ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.54.

О ШИРИНЕ ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГРУПП[1]

И. В. Добрынина (г. Тула), Д. З. Каган (Москва)

Аннотация

В данной работе рассматриваются вопросы о ширине собственных вербальных подгрупп для различных классов групп. Приводится обзор результатов, полученных в этом направлении. Ширина вербальной подгруппы $V(G)$ равна наименьшему числу $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такому, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$.

Рассматриваются результаты о ширине вербальных подгрупп для свободных произведений и других свободных групповых конструкций, таких как свободные произведения с объединением и HNN-расширения.

А. Х. Ремтулла решил вопрос об условиях бесконечности ширины всякой собственной вербальной подгруппы в свободных произведениях групп. В. Г. Бардаков и И. В. Добрынина получили аналогичные результаты для свободных произведений с объединением и HNN-расширений, в которых связные подгруппы отличны от базовой группы. Также В. Г. Бардаков полностью решил вопрос о ширине вербальных подгрупп в группе кос.

Для некоторых классов групп получены результаты о ширине коммутантных вербальных подгрупп, порожденных словами из коммутанта. Р. И. Григорчук определил условия бесконечности коммутантных вербальных подгрупп в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях, в которых связные подгруппы отличны от базовой группы. Д. З. Каганом получены соответсвующие результаты о ширине коммутантных вербальных подгрупп для групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением с нетривиальным центром.

Авторами были получены результаты о бесконечности ширины вербальных подгрупп для групп, обладающих определенными копредставлениями, а также для аномальных произведений различных типов групп.

В статье также рассматриваются различные результаты о вербальных подгруппах в группах Артина и Кокстера, в граф-группах.

Ключевые слова: ширина вербальной подгруппы, свободные произведения с объединением, HNN-расширения.

Библиография: 25 названий.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N15-41-03222 р_центр_а.

ON THE WIDTH OF VERBAL SUBGROUPS IN SOME CLASSES OF GROUPS

I. V. Dobrynina (Tula), D. Z. Kagan (Moscow)

Abstract

In this paper the problem of the width for verbal subgroups in different classes of groups is considered. We give a review the results obtained in this direction. The width of the verbal subgroups $V(G)$ is equal to a least value of $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ such that every element of the subgroup $V(G)$ is represented as the product of at most m values of words $V^{\pm 1}$.

The results about the width of verbal subgroups for free products and other free group constructions, such as free products with amalgamation and HNN-extensions are indicated.

A. H. Rhemtulla solved the question of conditions for infinity of the width of any proper verbal subgroups in free products. V. G. Bardakov and I. V. Dobrynina received similar results for the free products with amalgamation and HNN-extensions, for which associated subgroups are different from the base group. Also, V. G. Bardakov completely solved the problem of the width of verbal subgroups in the group of braid.

Many mathematicians studied the width of verbal subgroups generated by words from commutator subgroup for some classes of groups. R. I. Grigorchuk found conditions for infinity such verbal subgroups of free products with amalgamation and HNN-extensions, for which associated subgroups are different from the base group. D. Z. Kagan obtained the corresponding results on width of verbal subgroups generated by words from commutator subgroup for groups with one defining relation and two generators, having a non-trivial center.

Authors obtained the results about infinity of the width of verbal subgroups for groups with certain presentations, as well as for anomalous products of various types of groups.

Also many results about verbal subgroups of Artin and Coxeter groups and graph groups are considered in the article.

Keywords: width of verbal subgroup, amalgamated free products, HNN-extensions.

Bibliography: 25 titles.

1. Введение

Под шириной [1] вербальной подгруппы $V(G)$ относительно множества слов V будем понимать наименьшее $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов из $V^{\pm 1}$. Ширина вербальной подгруппы, в общем случае, зависит от множества слов V. Будем рассматривать конечное множество слов, так как для любой вербальной подгруппы $V(G)$ можно подобрать такое бесконечное множество слов W, что $V(G) = W(G)$, а ширина $W(G)$ равна единице.

Термин "ширина" введен Ю. И. Мерзляковым [2] в 1967 году, однако ширина вербальных подгрупп рассматривалась в более ранних работах Шода (1936), Г. Хигмана, Б. Нейман и Х. Нейман (1949), Н. Ито (1951), Ф. Холла (1959) и многих других авторов. Наиболее общий результат принадлежит Ю. И. Мерзлякову: всякая вербальная подгруппа алгебраической группы $G \leq GL_n(\Omega), \Omega$ — алгебраически замкнутое поле бесконечной степени трансцендентности над простым подполем, имеет конечную ширину относительно любого слова v. В других работах выбирались конкретные группы G, слова v и давались оценки ширины $v(G)$.

Многие результаты были получены относительно вербальных подгрупп, порожденных словами из коммутанта. В их формулировках используется понятие коммутантных вербальных подгрупп [5]. Пусть F_n- свободная группа со свободными порождающими, $V-$ множество слов из F_n. Слово v из F_n называется коммутаторным, если оно лежит в коммутанте F_n'. Множество слов V называется коммутаторным, а определяемая этим множеством вербальная подгруппа $V(G)-$ коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова.

В данной работе авторами рассматривается вопрос о ширине вербальных подгрупп в свободных произведениях групп, в свободных произведениях групп с объединенной подгруппой, в HNN-расширениях, в аномальных произведениях локально индикабельных групп, в аномальных произведениях бесконечной циклической и локально индикабельной групп, в группах с одним определяющим соотношением, в гиперболических группах, а также в некоторых группах Артина и Кокстера.

Дается обзор основных результатов о ширине вербальных подгрупп в указанных выше классах групп в хронологическом порядке, освещаются теоремы, полученные в разные годы известными математиками, и, в частности, авторами данной статьи.

2. Основные результаты

Будем говорить, что V — собственное множество слов, а $V(G)$ — собственная вербальная подгруппа, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$. Ширина несобственной вербальной подгруппы всегда конечна: для единичной вербальной подгруппы это очевидно, а для вербальной подгруппы, совпадающей со всей группой следует из результата А. Х. Ремтуллы [3].

Многие авторы изучали вопрос: как меняется ширина вербальных подгрупп при различных групповых конструкциях.

В этом направлении А. Х. Ремтулла [3] доказал, что в нетривиальном свободном произведении $G = A*B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы

$v(G)$ бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geq 3$, $|B| \geq 2$.

Р. И. Григорчуком [4] доказано, что для свободных произведений с объединением $A *_U B$, где $|A :: U| \geq 3$, $|B : U| \geq 2$, ширина всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы бесконечна.

В. Г. Бардаковым [5] показано, что в свободных произведениях с объединением $G = A *_U B$, где U — нормальная подгруппа в A и в B, а $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна.

И. В. Добрыниной [6] в 2000 году получен следующий результат: пусть $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$ и в B существует такой элемент b, что $UbU \neq Ub^{-1}U$, тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(G)$ бесконечна.

В. А. Файзиев [7] в 2001 году доказал, что для свободных произведений с объединением $G = A *_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ бесконечна.

И. В. Добрыниной [8] в 2009 году показано, что в свободных произведениях с объединением $G = A *_U B$, где $|A : U| \leq 2$ и $|B : U| \leq 2$, ширина вербальной подгруппы $v(G)$ бесконечна тогда и только тогда, когда ширина $v(U)$ бесконечна; если $|A : U| \geq 2$ и $|B : U| \geq 3$, то ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(G)$ бесконечна.

Р. И. Григорчуком [4] доказано, что для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы, ширина всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы бесконечна.

В. Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Для HNN-расширений, где хотя бы одна из связных подгрупп совпадает с базовой группой, вида $G =< a_1, a_2, \ldots, a_n;\ t^{-1}a_1t = a_{i+1},\ i = \overline{1, n-1},\ t^{-1}a_nt = w(a_1, \ldots, a_n) >$, где $w(a_1, \ldots, a_n)$ — непустое слово в свободной полугруппе $<< a_1, \ldots, a_n >>$. В [9] показывается, что если $w = a_1v(a_1, a_2, \ldots, a_n)a_1,\ a_1,\ a_1^2$, то ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(G)$ бесконечна.

В. Г. Бардаковым [5] показано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ для групп с одним определяющим соотношением и тремя образующими бесконечна. Распространить данный результат на группы с двумя порождающими и одним определяющим соотношением не удается, так как это неверно для групп $G_n =< a, t; t^{-1}at = a^n, n \in Z \setminus 0 >$.

И. В. Добрыниной [9] изучалась ширина собственной вербальной подгруппы $v(G)$ для групп $G =< a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = w(a, b) >$, где $w(a, b)$ — непустое слово в свободной полугруппе $<< a, b >>$. Доказывается, что если $w(a, b) = (a, b)a,\ a,\ a^2$, то ширина $v(G)$ бесконечна.

Рассмотрим группу $G =< a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = av(a, b)b^{\mu} >$, где $v(a, b)$ — непустое слово в свободной полугруппе $<< a, b >>$.

Положим $b = ca^{\mu}$. Тогда данную группу можно рассматривать в виде $G = =< a, c, t;\ t^{-1}at = ca^{\mu},\ t^{-1}ct = w(a, ca^{\mu}) >$, где $w(a, ca^{\mu}) = a \ldots ca^{\mu+i}, i > 1$.

Пусть $log_a x$ означает сумму показателей при a в слове x.

Теорема 1. *Пусть* $G =< a, c, t;\ t^{-1}at = ca^{\mu},\ t^{-1}ct = w(a, ca^{\mu}) >$, $w(a, ca^{\mu}) = a \dots ca^{\mu+i}$, $i > 1$, *— положительное слово. Если существует такое простое число* p *в разложении* $log_a w$ *на простые множители, что* $\mu \equiv 1\,(mod\,p)$, *то ширина собственной вербальной подгруппы* $v(G)$ *бесконечна.*

Теорема 2. *Пусть* $G =< a, b, t;\ t^{-1}at = b,\ t^{-1}bt = ab^{\mu} >$. *Тогда произвольная собственная вербальная подгруппа* $v(G)$ *имеет бесконечную ширину.*

Д. З. Каганом [10] изучалась ширина коммутантных вербальных подгрупп для групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением. Вопрос об условиях бесконечности ширины удалось полностью решить для таких групп с нетривиальным центром.

Теорема 3. *Пусть* G *— группа с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Тогда ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы* $V(G)$, *определенной конечным множеством слов, бесконечна, за исключением следующих случаев: группа* G *— циклическая; свободная абелева второго ранга:* $G =< t, a | ta = at >$.

В общем случае группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими

$$G =< a, t | r(a, t) = 1 >$$

сводятся к HNN-расширениям

$$< t, a_0, \dots, a_n | s(a_i) = 1, ta_i t^{-1} = a_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1 > .$$

Наиболее сложный случай возникает, если одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой. Тогда соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = U_0(a_0, \dots, a_{n-1})$, где U_0 — некоторое слово в порождающих свободной группы $< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >$.

Несократимая запись элемента U_0 разбивается на слоги $U_0 \equiv U_{01}U_{00}U_{02}$. Здесь U_{00}— часть слова U_0, которая содержит все буквы с минимальным индексом $a_0^{\pm 1}$, лежащие в U_0 и ограничена ими. При этом важно в каком порядке входят в запись порождающие a_{n-1} с максимальным индексом. Для записи U_0 получен следующий результат [11]:

Теорема 4. *Пусть группа с одним определяющим соотношением* $G = < t, a | r(t, a) = 1 >$ *сводится к HNN-расширению* $G =< t, a_0, \dots, a_n | s(a_i) = 1, ta_i t^{-1} = a_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1 >$, $(n > 1)$, *где база совпадает с одной из изоморфных подгрупп. Пусть соотношение* $s = 1$ *представляется в виде* $a_n = U_0(a_0, \dots, a_{n-1}) = U_{01}U_{00}U_{02}$. *Если* U_{00} *— циклически несократимо и* U_{00} *содержит в несократимой записи порождающий* a_i *с максимальным индексом* a_{n-1}, *то для группы* G *ширина любой собственной коммутантной вербальной подгруппы, определенной конечным множеством слов, бесконечна.*

Ряд работ посвящен исследованию ширины коммутанта некоторых классических групп относительно коммутатора $v = xyx^{-1}y^{-1}$. Н. Ито [12] доказал, что при $n \geq 5$ всякий элемент симметрической группы S_n является коммутатором. С. Оре [13] обобщил этот результат на группу подстановок счетного множества.

Д. З. Каганом [14] изучался вопрос о ширине собственных вербальных подгрупп для аномальных произведений.

Определение 1. *Аномальным произведением A_wB групп A и B называется фактор-группа их свободного произведения по некоторому циклически несократимому элементу w.*

Определение 2. *Локально индикабельной называется группа, в которой любая конечно порожденная подгруппа обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу.*

В 2004 году получен результат о ширине коммутантных подгрупп в аномальных произведениях локально индикабельных групп:

Теорема 5. *Для аномальных произведений двух локально индикабельных групп $G = A_wB$, где одна из групп не является конечно порожденной, а другая не является циклической, ширина всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы, определенной конечным множеством слов, бесконечна.*

Для аномальных произведений с бесконечной циклической группой Д. З. Каганом [15] получен следующий результат:

Теорема 6. *Пусть $G = A_wB$ — аномальное произведение бесконечной циклической группы $A =< x >_\infty$ и локально индикабельной, не являющейся циклической, группы B. Пусть сумма показателей при x в несократимой записи $w = x^{p_1}b_1 \dots x^{p_l}b_l$ равняется 0: $log_x w = 0$. Тогда ширина всякой собственной коммутантной вербальной подгруппы, определенной конечным множеством слов, бесконечна.*

Пусть G — конечно порожденная группа Артина с копредставлением $G = =< a_1, ..., a_n; \langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}} = \langle a_ja_i\rangle^{m_{ji}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j >$, где $\langle a_ia_j\rangle^{m_{ij}}$ — слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i и $a_j, i \neq j$, m_{ij} — число, соответствующее симметрической матрице Кокстера: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$. Если к определяющим соотношениям группы G добавить соотношения $a_i^2 = 1, i = \overline{1, n}$, то получим группу Кокстера $\bar{G}$.

Группа Артина называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера конечна.

Графом Кокстера Γ_I, соответствующим группе Кокстера $\bar{G}$, называется неориентированный граф, состоящий из множества вершин I и множества ребер, строящихся следующим образом: две вершины $i, j \in I$ соединены ребром $l_{i,j}$ веса m_{ij}, если в группе Кокстера $\bar{G}$ порождающие a_i и a_j связаны соотношением $< a_ia_j >^{m_{ij}} =< a_ja_i >^{m_{ij}}$ при $m_{ij} \geqslant 3$.

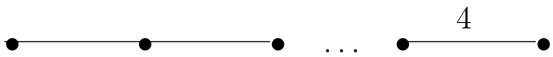
Каждому графу Кокстера можно однозначно сопоставить группу Артина. Если $m_{ij} \geqslant 3$ для всех $i \neq j$, то группа Артина и соответствующая группа Кокстера есть группа Артина и Кокстера большого типа.

Будем говорить, что группа Артина G и соответствующая ей группа Кокстера $\bar{G}$ неприводимы, если граф Кокстера Γ_I непуст и связен.

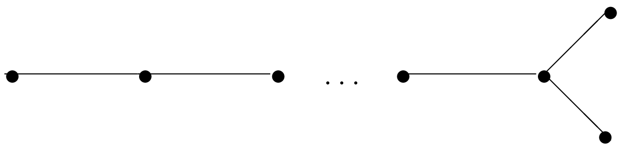
Пусть Γ_i, $i \in J$ — конечное семейство связных компонент графа Кокстера Γ_I. Тогда соответствующая ему группа Артина G распадается в прямое произведение $G = \Pi_{i \in J} G_i$, где G_i — неприводимая группа Артина, соответствующая связной компоненте Γ_i.

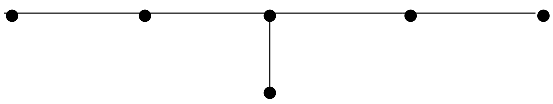
Кокстер установил [15], что неприводимая группа Кокстера конечна тогда и только тогда, когда ее граф Кокстера изоморфен одному из следующих графов:

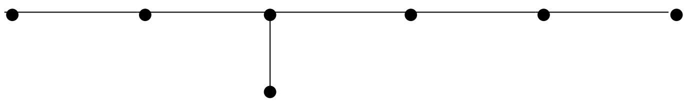
A_l :  ($l \geqslant 1$ вершин)

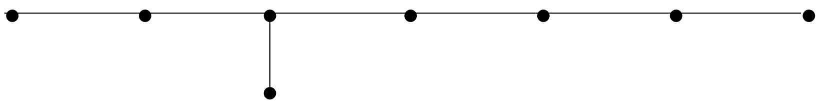
B_l : 

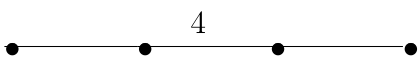
($l \geqslant 2$ вершин)

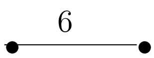
D_l :  ($l \geqslant 4$ вершин)

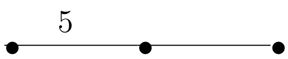
E_6 : 

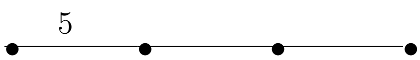
E_7 : 

E_8 : 

F_4 : 

G_2 : 

H_3 : 

H_4 : 

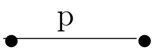
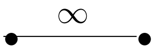
$I_2(p)$:  ($p = 5$ или $p \geqslant 7$)

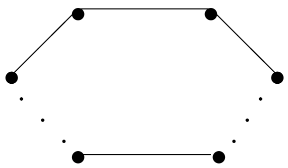
рис. 1

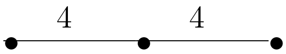
На рисунке 1 над ребром указывается его вес, если он $\geqslant 4$; вес ребра не указывается, если он равен 3.

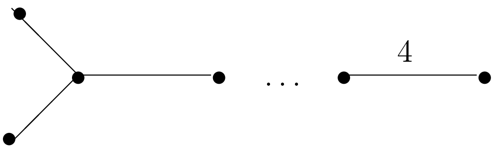
Группы Артина, отвечающие этим графам будем обозначать теми же символами $A_l, B_l, \ldots$, они являются группами Артина конечного типа.

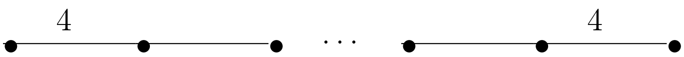
Среди других групп Артина выделяют неприводимые группы, имеющие следующие графы Кокстера:

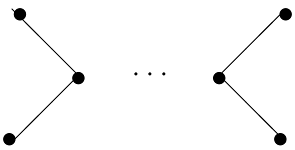
$\tilde{A}_1$:  ($p = 5$ или $p \geqslant 7$)

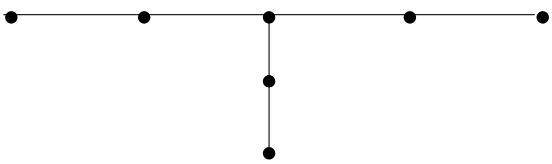
$\tilde{A}_l (l \geqslant 2)$:  (цикл с $l+1$ вершинами)

$\tilde{B}_2$: 

$\tilde{B}_l (l \geqslant 3)$:  ($l+1$ вершин)

$\tilde{C}_l (l \geqslant 3)$:  ($l+1$ вершин)

$\tilde{D}_l (l \geqslant 4)$:  ($l+1$ вершин)

$\tilde{E}_6$: 

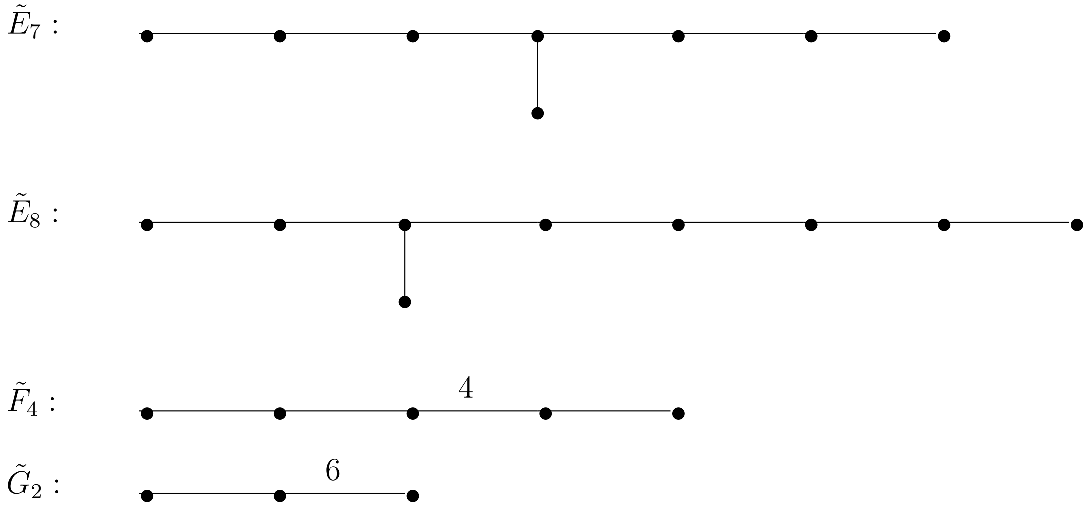


рис. 2

Группы Артина, соответствующие графам на рис. 2, будем обозначать символами $\tilde{A}_1, \tilde{A}_l, \ldots$. Ясно, что группа $\tilde{A}_1$ — свободная группа степени свободы 2. Группы $\tilde{A}_l$ $(l \geqslant 2)$ называются круговыми группами кос.

Группы A_l $(l \geqslant 1)$ — это обычные группы кос. Исследование ширины вербальных подгрупп групп кос начинается в связи с вопросом 6.22, записанным Г. С. Маканиным в "Коуровскую тетрадь"[17]: "Построить косу, принадлежащую коммутанту группы кос и не являющуюся коммутатором."Ю. С. Семенов [19] указал в A_3 элемент, равный произведению двух коммутаторов и не сводящийся к одному коммутатору. Н. Н. Репин [18] показал, что относительно слова $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ коммутанты групп A_3 и A_4 имеют бесконечную ширину, а затем В. Г. Дурнев и В. К. Шалашов [20], [21] установили, что и любая собственная вербальная подгруппа этих групп, определенная конечным множеством слов, имеют бесконечную ширину.

Вопрос о ширине вербальных подгрупп в группе кос полностью решен В. Г. Бардаковым:

Теорема 7. *[22] В группе кос A_l при $l \geqslant 3$ всякая собственная вербальная подгруппа $V(A_l)$ имеет бесконечную ширину.*

Для групп Артина доказано:

Теорема 8. *[23] Группы Артина $A_l(l \geqslant 2)$, $B_l(l \geqslant 2)$, $D_l(l \geqslant 2)$, F_4,G_2, $I_2(p)$, $(p \geqslant 5)$, $\tilde{A}_l(l \geqslant 1)$, $\tilde{B}_l(l \geqslant 2)$, $\tilde{C}_l(l \geqslant 3)$, $\tilde{D}_l(l \geqslant 4)$, $\tilde{F}_4$, $\tilde{G}_2$ не имеют собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Пусть $\Gamma = \Gamma(U, E)$ — неориентированный граф с множеством вершин U и множеством ребер $E \subseteq U \times U$. Граф-группой $G(\Gamma)$ называется группа с множеством образующих x_i, $i \in U$, и определяющих соотношений

$$x_i x_j = x_j x_i \text{ при } (i, j) \in E.$$

Теорема 9. *[23] Никакая неабелева граф-группа не содержит собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Пусть $G_{ij} =< a_i, a_j; < a_i a_j >^{m_{ij}} =< a_j a_i >^{m_{ij}}, \quad i \neq j \in I >$ группа Артина с двумя образующими, где m_{ij} — элементы матрицы Кокстера.

В [23], [24] показано:

Теорема 10. *Пусть G — конечно порожденная группа Артина, v — некоторое слово. Если G — абелева, то ширина вербальной подгруппы $v(G)$ конечна.*

В двупорожденной группе Артина G_{ij} с $m_{ij} \geqslant 3$, $i \neq j$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(G_{ij})$ бесконечна.

А. Мясниковым и А. Новиковым доказана следующая теорема:

Теорема 11. *[25] Всякая неэлементарная гиперболическая группа не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

Отсюда, в частности, следует, что ширина собственной вербальной подгруппы групп Кокстера экстрабольшого типа бесконечна.

3. Заключение

В данной работе авторами показано, что проблема ширины вербальных подгрупп полностью изучена в следующих классах групп:

— свободных произведениях групп,

— свободных произведениях с объединением,

— HNN-расширениях, где связные подгруппы отличны от базовой группы,

— гиперболических группах,

— группах кос,

— двупорожденных группах Артина,

— группах Артина $A_l(l \geqslant 2)$, $B_l(l \geqslant 2)$, $D_l(l \geqslant 2)$, F_4,G_2, $I_2(p)$, $(p \geqslant 5)$, $\tilde{A}_l(l \geqslant 1)$, $\tilde{B}_l(l \geqslant 2)$, $\tilde{C}_l(l \geqslant 3)$, $\tilde{D}_l(l \geqslant 4)$, $\tilde{F}_4$, $\tilde{G}_2$.

Вопрос об условиях бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп решен для групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением с нетривиальным центром.

Получены частные результаты по ширине вербальных подгрупп для HNN-расширений, где хотя бы одна из связных подгрупп совпадает с базовой группой, по ширине коммутантных вербальных подгрупп для групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением, аномальных произведений некоторых классов групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

2. Мерзляков Ю. И. Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, №1. С. 83–94.

3. Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64, № 3. P. 573–584.

4. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т. 59, №4. С. 546–550.

5. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494–517.

6. Добрынина И. В. О ширине в свободных произведениях с объединением // Математические заметки. 2000. Т. 68, №3. С. 353–359.

7. Faǐziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105–115.

8. Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23–30.

9. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН. 2001. Т.7, №2. С. 95–102.

10. Каган Д. З. Ширина вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношение //Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Межд. конференции. Тула, 2015. С. 76–78.

11. Каган Д. З. Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т.17, №2. С. 167–176.

12. Ito N. A. A theorem of alternating group $A_n\,(n \geq 5)$ // Math. Japon. 1951. V. 2, №2. С. 59–60.

13. Ore S. Some remarks on commutators // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 2. P. 307–314.

14. Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп // Вестник МГУ. 2004. №6. С. 24–28.

15. Каган Д. З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, №3. С. 55–64.

16. Глухов М. М., Зубов А. Ю. О длинах симметрических и знакопеременных групп подстановок в различных системах образующих // Математические вопросы кибернетики. 1999. №8. С. 5–32.

17. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 10-е изд. Новосибирск, 1986.

18. Репин Н. Н. О коммутаторных уравнениях в группах B_3 и B_4. // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1986. С. 114–117.

19. Семенов Ю. С. О коммутаторах в группах кос // 10-й Всесоюзный симпозиум по теории групп: тезисы докладов. Минск, 1986. С. 207.

20. Дурнев В. Г. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // Деп. в ВИНИТИ. 1987. №4040-В87.

21. Дурнев В. Г., Шалашов В. К. О ширине коммутанта групп кос B_3 и B_4 // 19-я Всесоюзная алгебраическая конференция: тезисы докладов. Львов, 1987. С. 89.

22. Бардаков В. Г. К теории групп кос // Математический сборник. 1992. Т. 183, №6. С. 3–42.

23. Бардаков В. Г. Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, групповые и метрические свойства отображений // Сборник работ, посв. памяти Ю. И. Мерзлякова. Новосибирск, 1995. С. 8– 18.

24. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими // Чебышевский сборник. 2002. Т. 3, №1 (3). С. 11–16.

25. Myasnikov A., Nikolaev A. Verbal subgroups of hyperbolic groups have infinite width // J. Lond. Math. Soc.-Second Ser. T. 90, № 2. C. 573–591.

REFERENCES

1. Merzlyakov, Y. I. 1987, "Rational groups" , Moscow: Nauka.

2. Merzlyakov, Y. I. 1967, "Algebraic linear groups as full groups of automorphisms and closure of their verbal subgroups" *Algebra and logic,* vol. 6, no.1, pp. 83–94.

3. Bardakov, V. G. 1997, "On the width of verbal subgroups of some free constructions" *Algebra and logic,* vol. 36, no. 5, pp. 494–517.

4. Rhemtulla, A. H. 1968, "A problem of bounded expressibility in free products" , *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* vol. 64, no. 3, pp. 573–584.

5. Grigorchuk, R. I. 1996, "Bounded cohomology of group constructions", *Mat. Zametki,* vol. 59, no. 4, pp. 546–550.

6. Dobrynina, I. V. 2000, "On the width in free products with amalgamation", Mat. Zametki, vol. 68, no. 3, pp. 353–359.

7. Faĭziev V. A. 2001, "A problem of expressibility in some amalgamated products of groups", *J. Austral. Math. Soc.,* vol. 71, pp. 105–115.

8. Dobrynina, I. V. 2009, "Solution of the width problem in amalgamated free products", *Fundam. Prikl. Mat.,* vol. 15, no. 1, pp. 23–30.

9. Dobrynina, I. V. & Bezverkhnii, V. N. 2001, "On width in some class of groups with two generators and one defining relation", *Proc. Steklov Inst. Math. Algebra. Topology,* suppl. 2, pp. 53–60.

10. Kagan D. Z. 2015, "Width of verbal subgroups for groups with one defining relation", *XIII International Conference "Algebra, number theory and discrete geometry: Modern Problems and Application", Tula,* pp. 76–78.

11. Kagan, D. Z. 2012, "Pseudocharacters on free groups, invariant with respect to some types of endomorphisms", *Fundam. Prikl. Mat.,* vol. 17, no. 2, pp. 167–176.

12. Ito, N. A. 1951, "A theorem of alternating group A_n $(n \geq 5)$", *Math. Japon,* vol. 2, no. 2, pp. 59–60.

13. Ore, S. 1951, "Some remarks on commutators", *Proc. Amer. Math. Soc.,* vol. 2, pp. 307–314.

14. Kagan, D. Z. 2004, "On the existence of non-trivial Pseudocharacters on anomalous products of groups", *Vestnik MGU,* no. 6, pp. 24–28.

15. Kagan, D. Z. 2006, "Pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups", *Fundam. Prikl. Mat.,* vol. 12, no. 3, pp. 55–64.

16. Gluhov, M. M. & Zubov, A.Y. 1999, "On the lengths of the symmetric and alternating groups of substitutions in the different systems forming", *Mathematical questions of cybernetics,* no. 8, pp. 5–32.

17. Kourov's Writing-Book. 1986, "Unsolved problems in group theory", 10th edition, Novosibirsk.

18. Repin, N. N. 1986, "On the commutator equations in the groups B_3 and B_4", *Algorithmic problems in group theory and semigroups,* Tula, pp. 114–117.

19. Semenov, Y. S. 1986, "On the commutators in braid groups, The 10th All-Union symposium on group theory". *Abstracts,* Minsk, pp. 207.

20. Durnev, V. G. 1987, "On the width of the commutator subgroup of the braid groups B_3 и B_4", Dep. v VINITI, no 4040–V87.

21. Durnev, V. G. & Shalashov, V. K. 1987, "On the width of the commutator subgroup of the braid groups B3 и B4", *The 19th All-Union algebraic conference. Abstracts, Lviv,* p. 89.

22. Bardakov, V. G., 1992, "On the theory of braid groups", *Mat. Sb.,* vol. 183, no. 6, pp. 3–42.

23. Bardakov, V. G., 1995, "The width of verbal subgroups of certain Artin groups, group and metric properties of mappings", *The collection of papers dedicated to the memory of Y. I. Merzlyakov,* Novosibirsk, pp. 8–18.

24. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V. 2002, "Solution of the finite width problem in Artin groups with two generators", *Chebyshevskii Sb.,* vol. 3, no. 1(3), pp. 11–16.

25. Myasnikov, A. & Nikolaev, A. 2014, "Verbal Subgroups of Hyperbolic Groups Have Infinite Width", *J. Lond. Math. Soc.-Second Ser.,* vol. 90, no. 2, pp. 573–591.

Тульский государственный педагогический унифарситет им. Л. Н. Толстого.
Московский государственный университет путей сообщения.
Поступило 20.10.2015.