

УДК 51(091)+511.46

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-5-10

Владимир Григорьевич Чирский
(к 75-летию со дня рождения)

А. И. Шафаревич, Е. И. Деза, Н. М. Добровольский, А. О. Иванов, А. И. Козко,
Е. С. Крупицын, В. Ю. Матвеев, Ю. В. Нестеренко, А. Л. Семёнов, В. Н. Чубариков,
М. В. Шамолин, Н. Н. Добровольский



Владимир Григорьевич Чирский родился в Москве 30 июня 1949 года. Его родителями были Григорий Михайлович Чирский, начальник одного из управлений МПС и Елена Ивановна Фирстова, преподаватель английского языка на Госкурсах «Иняз». Его брат, Алексей Григорьевич Чирский, 1932 года рождения, был горным инженером. У него прекрасная семья, жена – Галина Владимировна, две дочери, Наталья и Ольга, четыре внука и две внучки.

Владимир Григорьевич окончил среднюю школу № 710 с серебряной медалью. Он учился на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и на третьем курсе начал изучать теорию чисел под руководством профессора А. Б. Шидловского, заведующего кафедрой теории чисел МГУ. По окончании факультета был рекомендован в аспирантуру отделения математики. К этому моменту им были опубликованы 4 статьи. С 1973 года начал работать на кафедре математического анализа сначала почасовиком, с 1975 года ассистентом кафедры. Защитил кандидатскую диссертацию в 1978 году и с 1983 года работал доцентом кафедры математического анализа. После защиты в 2000 году докторской диссертации работает профессором этой кафедры с 2003 года по настоящее время. С 1998 г. по 2006 г. работал заместителем декана механико-математического факультета по учебной работе. С 2007 года до 2020 года исполнял обязанности заведующего кафедрой теории чисел МПГУ, с 2006 года работает профессором в РАНХиГС. Кроме того, он был редактором раздела «Теория чисел» РЖ «Математика» ВИНТИ РАН.

В. Г. Чирский преподавал и читал лекции на различных факультетах МГУ: механико-математическом, химическом, геологическом, факультете психологии. Он является ответственным на кафедре за преподавание на химическом факультете. Он участвовал в издании ряда учебных пособий по математическому анализу и приложениям математики к задачам естествознания. Кроме того, он многие годы был старшим экзаменатором на вступительных экзаменах по математике на различных факультетах МГУ. Опыт этих экзаменов нашел отражение в пособиях по элементарной математике. Под его руководством защищены четыре кандидатские диссертации, он был научным консультантом по докторской диссертации, подготовлены к защите диссертации еще двух его учеников.

Научные интересы В. Г. Чирского относятся к теории трансцендентных чисел в p -адических полях и прямых произведениях этих полей. Используемый им метод представляет собой некоторую модификацию метода Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. В работах В. Г. Чирского был введён в рассмотрение новый класс степенных рядов, к которому удалось применить метод Зигеля-Шидловского для исследования глобальных соотношений. Это — класс F -рядов т. е. рядов вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n! \cdot z^n,$$

коэффициенты которых — алгебраические числа, удовлетворяющие некоторым условиям. Известным примером F -ряда является ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot (-z)^n$. Разумеется, если такой ряд отличен от многочлена, он имеет в поле $\mathbb{C}$ нулевой радиус сходимости.

В. Г. Чирский доказал теоремы для F -рядов, которые представляют собой некоторые аналоги основных теорем А. Б. Шидловского для E -функций.

Полученные им результаты допускают формулировку в следующих терминах. Рассмотрим множество точек вида:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

образующих бесконечномерное пространство. Это пространство представляет собой прямое произведение полей p -адических чисел. Именно, координата с номером n этого вектора представляет собой p_n -адическое число, где p_n — простое число с номером n . Это прямое произведение имеет структуру коммутативного кольца с единицей (и с делителями нуля). Его принято называть кольцом полиадических чисел. Элементы $\mathbf{a}$ кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, a_m \in \mathbb{N}, 0 \leq a_m \leq m.$$

Сумму этого ряда в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначаем $\mathbf{a}^{(p)}$. Как отмечено выше, полиадическое число $\mathbf{a}$ можно рассматривать, как точку бесконечномерного пространства с координатами $\mathbf{a}^{(p_n)}$, где p_n — простое число с номером n . Следует отметить, что ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!$, $a_n \in \mathbb{Q}$ могут сходиться не во всех полях $\mathbb{Q}_p$. В случае, когда такой ряд расходится лишь в конечном множестве полей $\mathbb{Q}_p$, мы говорим о *почти полиадических* числах и отождествляем их с элементами прямого произведения всех полей $\mathbb{Q}_p$, кроме упомянутого выше конечного множества.

Можно рассмотреть и прямое произведение полей $\mathbb{K}_\nu$, где ν продолжает p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ на поле $\mathbb{K}$ алгебраических чисел конечной степени κ . Если ν продолжает p -адическое нормирование, то поле $\mathbb{K}_\nu$ представляет собой алгебраическое расширение поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени κ_ν и справедливо равенство $\sum_\nu \kappa_\nu = \kappa$, где суммирование производится по всем нормированиям ν , продолжающим p -адическое нормирование. При этом мы будем говорить о $\mathbb{K}$ — *полиадических* и, соответственно, о $\mathbb{K}$ — *почти полиадических* числах. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначаем $\mathbf{a}^{(\nu)}$ его координату в поле $\mathbb{K}_\nu$.

Если существует $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathbf{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathbf{a}^{(\nu)}) = 0$ в каждом поле $\mathbb{K}_\nu$ этого прямого произведения), то говорим, что $\mathbf{a}$ — *алгебраический элемент*. Если элемент $\mathbf{a}$ не является алгебраическим, то его называют *трансцендентным*. Трансцендентность элемента означает, что для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p и нормирование ν поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$ такие, что $P(\mathbf{a}^{(\nu)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_\nu$. Назовём элемент $\mathbf{a}$ *бесконечно трансцендентным*, если для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых

чисел p , для каждого из которых есть нормирование ν поля $\mathbb{K}$, продолжающее p -адическое нормирование такое, что $P(\mathfrak{a}^{(\nu)}) \neq 0$ в поле $\mathbb{K}_\nu$. Элемент $\mathfrak{a}$ называется *глобально трансцендентным*, если для любого $P(x)$ – многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathfrak{a}^{(\nu)}) \neq 0$ выполняется во всех полях $\mathbb{K}_\nu$ рассматриваемого прямого произведения.

В. Г. Чирским получены теоремы о бесконечной линейной и бесконечной алгебраической независимости совокупности значений F -рядов, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в алгебраических точках. Эти теоремы представляют собой некоторые аналоги фундаментальных теорем А. Б. Шидловского для E -функций.

Общие теоремы метода Зигеля-Шидловского и его модификации имеют приложения к обобщенным гипергеометрическим рядам.

Для множества действительных чисел $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s\}$, относительно которых предполагаем, что числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ – не целые ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n n!} z^n$$

называют обобщённым гипергеометрическим рядом. Эти ряды относятся к так называемым рядам Жевре порядка $s + 1 - r$.

Если $r - s \leq 0$, то рассматриваемый ряд представляет собой целую функцию. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ он, после некоторой замены переменной, входит в класс E -функций Зигеля и к исследованию их значений применим известный метод Зигеля-Шидловского в теории трансцендентных чисел. Применению этого метода к гипергеометрическим E -функциям посвящены работы В. Х. Салихова, в которых получено близкое к полному решение проблемы. При $r - s = 1$ ряд имеет конечный радиус сходимости. При условии рациональности чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s$ он входит в класс G -функций Зигеля и исследованию таких рядов посвящены работы А. И. Галочкина, Г. В. Чудновского, Э. Бомбье-ри, И. Андре и др. Если же $r - s > 1$, то ряд, отличный от многочлена, имеет нулевой радиус сходимости в поле $\mathbb{C}$. При рациональных параметрах получаются F -ряды. Таким образом, в случае рациональных параметров применимы общие теоремы метода Зигеля-Шидловского и его модификации.

В случае, когда среди параметров рассматриваемых гипергеометрических рядов содержатся иррациональные алгебраические числа, используются аппроксимации Эрмита-Паде. В случаях $r - s \leq 1$ рассмотреть трансцендентные значения параметров не удаётся.

Однако при $r - s > 1$ можно рассмотреть такие ряды с некоторыми трансцендентными параметрами. Эти вопросы В. Г. Чирский рассмотрел в статьях в приведённом ниже списке. Трансцендентные параметры в упомянутых работах представляют собой полиадические числа Лиувилля. Полиадическое число $\mathfrak{a}$ называется *полиадическим числом Лиувилля*, если для любых натуральных чисел n, P существует целое число A такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство $|\mathfrak{a}^{(p)} - A|_p < |A|^{-n}$. Установлена бесконечная линейная независимость значений рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_1)_n \dots (\mu_m)_n z^n,$$

среди параметров которых есть полиадические числа Лиувилля определённого вида. Доказано, что для некоторых полиадических чисел Лиувилля μ существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в каждом поле $\mathbb{Q}_p$ хотя бы одно из p -адических чисел $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu)_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu + 1)_n$ является трансцендентным. Кроме того, доказано, что это утверждение выполняется в поле $\mathbb{Q}_2$ и указан способ проверки этого утверждения для конкретных простых чисел p .

В статье «Владимир Григорьевич Чирский (к 70-летию)», опубликованной в журнале *Чебышевский сборник*, 2019, том 20, выпуск 2, с. 587-598 приведён список работ, опубликованных В. Г. Чирским до 2019 года включительно. Поэтому здесь будут указаны лишь научные работы за последние 5 лет. Они сгруппированы по темам.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ В. Г. ЧИРСКОГО

1. Чирский В. Г. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, том 26, № 3, с. 286-305.
2. Чирский В. Г. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, 2020, том 27, № 2, с. 175-184.
3. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлера типа с параметром - лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Академии наук, 2020, том 494, с. 65-67 (перевод Chirskii V.G. Arithmetic Properties of Euler-Type Series with a Liouvillean Polyadic Parameter // Doklady Math, 102, № 2, с. 68-70).
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2021, том 22, № 2, с. 304-312.
5. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of an Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // Russian Journal of Mathematical Physics, 2021, том 28, № 3, с. 293-302.
6. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник, 2021, том 22, № 3, с. 245-255.
7. Чирский В. Г. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлера типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1, с. 153-166.
8. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 505, с. 63-65. (перевод: New problems in the theory of transcendental polyadic numbers // 2022, том 106, № 1, с. 265-267).
9. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, том 506, с. 95-107. (перевод: Arithmetic Properties of the Values of Generalized Hypergeometric Series with Polyadic Transcendental Parameters // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № 2, с. 386-397).
10. Chirskii V. G. Estimates of Linear Forms and Polynomials in Polyadic Numbers // Doklady Mathematics, том 106, № Suppl.2, с. S131-S133.
11. Chirskii V. G. Polyadic Estimates for F-Series // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № Suppl.2, с. S134-S136.
12. Chirskii V. G. Polyadic Liouville Numbers // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S137-S141.
13. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Polyadic Integers // Doklady Mathematics, 2022, том 106, № S2, с. S142-S146.

14. Chirskii V. G. Infinite Linear Independence with Constraints on a Subset of Prime Numbers for Values of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // *Doklady Mathematics*, 2022, том 106, № S2, с. S154-S160.
15. Chirskii V. G. On Transformations of Periodic Sequences // *Doklady Mathematics*, 2022, том 106, № S2, с. S147-S149.
16. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Polyadic Integers // *Doklady Mathematics*, 2022, том 106, № S2, с. S142-S146.
17. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Values at Polyadic Liouville Points of Euler-Type Series with Polyadic Liouville Parameter // *Doklady Mathematics*, 2022, том 106, № S2, с. S150-S153.
18. Chirskii V. G. On Polyadic Liouville Numbers // *Doklady Mathematics*, 2022, том 106, № S2, с. S161-S164.
19. Чирский В. Г. Трансцендентность p -адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 2023, том 510, с. 29-32. (перевод: Transcendence of p -Adic Values of Generalized Hypergeometric Series with Transcendental Polyadic Parameters // *Doklady Mathematics*, 2023 том 107, № 2, с. 109-111.)
20. Чирский В. Г. О полиадических числах // *Чебышевский сборник*, 2023, том 24, № 2, с. 276-283.
21. Chirskii V. G. Algebraic properties of points of some infinite-dimensional metric space // *Journal of Mathematical Sciences*, 2023 том 276, № 3, с. 430-436.
22. Чирский В. Г. Трансцендентность некоторых 2-адических чисел // *Чебышевский сборник*, 2023, том 24, № 5, с. 194-200.

Публикации о математических моделях экономических задач

23. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса // *Чебышевский сборник*, 2019, том 20, № 4(72), с. 66-75.
24. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея-Касса-Купманса // *Чебышевский сборник*, 2019, том 20, № 4(72), с. 76-85.
25. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. О задаче Рамсея - Касса - Купманса для потребительского выбора // *Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры* том 182, с. 39-44.
26. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея - Касса - Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // *Чебышевский сборник*, 2021, том 22, с. 121-134.
27. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Функция потребления в модели экономического роста Рамсея - Касса - Купманса в случае стационарности функции сбережения // *Чебышевский сборник*, 2022, том 23, № 1, с. 116-127.
28. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов А. Ю., Чирский В. Г. Метод приближенного решения системы дифференциальных уравнений из модели Рамсея - Касса - Купманса, основанный на решении в квадратурах одного класса сходных систем // *Чебышевский сборник*, 2022, том 23, № 4(85), с. 110-120.

29. Kozko A. I., Luzhina L. M., Popov A. Yu, Chirskii V. G. On the Ramsey–Cass–Koopmans Problem for Consumer Choice // Journal of Mathematical Sciences, 2023, том 277, № 5, с. 745-749.
30. Козко А. И., Лузина Л. М., Попов Антон Юрьевич, Чирский В. Г. Об идеальной экономической ситуации - росте капитала и функции потребления в некоторых моделях экономического роста // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 2, с. 256-265.

Другие работы

31. Василий Ильич Нечаев. К 100-летию юбилею. Чубариков В. Н., Чирский В. Г., Деза Е. И., Баулина Ю. Н., Котова Л. В., Неискашова Е. В., Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. // Чебышевский сборник, 2020, том 21, № 1, с. 383-393.
32. Памяти Вячеслава Александровича Артамонова. Шафаревич А. И., Чубариков В. Н., Орлов Д. О., Иванов А. О., Михалёв А. В., Чирский В. Г., Ольшанский А. Ю., Зайцев М. В., Кожухов И. Б., Канель-Белов А. Я., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н. // Чебышевский сборник, 2021, том 22, № 5, с. 417-418.
33. Юрий Валентинович Нестеренко (к 75-летию). Шафаревич А. И., Фоменко А. Т., Чубариков В. Н., Иванов А. О., Чирский В. Г., Берник В. И., Быковский В. А., Галочкин А. И., Демидов С. С., Гашков С. Б., Нижников А. И., Фомин А. А., Деза Е. И., Канель-Белов А. Я., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Салихов В. Х. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1(82), с. 10-20.
34. Из истории кафедры теории чисел: к 150-летию Московского педагогического государственного университета. Деза Е. И., Добровольский Н. М., Иконникова Т. К., Котова Л. В., Крупицын Е. С., Реброва И. Ю., Чанга М. Е., Чирский В. Г. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 3(84), с. 282-303.
35. Василий Иванович Берник (к 75-летию). Нестеренко Ю. В., Быковский В. А., Бухштабер В. М., Чирский В. Г., Чубариков В. Н., Лауринчикас А., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Бударина Н. В., Бересневич В., Владимирович В. Д., Иванович К. Н. // Чебышевский сборник, 2022, том 23, № 1, с. 6-9.
36. К 55-летию профессора М. В. Шамолина. Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В., Козлов В. В., Журавлев Ю. И., Михалёв А. В., Овчинников А. В., Орлов Д. О., Попов В. Л., Романов В. Г., Семёнов А. Л., Чирский В. Г., Шамолин В. А. // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022, том 210, с. 3-5.
37. Сергей Сергеевич Демидов (к 80-летию со дня рождения). Шафаревич А. И., Чубариков В. Н., Семенов А. Л., Бухштабер В. М., Иванов А. О., Тихомиров В. М., Визгин Вл. П., Чирский В. Г., Козлов В. В., Козлов М. В., Зайцев Е. А., Смирнова Г. С., Чиненова В. Н., Добровольский Н. М. // Чебышевский сборник, 2023, том 24, № 1, с. 334-355.
38. Александр Иванович Галочкин (к 80-летию со дня рождения). Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский // Чебышевский сборник, 2024, том 25, № 2, с. 20-29.