i = \prod_{\nu_j \in U_i} \nu_j$, ($i = 1, 2$). Тогда имеет место $\tilde{r} = u_1 u_2$ и

$$u_2 = \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j = \nu_1 \prod_{\nu_j \in U_2 \setminus \{\nu_1\}} \nu_j \leq 8 \underbrace{|\Delta_{123} \Delta_{124} \dots \Delta_{345}|}_{10} \ll B^{30}. \quad (62)$$

Подобным способом, который был использован при доказательстве леммы 5.1 а) нетрудно показать, что

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \tilde{r} \\ (h_1, h_2, h_3, \tilde{r})=1}} |C_{\tilde{r}}(\bar{h}_4) C_{\tilde{r}}(\bar{h}_5)|^2 = \prod_{j=1}^k \left\{ \sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \nu_j \\ (h_1, h_2, h_3, \nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_4) C_{\nu_j}(\bar{h}_5)|^2 \right\}. \quad (63)$$

Фиксируем $\nu_j \in U_1$ и рассмотрим соответствующую сумму в правой части равенства (63)

$$C_{\nu_j}(\bar{h}_i) = \sum_{l \leq \nu_j}' e\left(\frac{l\bar{h}_i}{\nu_j}\right) = \begin{cases} \varphi(\nu_j), & \text{если } \nu_j | \bar{h}_i, \\ -1, & \text{если } \nu_j \nmid \bar{h}_i, \end{cases} \quad (i = 4, 5).$$

Также существуют $\nu_j - 1$ значений h_1, h_2, h_3 , для которых $\nu_j | \bar{h}_i$, ($i = 4, 5$). Поэтому из (63) для всех $\nu_j \in U_1$ находим

$$\sum_{\substack{1 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \nu_j \\ (h_1, h_2, h_3, \nu_j)=1}} |C_{\nu_j}(\bar{h}_4) C_{\nu_j}(\bar{h}_5)|^2 \leq \varphi^5(\nu_j). \quad (64)$$

Если $\nu_j \in U_2$, очевидно, что выражений левой части неравенства (64) не больше ν_j^7 . Из (61)-(64) следует

$$\sum_{1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq \tilde{r}} |G(1, 2, 3)|^2 \ll \prod_{\nu_j \in U_1} \varphi^5(\nu_j) \prod_{\nu_j \in U_2} \nu_j^7 \leq \tilde{r}^5 u_2^2 \ll \tilde{r}^5 B^{60}.$$

Последняя оценка показывает, что количество наборов b_1, b_2, b_3 принадлежащих $[1, \tilde{r}]^3$, для которых $G(1, 2, 3) \gg \tilde{r}^{5/4} B^{30}$ не превосходит $\tilde{r}^{5/2}$. Ясно, что $G(1, 2, 3)$ зависит от классов вычетов по модулю $\tilde{r}$. Таким образом для не более, чем $\left(\frac{X}{\tilde{r}}\right)^3 \tilde{r}^{5/2} = X^3 \tilde{r}^{-1/2}$ исключительных значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, \tilde{r}]^3$, имеет место

$$G(1, 2, 3) \ll \tilde{r}^{5/4} B^{30}. \quad (65)$$

Для остальных наборов чисел $m_1, m_2, \dots$ из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ функция $G(m_1, m_2, \dots)$ оценивается аналогично и (65) остается в силе. $\square$

ЛЕММА 7.3. Для M_3 определяемой равенством (53) справедливо равенство

$$\begin{aligned} M_3 = & \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{345}| \varphi^5(\tilde{r})} \left(\sum_{\substack{q \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q)=1}} A(q) \right) \left[- \sum_{j=1}^5 G(j) P(j) + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} G(i, j) P(i, j) - \right. \\ & - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} G(i_1, i_2, i_3) P(i_1, i_2, i_3) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5} G(i_1, i_2, i_3, i_4) P(i_1, i_2, i_3, i_4) - \\ & \left. - G(1, 2, 3, 4, 5) P(1, 2, 3, 4, 5) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый из слагаемых в T_3 принадлежит одному из следующих типов

$$(-1)^m \delta_q \sum_{j=1}^m C_{\tilde{r} \chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^5 C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j), \quad (m = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Обозначая вклад такого члена в M_3 через $M_{3,m}$, оценим его. Для этого напомним $M_{3,m}$ следующим образом:

$$M_{3,m} = (-1)^m \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \prod_{j=m+1}^5 C_q(\bar{h}_j) \times \\ \times \iiint_{\mathbb{R}^3} e(-\bar{\eta}_b) \prod_{j=1}^m \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^5 I(\bar{\eta}_j) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 = (-1)^m W_m \cdot U_m \quad (67)$$

где через U_m обозначен кратный интеграл по $\mathbb{R}^3$ и

$$W_m = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r}|q}} \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) \prod_{j=1}^m C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \prod_{j=m+1}^5 C_q(\bar{h}_j).$$

Из (10), (59) и (42) (считая $\rho_j = \tilde{\beta}$ или $\rho_j = 1$) находим

$$U_m = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \iint_D \prod_{j=1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2 = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} P(1, 2, \dots, m). \quad (68)$$

Полагая в (38) $\chi_1 = \dots = \chi_m = \tilde{\chi} \pmod{\tilde{r}}$ и $\chi_{m+1} = \dots = \chi_5 = \chi_0 \pmod{1}$ получим

$$W_m = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r}|q}} \varphi^{-5}(q) Z(q). \quad (69)$$

В силу леммы 5.3. а), б) функцию $Z(q)$ можем написать в виде

$$Z(q) = Z(\tilde{r}) A(q'') \varphi^5(q'') = \tilde{r}^3 \sum_{(\tilde{r})} \prod_{j=1}^5 \tilde{\chi}(l_j) A(q'') \varphi^5(q'') \quad (70)$$

где $q = \tilde{r}q''$, $(\tilde{r}, q'') = 1$ из равенств (58), (69) и (70) имеем

$$W_m = Z(\tilde{r}) \varphi^{-5}(\tilde{r}) \sum_{\substack{q'' \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q'')=1}} A(q'') = \tilde{r}^3 \varphi^{-5}(\tilde{r}) G(1, 2, \dots, m) \sum_{\substack{q'' \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q'')=1}} A(q'').$$

Подставляя это выражение и (68) в (67) получим

$$M_{3,m} = \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{345}| \varphi^5(\tilde{r})} \sum_{\substack{q'' \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q'')=1}} A(q'') ((-1)^m G(1, 2, \dots, m) P(1, 2, \dots, m)).$$

Собирая выражение при $m = 1, 2, \dots, 5$ имеем равенство приведенное в лемме. $\square$

Если $Q/\tilde{r}$ достаточно “большое” сумма $\sum_{\substack{q \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q)=1}} A(q)$ в (66) является достаточно длинной

и в силу леммы 5.2 d) мы можем представить ее в виде:

$$\sum_{\substack{q \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q)=1}} A(q) = \prod_{p|\tilde{r}} s(p) + O\left(\tilde{r} Q^{-9/10}\right). \quad (71)$$

Обозначая через $A(G, P)$ выражение, стоящее в квадратной скобке в (66) и используя (71), находим

$$M_3 = \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{345}| \varphi^5(\tilde{r})} \left(\prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O\left(\tilde{r} Q^{-9/10}\right) \right) A(G, P).$$

Из этого и (60) из леммы 7.2 а) получим

$$M_3 = \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{345}| \varphi^5(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) A(G, P) + O\left(N^2 \tilde{r} Q^{-9/10} (\log \log Q)^3\right). \quad (72)$$

С другой стороны, согласно лемме 5.1 е) имеет место равенство

$$\prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) = \tilde{r}^3 \varphi^{-5}(\tilde{r}) \sum_{(\tilde{r})} 1. \quad (73)$$

Поэтому из леммы 7.1 и равенства (55) получим

$$M_1 = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \frac{\tilde{r}^3}{\varphi^5(\tilde{r})} \sum_{(\tilde{r})} \iint_D dx_1 dx_2 + O\left(N^2 Q^{-4/5}\right). \quad (74)$$

Из (72) и (74) следует

$$M_1 + M_3 = \frac{N^2 \tilde{r}^3}{|\Delta_{345}| \varphi^5(\tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\tilde{r})} \iint_D \prod_{j=1}^5 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) dx_1 dx_2 + O\left(N^2 \tilde{r} Q^{-4/5}\right). \quad (75)$$

В силу (44) $Nx_j > L$ так что

$$\prod_{j=1}^5 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1}\right) \geq \left((1 - \tilde{\beta}) \log T\right)^5 = \omega^5. \quad (76)$$

Таким образом, из равенства (76) и неравенства (73), (75) приходим к заключению

$$M_1 + M_3 \geq \omega^5 M_0 - O\left(N^2 \tilde{r} Q^{-4/5}\right). \quad (77)$$

В случае, когда $Q/\tilde{r}$ является “малым” для суммы $\sum_{\substack{q \leq Q/\tilde{r} \\ (\tilde{r}, q)=1}} A(q)$ мы не сможем получить

оценку, типа (71). В этом случае в силу утверждения леммы 5.2 б) получим оценку для рассматриваемой суммы. Из (66) для M_3 имеем

$$M_3 \ll N^2 \tilde{r}^3 \varphi^{-5}(\tilde{r}) A(G, P).$$

В силу леммы 7.2 б) и (60) имеем оценку $A(G, P) \ll B^3 \tilde{r}^{5/4}$ справедливую за исключением $X^3 \tilde{r}^{-1/2}$ наборов $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$. Поэтому

$$M_3 \ll \frac{N^2 \tilde{r}^3}{\varphi^5(\tilde{r})} B^{30} \tilde{r}^{5/4} (\log \log N)^{14} \ll N^2 \tilde{r}^{-3/4} B^{30} (\log \log N)^{19}. \quad (78)$$

Теперь оценим M_2 .

ЛЕММА 7.4. Для всех $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$ справедлива оценка $M_2 \ll M_0 \omega^5 \exp(-c_3 \delta^{-1/2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слагаемые, содержащиеся в T_2 имеют вид

$$(-1)^m \prod_{j=1}^l G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \prod_{j=l+1}^m \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^5 C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j)$$

или

$$(-1)^m \prod_{j=1}^l G_j(\bar{h}, q, \bar{\eta}) \prod_{j=l+1}^m C_q(\bar{h}_j) I(\bar{\eta}_j) \prod_{j=m+1}^5 \delta_q C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_j) \tilde{I}(\bar{\eta}_j),$$

$1 \leq l \leq m \leq 5$. Эти выражения оценивается одинаково, поэтому ограничимся рассмотрением первого из них. Его вклад в M_2 обозначим через $M_2(m, l)$, тогда из (53) находим

$$\begin{aligned} M_2(m, l) = & (-1)^m \sum_{q \leq Q, \bar{r}|q} \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\bar{h}}' e_q(-\bar{h}_b) C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_{l+1}) \dots C_{\tilde{\chi}\chi_0}(\bar{h}_m) C_q(\bar{h}_{m+1}) \dots C_q(\bar{h}_5) \times \\ & \times \sum_{\chi_1} \dots \sum_{\chi_l} C_{\tilde{\chi}_1}(\bar{h}_1) \dots C_{\tilde{\chi}_l}(\bar{h}_l) \iiint_{\mathbb{R}^3} I_{\chi_1}(\bar{\eta}_1) \dots I_{\chi_l}(\bar{\eta}_l) \tilde{I}_{\chi_l}(\bar{\eta}_{l+1}) \dots \tilde{I}_{\chi_l}(\bar{\eta}_m) \times \\ & \times I_{\chi_1}(\bar{\eta}_{m+1}) \dots I_{\chi_l}(\bar{\eta}_5) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \end{aligned}$$

Интеграл по $\mathbb{R}^3$ обозначим через J , тогда в силу (10) и (42) имеем

$$J = \frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \sum_{|\gamma_1| \leq T}' \dots \sum_{|\gamma_l| \leq T}' \iint_D \prod_{j=1}^l (Nx_j)^{\rho_j-1} \prod_{j=l+1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_2(m, l) = & -\frac{N^2}{|\Delta_{345}|} \iint_D \prod_{j=l+1}^m (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \left(\prod_{j=l+1}^m \sum_{r_j \leq Q} \sum_{\chi_j \pmod{r_j}}^* \sum_{|\gamma_j| \leq T} (Nx_j)^{\rho_j-1} \right) \times \\ & \times \sum_{\substack{q \leq Q \\ [\bar{r}, r_1, \dots, r_l] | q}} \varphi^{-5}(q) Z(q; \bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_l, \tilde{\chi}_{l+1}, \dots, \tilde{\chi}_m, \chi_{m+1}^o, \dots, \chi_5^o) dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

где $\tilde{\chi}_{l+1} = \dots = \tilde{\chi}_m = \tilde{\chi}$ и $\chi_{m+1}^o = \dots = \chi_5^o = \chi_0$.

Поскольку $Nx_j \geq L \geq \sqrt{N}$, мы используем лемму 4.2 для вычисления тройной суммы, стоящей в скобках, а лемму 5.3 с) для оценки последней суммы по q и тогда получим

$$M_2(m, l) \ll M_0 \left(\omega^5 \exp \left(-c_3 \delta^{-1/2} \right) \right)^l \ll M_0 \left(\omega^5 \exp \left(-c_3 \delta^{-1/2} \right) \right).$$

Собирая вклад всех таких слагаемых, получим утверждение леммы. $\square$

Теперь мы можем доказать лемму 2.2. Рассмотрим следующие три случая.

1-случай. Пусть не существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$, тогда отсутствует M_3 и из (54) за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} I_1(\vec{b}) &= M_1 + M_2 + O(N^2 Q^{-1}) = M_0 + M_2 + O(N^2 Q^{-1}) + O(N^2 Q^{-4/5}) \gg \\ &\gg N^2 B^{-3} Q^{-1/50} \left(1 - c_6 \exp \left(-\frac{c_3}{\delta^{1/2}} \right) - B^3 Q^{-\frac{4}{5} + \frac{1}{50}} \right) \gg N^2 B^{-3} Q^{-1/50}. \end{aligned}$$

2-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} \leq Q^{1/28}$. Тогда в силу леммы 7.4 и из (54), (55), (77) имеем:

$$I_1(\vec{b}) \gg M_0 \left(1 - \exp(-c_3 \delta^{-1/2})\right) \omega^5 + O\left(N^2 Q^{-107/140}\right) \quad (79)$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$.

Поскольку, $\tilde{r} \leq Q^{1/28}$ следует $\omega = \left(1 - \tilde{\beta}\right) \log T \geq c_2 \left(\sqrt{\delta} Q^{1/56} \log Q\right)^{-1}$ в (9) для нижней границы $1 - \tilde{\beta}$. Теперь используя (56) и из (79) вытекает оценка

$$I_1(\vec{b}) \gg N^2 \left(B^5 Q^{\frac{1}{50} + \frac{5}{56}} \log^5 Q\right)^{-1} + O\left(N^2 Q^{-107/140}\right) \gg N^2 Q^{-51/466}$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/101}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ из них.

3-случай. Существует исключительный ноль $\tilde{\beta}$ и пусть $\tilde{r} > Q^{1/28}$. В этом случае применим лемму 7.1 на (78) и лемму 7.4 на (54) имеем

$$\begin{aligned} I_1(\vec{b}) &= M_1 + M_2 + M_3 + O\left(N^2 Q^{-1}\right) = M_0 + M_2 + M_3 + O\left(N^2 Q^{-4/5}\right) = \\ &= M_0 \left(1 + O\left(\omega^5 \exp(-c_3 \delta^{-1/2})\right)\right) + O\left(N^2 Q^{-1/38}\right) \end{aligned}$$

за исключением не более чем $X^3 Q^{-1/56}$ значений $(b_1, b_2, b_3) \in [1, X]^3$ из них.

Как и в предыдущих двух случаях, требуемая нижняя оценка $I_1(\vec{b})$ следует из (56):

$$I_1(\vec{b}) = M_0 \left(1 + O\left(\omega^5 \exp(-c_3 \delta^{-1/2})\right)\right) + O\left(N^2 Q^{-1/38}\right) \gg N^2 Q^{-51/466}. \quad (80)$$

Поэтому, на основании (80) и леммы 2.1 из (17) имеем следующую оценку:

$$I(\vec{b}) > c_{10} N^2 Q^{-51/466} - N^2 Q^{-1/9} \gg N^2 Q^{-51/466}.$$

То есть оценка $I(\vec{b}) > 0$ справедлива для всех $(b_1, b_2, b_3) \in W_{3,5}(X)$ за исключением не более, чем $X^3 Q^{-1/101} + X^3 Q^{-1} + X^3 Q^{-1/56} \leq X^{3-\varepsilon}$ значений из них.

Таким образом, мы доказали лемму 2.2 и утверждение а) теоремы.

Теперь оценим, количество решений $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ системы (2). Пусть $R(\vec{b})$ — количество решений системы (2) в простых числах с условием $p_j \leq N$ и $\frac{X}{2} < b_1, b_2, b_3 \leq X$, то есть

$$R(\vec{b}) = \sum_{\substack{p_j \leq N \\ a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5 = b_i}} 1$$

. Известно, что в (16) суммирование ведётся по всем n_j для которых выполняются условия $L < n_1, \dots, n_5 \leq N$ и $a_{i1}n_1 + \dots + a_{i5}n_5 = b_i$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда из (16) имеем

$$\begin{aligned} I(\vec{b}) &\leq \log^5 N \sum_{\substack{p_1, \dots, p_5 \leq N \\ a_{i1}p_1 + \dots + a_{i5}p_5 = b_i}} 1 + \sum_{k \geq 2} \sum_{\substack{p_1^k, \dots, p_5^k \leq N \\ a_{i1}p_1^k + \dots + a_{i5}p_5^k = b_i}} \log p_1 \dots \log p_5 = \\ &= \log^5 N R(\vec{b}) + O\left(N^{\frac{1}{2}} \log^4 N\right) \end{aligned}$$

из этого неравенства и из равенства (17) получим

$$I_1(\vec{b}) + I_2(\vec{b}) \leq \log^5 N R(\vec{b}) + O\left(N^{1/2} \log^4 N\right).$$

Здесь, учитывая лемму 2.1 мы получим оценку

$$R(\vec{b}) \geq \frac{I_1(\vec{b})}{\log^5 N} - \frac{N^2 Q^{-1/9}}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^{1/2}}{\log N}\right) = \frac{I_1(\vec{b})}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^2 Q^{-1/9}}{\log N}\right)$$

для количества решений системы (2). Теперь, для $I_1(\vec{b})$, мы воспользуемся леммой 2.2, мы получим оценку

$$R(\vec{b}) \geq \frac{N^2 Q^{-51/466}}{\log^5 N} - O\left(\frac{N^2 Q^{-1/9}}{\log N}\right) \gg \frac{N^{2-\frac{51\delta}{466}}}{\log^5 N}$$

для всех (b_1, b_2, b_3) за исключением не более, чем $X^{3-\varepsilon}$ значений $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$ из них. Здесь, учитывая, что $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \leq \sqrt{3}X$ и $N = 108B^5X \geq 36\sqrt{3}B^5|\vec{b}|$ то следует часть b) теоремы.

8. Заключение

Из выше изложенного следует, что система (2) разрешима в простых числах для всех троек (b_1, b_2, b_3) , $1 \leq b_1, b_2, b_3 \leq X$, за исключением не более чем $X^{3-\varepsilon}$ троек из них. Метод использованный при доказательстве этого утверждения дает возможность доказать аналогичное утверждение для системы $b_i = a_{i1}p_1 + \dots + a_{i6}p_6$, $i = 1, 2, 3$. Тем самым, исследование исключительного множества системы (1) при $s = 3$ и $m = 5$, а также при $s = 3$ и $m = 6$ завершается с учетом работ Wu Fang [2], M.C.Liu, K.M.Tsang [3] и И.Аллакова [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков, И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел. – Термез: Сурхон нашр. 2021. 160 с.
2. Wu Fang. On the solutions of the systems of linear equations with prime variables. Acta Math.Sinica.-1957.-V.7.-P.102-121.
3. Liu, M. C., Tsang, K. M. On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach's problem, J. reine angew. Math. 399 (1989), 109-136.
4. Аллаков, И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах, Изв. вузов. Матем., 2006, № 9. с. 10-16.
5. Аллаков, И., Исраилов, М. И. О разрешимости системы линейных уравнений в простых числах. Докл. АН РУз. –Ташкент, 1992. - № 10-11. с. 12-15.
6. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1947, том 22, с. 3-179.
7. Abayev, B.Kh., Allakov, I. On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers. Uzbek Mathematical journal. Tashkent. 2020. № 3. p. 16-24.
8. Аллаков, И., Абраев, Б.Х. Об исключительном множестве одной системы линейных уравнений с простыми числами. Чебышевский сборник т.24 № 2. 2023. с.15-37.
9. Эрдонов, Б.Х., Об условиях разрешимости системы линейных уравнений состоящей из трёх уравнений с пятью неизвестными в простых числах. Научный вестник НамГУ, 2024. № 4. с. 116-121.

10. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел. -М.: Наука, 1983. -240 с.
11. Davenport, H. Multiplicative number theory. Third edition. Springer.-2000. 177 p.
12. Колмогоров, А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1976 г. 543 с.
13. Liu, M. C., Tsang, K. M. Small prime solutions of linear equations. Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York. 1989. p. 595-624.
14. Hua, L. K. Additive Theory of Prime Numbers, Transl. of Math. Monographs 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965. 190 p.
15. Hasse, H. Vorlesungen über Zahlentheorie, Grundlehren Math. Wiss. 59, Berlin-Heidelberg-New York 1964. 520 p.
16. Hardy, G. H., Wright, E. M. An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed., Oxford 1979. 621 p.

REFERENCES

1. Allakov, I., 2021, “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of some additive problems in number theory”, *Termez: Surxon nashr*. 160 p.
2. Wu Fang. 1957, “On pairs of linear equations in three prime variables and an application to Goldbach’s problem”, *J.reine angew. Math.*, vol.399. pp. 102–121.
3. Liu, M. C. & Tsang, K. M. 1989, “On the solutions of the systems of linear equations with prime variables”, *Acta Math.Sinica.*, vol.7. pp. 109–136.
4. Allakov, I. 2006, “On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers”, *Izv. universities Mat.*, vol.9. pp. 10–16.
5. Allakov, I., Israilov, M.I. 1992, “On the solvability of a system of linear equations in prime numbers”, *Dokl. AN RUz. – Tashkent*, vol.10. pp. 12–15.
6. Hua Lo-Ken. 1947, “Additive prime number theory”, *Tr. Math. Institute named after V.A. Steklova*, vol.22. pp. 3–179.
7. Abrayev, B.Kh., Allakov, I. 2020, “On solvability conditions of a pair of linear equations with four unknowns in prime numbers”, *Uzbek Mathematical journal. Tashkent*, vol.3. pp. 16–24.
8. Allakov, I., Abrayev, B.Kh. 2023, “On the exceptional set of one system of linear equations with prime numbers”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol.24 № 2. pp. 15–37.
9. Erdonov, B.X. 2024, “On the conditions of solvability of a system of linear equations consisting of three equations with five unknowns in prime numbers”, *Scientific bulletin of NamSU* № 4. pp. 116–121.
10. Karatsuba, A.A. 1983, “Fundamentals of analytic number theory”, *Main editorial office of physical and mathematical literature publishing house, Nauka, M.*, 543 p.
11. Davenport, H. 2000, “Multiplicative number theory. Third edition”, *Springer*, 177 p.
12. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1976, “Elements of the theory of functions and functional analysis”, *Nauka, M.*, 240 p.

13. Liu, M. C., Tsang, K. M. 1989, “Small prime solutions of linear equations”, *Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York.*, pp. 595–624.
14. Hua, L. K. 1965, “Additive Theory of Prime Numbers”, *Transl. of Math. Monographs 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 190 p.
15. Hasse, H. 1964, “Vorlesungen über Zahlentheorie”, *Grundlehren Math. Wiss. 59, Berlin-Heidelberg-New York*, 520 p.
16. Hardy, G. H. 1979, “An Introduction to the Theory of Numbers”, *Wright E. M. , 5th ed., Oxford*, 621 p.

Получено: 13.03.2024

Принято в печать: 04.09.2024