ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17. Выпуск 1.

УДК 512.548.2 + 512.571

# О ЧАСТИЧНЫХ $n$-АРНЫХ ГРУППОИДАХ, У КОТОРЫХ КАЖДОЕ ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЯВЛЯЕТСЯ КОНГРУЭНЦИЕЙ

А. В. Решетников (г. Москва)

**Аннотация**

В монографии «Universal algebra» Г. Гретцер приводит следующий пример. Пусть $A$ — универсальная алгебра (множество с некоторым набором операций $\Sigma$). Возьмём произвольное подмножество $B \subseteq A$ и для каждой операции $f \in \Sigma$ (обозначим её арность через $n$) рассмотрим, каким образом $f$ действует на элементы из $B^n$. Не обязательно $f(B) \subseteq B$, поэтому в общем случае $B$ не является подалгеброй алгебры $A$.

Если же ввести понятие частичной операции на $B$ как отображения некоторого подмножества множества $B^n$ в множество $B$, то $B$ будет множеством с заданным на нём набором частичных операций. Такие множества называются частичными универсальными алгебрами. В нашем примере $B$ будет частичной универсальной подалгеброй алгебры $A$ в том смысле, что множество $B$ будет замкнуто относительно всех частичных операций частичной алгебры $B$. Таким образом, частичные универсальные алгебры естественным образом возникают при изучении обычных универсальных алгебр.

Понятие конгруэнции универсальной алгебры обобщается на частичные алгебры. Известно, что конгруэнции частичной универсальной алгебры $A$ всегда образуют решётку, а если $A$ является полной (то есть обычной) алгеброй, то решётка конгруэнций алгебры $A$ является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на $A$. Решётка конгруэнций частичной универсальной алгебры является её важной характеристикой.

Для важнейших классов универсальных алгебр был получен ряд результатов, характеризующих алгебры $A$, не имеющие никаких конгруэнций, кроме тривиальных (отношение равенства на $A$ и отношение $A^2$). Оказалось, что в большинстве случаев, когда решётка конгруэнций универсальной алгебры тривиальна, сама алгебра имеет отнюдь не тривиальное строение.

А что можно сказать про алгебры $A$, у которых решётка конгруэнций, наоборот, содержит все отношения эквивалентности на $A$? Оказывается, что в этом случае каждая операция $f$ универсальной алгебры $A$ является либо константой ($|f(A)| = 1$), либо проекцией ($f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \equiv x_i$). Кожуховым И. Б. были описание полугруппы, у которых каждое отношение эквивалентности является односторонней конгруэнцией. Интересно обобщить эти результаты на случай частичных универсальных алгебр.

В данной работе изучаются частичные $n$-арные группоиды $G$, у которых операция $f$ удовлетворяет следующему условию: для любых элементов $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n \in G$ значение выражения $f(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, ..., x_n)$ определено не менее, чем для трёх различных элементов $y \in G$. Доказывается, что если каждое отношение эквивалентности на $G$ является конгруэнцией частичного $n$-арного гурппоида $(G, f)$, то при определённых условиях на $G$ частичная операция $f$ является константой.

*Ключевые слова:* частичный $n$-арный группоид, односторонняя конгруэнция, $R_i$-конгруэнция, решётка конгруэнций, решётка отношений эквивалентности.

*Библиография:* 15 названий.

# ON PARTIAL $n$-ARY GROUPOIDS WHOSE EQUIVALENCE RELATIONS ARE CONGRUENCES

A. V. Reshetnikov (Moscow)

**Abstract**

G. Grätzer's gives the following example in his monograph «Universal algebra». Let $A$ be a universal algebra (with some family of operations $\Sigma$). Let us take an arbitrary set $B \subseteq A$. For all of the operations $f \in \Sigma$ (let $n$ be the arity of $f$) let us look how $f$ transformas the elements of $B^n$. It is not necessary that $f(B) \subseteq B$, so in the general case $B$ is not a subalgebra of $A$. But if we define partial operation as mapping from a subset of the set $B^n$ into the set $B$. then $B$ be a set with a family of partial operations defined on it. Such sets are called partial universal algebras. In our example $B$ will be a partial universal subalgebra of the algebra $A$, which means the set $B$ will be closed under all of the partial operations of the partial algebra $B$. So, partial algebras can naturally appear when studying common universal algebras.

The concept of congruence of universal algebra can be generalized to the case of partial algebras. It is well-known that the congruences of a partial universal algebra $A$ always from a lattice, and if $A$ be a full algebra (i.e. an algebra) then the lattice of the congruences of $A$ is a sublattice of the lattice of the equivalence relations on $A$. The congruence lattice of a partial universal algebra is its important characteristics. For the most important cases of universal algebra some results were obtained which characterize the algebras $A$ without any congruences except the trivial congruences (the equality relation on $A$ and the relation $A^2$). It turned out that in the most cases, when the congruence lattice of a universal algebra is trivial the algebra itself is definitely not trivial.

And what can we say about the algebras $A$ whose equivalence relation is, vice versa, contains all of the equivalence relations on $A$? It turns out, in this case any operation $f$ of the algebra $A$ is either a constant ($|f(A)| = 1$) or a projection ($f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \equiv x_i$). Kozhukhov I. B. described the semigroups whose equivalence relations are one-sided congruences. It is interesting now to generalize these results to the case of partial algebras.

In this paper the partial $n$-ary groupoids $G$ are studied whose operations $f$ satisfy the following condition: for any elements $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n \in G$ the value of the expression $f(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, ..., x_n)$ is defined for not less that three different elements $y \in G$. It will be proved that if any of the congruence relations on $G$ is a congruence of the partial $n$-ary groupoid $(G, f)$ then under specific conditions for $G$ the partial operation $f$ is not a constant.

*Keywords:* partial $n$-ary groupoid, one-sided congruence, $R_i$-congruence, congruence lattice, equivalence relation lattice.

*Bibliography:* 15 titles.

## 1. Введение

Решётка конгруэнций универсальной алгебры $A$ является важной характеристикой данной универсальной алгебры. Известно, что эта решётка является подрешёткой решётки всех отношений эквивалентности на множестве $A$. Естественно спросить: для каких алгебр $A$ две эти решётки совпадают? Полностью такие алгебры были описаны в работе [1]. Там же их характеристика была уточнена для частных случаев универсальных алгебр — группоидов и полугрупп.

Обобщением понятия универсальной алгебры является понятие частичной универсальной алгебры, т. е. множества с частичными операциями, не обязательно одной и той же арности (см. главу 2 монографии [2] и монографию [3]). Напомним, что частичную операцию на множестве $A$ можно определить как отображение некоторого подмножества множества $A^n$ в множество $A$. Алгебры со всюду определёнными операциями будем называть *полными*.

Понятие конгруэнции универсальной алгебры было перенесено на частичные универсальные алгебры; по-видимому, впервые это было сделано в работе [4]. Работа [5] целиком посвящена конгруэнциям частичных универсальных алгебр, особое внимание уделено обоснованию определения конгруэнции. В той же работе введено понятие сильной конгруэнции частичной универсальной алгебры, дана некоторая характеристика сильных конгруэнций, представлена их связь с конгруэнциями полных универсальных алгебр.

Известно, что конгруэнции частичной универсальной алгебры $A$ всегда образуют решётку, причём данная решётка не обязательно является подрешёткой решётки отношений эквивалентности на $A$; пример такой алгебры $A$ приведён в работе [6][1]. Любая алгебраическая (то есть компактно порождённая) решётка изоморфна решётке конгруэнций некоторой частичной универсальной алгебры [2, §18, теорема 1].

В работе [7] доказано, что класс всех решёток, изоморфных решёткам сильных конгруэнций *конечных* частичных универсальных алгебр, совпадает с классом всех решёток, изоморфных решёткам конгруэнций *конечных* полных универсальных алгебр.

В работе [6] понятие конгруэнции частичной универсальной алгебры было обобщено до понятия $R_i$-конгруэнции частичного $n$-арного группоида. Было доказано, что для любого $i$ $R_i$-конгруэнции частичного $n$-арного группоида $G$ образуют решётки, которые не обязательно являются подрешётками решётки отношений эквивалентности на $G$ и не обязательно являются надрешётками решётки конгруэнций на $G$. Также в работе [6] была получена характеристика частичных $n$-арных группоидов $G$, для которых решётка отношений эквивалентности совпадает с какой-либо из решёток $R_i$-конгруэнций на $G$.

В данной работе, продолжая исследования, проведённые в работах [1] и [6], мы опишем широкий класс частичных $n$-арных группоидов, у которых решётка отношений эквивалентности совпадает с решёткой конгруэнций.

## 2. О конгруэнциях частичных $n$-арных группоидов

Отображение $f : A' \to A$ называется *частичной $n$-арной операцией* на множестве $A$, если $A' \subseteq A^n$. При этом множество $A'$ называется *областью определения* частичной операции $f$, вводится обозначение $A' = \operatorname{dom} f$. Мы всегда будем полагать, что *множество $A$ непусто, степень $n$ — целое неотрицательное число*, однако в качестве областей определения частичных операций мы будем допускать произвольные множества. В случае $\operatorname{dom} f = A$ будем говорить, что $f$ — *полная* операция.

Пусть $\Sigma = \{f_\alpha | \alpha \in I\}$ — множество (конечное или бесконесное) частичных операций, заданных на $A$. Тогда $A$ называется *частичной универсальной алгеброй* с набором операций $\Sigma$. Если $\Sigma = \{f\}$, где $f$ — частичная $n$-арная операция, то *частичным $n$-арным группоидом* с частичной операцией $f$, и использовать для неё обозначение $(A, f)$.

Частичные универсальные алгебры и частичные $n$-арные группоиды со всюду определёнными операциями будем называть *полными.*

Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид. Отношение эквивалентности $\rho \subseteq G^2$ называется *конгруэнцией*, если для любых элементов $a_1$, ..., $a_n$, $b_1$, ..., $b_n \in G$ выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered}\text{если } (a_1, b_1) \in \rho,\ ...,\ (a_n, b_n) \in \rho\\ \text{и } f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n) \text{ определены,}\\ \text{то } (f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \rho.\end{gathered}$$

Пусть $G$ — частичный $n$-арный группоид с частичной операцией $f$. Зафиксируем индекс $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Для произвольной строчки $\alpha = (a_1,\ ...,\ a_{i-1},\ a_{i+1},\ ...,\ a_n)$ определим частичную унарную операцию $\varphi_{i,\alpha}(x)$ следующим образом [2]:

$$\varphi_{i,\alpha}(x) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n). \tag{1}$$

[1]В работе [7] в первом абзаце допущена неточность: утверждается, что конгруэнции *алгебры* образуют подрешётку решётки её отношений эквивалентности, при этом под алгебрами подразумеваются частичные универсальные алгебры, что делает утверждение неверным. По-видимому, данная ошибка не влияет на основные результаты работы [7].

[2]Такая операция называется *трансляцией.*

Назовём отношение эквивалентности $\rho \subseteq G^2$ *конугруэнцией на $i$-й позиции*, или *$R_i$-конгруэнцией*, или *односторонней конгруэнцией*, если для любого набора $\alpha \in G^{n-1}$ отношение $\rho$ является конгруэнцией частичного унарного группоида $(G, \varphi_{i,\alpha})$.

Рассмотрим частичные $n$-арные группоиды $(G, f)$, удовлетворяющие условию

(∗) для любого значения $k \in \{1, ..., n\}$, для любых элементов $x_1$, ..., $x_{k-1}$, $x_{k+1}$, ..., $x_n \in G$ значение выражения $f(x_1, ..., x_{k-1}, y, x_{k+1}, ..., x_n)$ определено не менее, чем для трёх различных элементов $y \in G$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид, для которого выполнено условие (∗). Если каждое отношение эквивалентности на $G$ является конгруэнцией и для некоторого набора элементов $(a_1, ..., a_n) \in \operatorname{dom} f$ имеет место соотношение*

$$f(a_1, ..., a_n) \notin \{a_1, ..., a_n\},$$

*то для любых $x_1$, ..., $x_n \in G$ выполняется импликация*

$$x_1, ..., x_n \in \operatorname{dom} f \quad \Rightarrow \quad f(x_1, ..., x_n) = f(a_1, ..., a_n).$$

Для доказательства нам понадобится несколько вспомогательных определений и лемм.

Пусть $f$ — частичная $n$-арная операция, заданная на множестве $A$. Назовём $f$ *константой*, если $|f(A, ..., A)| \leqslant 1$. Будем говорить, что $f$ — *проекция* на $i$-ый аргумент ($1 \leqslant i \leqslant n$), если для любых $(x_1, ..., x_n) \in \operatorname{dom} f$ выполняется равенство $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$.

Пусть $G$ — частичный $n$-арный группоид с частичной операцией $f$. Зафиксируем какое-либо значение $i \in \{1, ..., n\}$. Будем говорить, что набор элементов $\alpha = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) \in G^{n-1}$ является *$R_i$-единицей*[3] частичного $n$-арного группоида $(G, f)$, если частичная операция $\varphi_{i,\alpha}$, определённая соотношением (1), является проекцией в частичном унарном группоиде $(G, \varphi_\alpha)$. Будем говорить, что $\alpha$ является *обобщённым $R_i$-нулём* в $(G, f)$, если $\varphi_{i,\alpha}$ — константа в $(G, \varphi_{i,\alpha})$.

Следующее утверждение является следствием из теоремы 2.3 работы [6]:

Лемма 1. *Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид, удовлетворяющий условию (∗). Каким бы ни было значение $i$, все отношения эквивалентности на $G$ являются $R_i$-конгруэнциями в том и только том случае, если для каждого набора элементов $\alpha \in G^{n-1}$: выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

*(i) $\alpha$ является $R_i$-единицей;*

*(ii) $\alpha$ является обобщённым $R_i$-нулём.*

Далее будем решётку $R_i$-конгруэнций частичного $n$-арного группоида $G$ обозначать через $R_i\mathrm{Con}\, G$. Для решётки отношений эквивалентности на $A$ введём обозначение $\mathrm{Eq}\, A$.

Лемма 2. *Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид, для которого выполнено условие (∗), и $R_i\mathrm{Con}\, G = \mathrm{Eq}\, G$. Если для какого-либо элемента $w \in G$ и какого-либо набора элементов $\alpha \in (G \setminus \{w\})^{n-1}$ частичная операция $\varphi_{i,\alpha}$, определённая соотношением (1), удовлетворяет включению*

$$\varphi_{i,\alpha}(G \setminus \{w\}) \subseteq \{w\}, \tag{2}$$

*то $\alpha$ — обобщённый $R_i$-нуль.*

[3] Для полного бинарного группоида понятие $R_1$-единицы совпадает с понятием правой единицы, а понятие $R_2$-единицы — с понятием левой единицы, Для частичного бинарного группоида $R_1$-единицу также можно было бы называть правой единицей, а $R_2$-единицу — левой единицей, но необходимо помнить, что эти определения отличаются от определений, принятых в монографии [3].

Доказательство. Ввиду условия $(*)$ можно найти элементы $y, z \in G \setminus \{w\}$, для которых определы значения выражений $\varphi_{i,\alpha}(y)$ и $\varphi_{i,\alpha}(z)$. Ввиду (2) имеем

$$\varphi_{i,\alpha}(y) = \varphi_{i,\alpha}(z) = w.$$

Отсюда видно, что набор элементов $\alpha$ не является $R_i$-единицей. Так как $R_i\mathrm{Con}\,G = \mathrm{Eq}\,G$, то по лемме 1 получаем, что $\alpha$ — обобщённый $R_i$-нуль. □

Лемма 3. *Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид, для которого выполнены условие $(*)$ и условие*

$$R_1\mathrm{Con}\,G = ... = R_n\mathrm{Con}\,G = \mathrm{Eq}\,G. \tag{3}$$

*Если для некоторого элемента $w \in G$ и некоторых подмножеств $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \subseteq G$ таких, что $G \setminus \{w\} \subseteq A_j$ при всех $j \neq i$, имеет место включение*

$$f(A_1, ..., A_{i-1}, G \setminus \{w\}, A_{i+1}, ..., A_n) \subseteq \{w\}, \tag{4}$$

*то*

$$f(A_1, ..., A_{i-1}, G, A_{i+1}, ..., A_n) \subseteq \{w\}. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) видно, что для любого набора элементов

$$\alpha \in A_1 \times ... \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times ... \times A_n$$

частичная операция $\varphi_{i,\alpha}$ удовлетворяет условию (2). Следовательно, по лемме 2 набор элементов $\alpha$ является $R_i$-нулём. Мы получаем, что

$$\varphi_{i,\alpha}(G) \subseteq \{w\}.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора $\alpha$ следует соотношение (5). □

Следствие 1. *Пусть $(G, f)$ — частичный $n$-арный группоид, для которого выполнены условия $(*)$ и (3). Если для некоторого элемента $w \in G$ имеет место включение*

$$f\,(G \setminus \{w\}, ..., G \setminus \{w\}) \subseteq \{w\}, \tag{6}$$

*то*

$$f(G, ..., G) \subseteq \{w\}. \tag{7}$$

Лемма 4 (6, предложение 1.1). *Любая конгруэнция частичного $n$-арного группоида $G$ является $R_i$-конгруэнцией на $G$ при любом $i$.*

Замечание 1. *Пусть отношение эквивалентности $\rho$ частичного $n$-арного группоида $G$ для любого значения $i$ является $R_i$-конгруэнцией. Если $G$ — полный $n$-арный группоид, то $\rho$ — конгруэнция на $G$ (это следует из предложения 1.2 работы [6]). Если же частичный $n$-арный группоид не является полным, то $\rho$ необязательно является конгруэнцией: более того, в работе [6] приведён пример частичного бинарного группоида (пример 1.3), у которого решётка конгруэнций не является даже подрешёткой решётки $R_1\mathrm{Con}\,G \cap \ldots \cap R_n\mathrm{Con}\,G$.*

Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать, что если условия теоремы 1 выполнены, то $f$ — константа.

Введём обозначение:

$$f(a_1, ..., a_n) = w.$$

Рассмотрим отношение эквивалентности

$$\rho = (G \setminus \{w\})^2 \cup \{(w, w)\}.$$

По условию теоремы $\rho$ — конгруэнция на $G$; множества $(G\setminus\{w\})$ и $\{w\}$ являются её классами. Так как элементы $a_1$, ..., $a_n$ принадлежат классу $(G\setminus\{w\})$, а значение выражения $f(a_1,...,a_n)$ — классу $\{w\}$, то для любых элементов $x_1$, ..., $x_n \in G\setminus\{w\}$ значение выражения $f(x_1,...,x_n)$ либо не определено, либо принадлежит классу $\{w\}$, то есть выполнено условие (6). Из леммы 4 следует (3). Тогда по следствию из леммы 3 получаем соотношение (7), то есть $f$ — константа. □

## 3. Заключение

Для полных универсальных алгебр, у которых решётка отношений эквивалентности совпадает с решёткой конгруэнций, в работе [1] было получено полное описание (теорема 3.3):

*Пусть $A$ — универсальная алгебра с набором операций $\Sigma$. Все отношения эквивалентности на $A$ являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

*(i)* $|A| \leqslant 2$*;*

*(ii) каждая операция* $f\in\Sigma$ *является константой или проекцией.*

Пользуясь этим утверждением, теорему 1 можно переформулировать следующим образом:

*Пусть* $(G,f)$ *— частичный $n$-арный группоид, для которого выполнено условие* $(*)$*. Если каждое отношение эквивалентности на $G$ является конгруэнцией и для некоторого набора элементов* $(a_1,\ ...,\ a_n)\in\operatorname{dom} f$ *имеет место соотношение*

$$f(a_1,...,a_n)\notin\{a_1,...,a_n\}, \tag{8}$$

*то $f$ — константа.*

Пусть $(G,f)$ — частичный $n$-арный группоид, для которого выполнено условие $(*)$, но не выполнено условие (8). Верно ли, что если решётка отношений эквивалентности на $G$ совпадает с решёткой конгруэнций частичного $n$-арного группоида $G$, то частичная операция $f$ является проекцией? Данный вопрос остаётся открытым.

Автор выражает благодарность Кожухову И. Б. за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожухов И. Б., Решетников А. В. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями. // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 16, № 3. 2010. С. 161–192.

2. G. Grätzer. Universal algebra. Second Edition. Springer. 2008, 2nd ed. with updates, 1979, Second Edition, Springer Science + Business Media, LLC. 586 p.

3. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Частичные алгебраические действия. С.-Петербург, Росс. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена: Образование. 1991. 163 с.

4. Grätzer G., Schmidt E. T. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. // Acta Sci. Math. (Szeged). Vol.24, № 3. 1963. P. 34–59.

5. G. Grätzer, G. H. Wenzel. On the concept of congruence relation in partial algebras. // Math. Scand. Vol. 20. 1967. P. 275–280.

6. Решетников А. В. О конгруэнциях частичных $n$-арных группоидов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Т. 11, сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3, ч. 2. 2011 С. 46–51.

7. Joel Berman. Strong congruence lattices of finite partial algebras // Algebra Universalis. Volume 1, issue 1. December 1971. P. 133–135.

8. Burmeister P. Free partial algebras. // J. Reine Angew. Math. Volume 1970, issue 241. January 1970. P. 75–86.

9. Clifford A. H., Hall T. E. A characterisation of R-classes of semigroups as a partial groupoids. // Semigroup Forum. Volume 6. 1973. P. 246–254.

10. Кулик В. Т. О наибольших сильных отношениях конгруэнтности частичных универсальных алгебр. // Исследования по алгебре. Саратов: изд. Саратовского ун-та. 1970. С. 40–46.

11. Кулик В. Т. О решётках сильных отношений конгруэнтности полугруппоидов. // Упорядоченные множества и решётки. Вып. 2. Саратов: изд. Саратов. ун-та. 1974. С. 42–50.

12. Е. С. Ляпин, Внутреннее полугрупповое продолжение некоторых полугрупповых амальгам. // Известия вузов. Матем. № 11. 1993. С. 20–26.

13. Pastijn F. A generalization of Green's equivalence relations for halfgroupoids. // Simon Stevin. Volume 49. 1976 P. 165–175.

14. Fleischer I. On extending congruences from partial algebras. // Fund. math. Volume 88. 1975. P. 11–16.

15. Schelp R. H. A partial semigroup approach to partially ordered sets. // Proc. London Math. Soc. Volume 24. 1972. P. 46–58.

## REFERENCES

1. Kozhukhov I. B., Reshetnikov A. V. 2010, "Algebras whose equivalence relations are congruences", *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika (Fundamental and Applied Mathematics)*, vol. 16, no. 3, pp. 161–192. (Russian) translation in Journal of Mathematical Sciences (New York), 2011, Vol. 177, № 6, pp. 886–907

2. Grätzer G. 2008, 2nd ed. with updates, 1979, Second Edition. "Universal algebra. Second Edition.", Springer, Springer Science + Business Media. 586 p.

3. Ljapin E. S., Evseev A. E. 1991. "The Theory of Partial Algebraic Operations", Obrazovanie, Herzen State Pedagogical University of Russia, St.Petersburg, 163 p. (Russian) translation in Springer, Springer Science + Business Media, B.V., 1997, 237 p.

4. Grätzer G., Schmidt E. T. 1963, "Characterizations of congruence lattices of abstract algebras.", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, vol.24, № 3. pp. 34–59.

5. G. Grätzer, G. H. Wenzel. 1967, "On the concept of congruence relation in partial algebras.", *Math. Scand.*, vol. 20. pp. 275–280.

6. Reshetnikov A. V. 2011, "On congruences of partial $n$-ary groupoids", *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. (Izvestiya Saratovskogo universiteta. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics)*, vol. 11, no. 3, part 2, pp. 46–51. (Russian)

7. Joel Berman. December 1971, “Strong congruence lattices of finite partial algebras”, *Algebra Universalis*, volume 1, issue 1, pp. 133–135.

8. Burmeister P. January 1970. “Free partial algebras.”, *J. Reine Angew. Math.*, volume 1970, issue 241, pp. 75–86.

9. Clifford A. H., Hall T. E. 1973. “A characterisation of R-classes of semigroups as a partial groupoids.”, *Semigroup Forum*, volume 6, pp. 246–254.

10. Kulik V. T. 1970. “O naibolshih silnyh otnosheniyah congruentnosti chastichnyh universalnyh algebr.”, *Issledovaniya po algebre. Saratov: izd. Saratovskogo Universiteta*, pp. 40–46.

11. Kulik V. T. 1974. “O reshetkah silnyh otnosheniy congruentnosti polugruppoidov.”, *Uporyadochennye mnojestva i reshetki, no. 2. Saratov: izd. Saratovskogo Universiteta*, pp. 42–50.

12. E. S. Ljapin. 1993. “Vnutrennee polugruppovoe prodoljenie nekotoryh polugruppovyh amalgam.”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1993, no. 11, pp. 20–26.

13. Pastijn F. 1976 “A generalization of Green’s equivalence relations for halfgroupoids.”, *Simon Stevin*, vol. 49, pp. 165–175.

14. Fleischer I. 1975. “On extending congruences from partial algebras.”, *Fund. math.*, vol. 88, pp. 11–16.

15. Schelp R. H. 1972. “A partial semigroup approach to partially ordered sets.”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 46–58.


Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники».
Получено 21.12.2015 г.
Принято в печать 11.03.2016 г.