ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 511.9.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РЕШЁТКИ КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ[1]

© 2012. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский[2] (г. Тула),
В. Н. Соболева, Д. К. Соболев (г. Москва), Е. И. Юшина (г. Тула)

Аннотация

Данная работа состоит из двух основных частей.

В первой части, которая представлена введением, дается достаточно полный обзор теории гиперболической дзета-функции решёток. Отличие от более ранних обзоров состоит в том, что, во-первых, большинство результатов общей теории конкретизирована к двумерному случаю. Это сделано потому, что основная цель работы — это решётки квадратичных полей. А эти решётки являются двумерными.

Во-вторых, впервые получены в явном виде функциональные уравнения для гиперболической дзета-функции одномерных и двумерных диагональных решёток.

Во второй части исследуется поведение гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(t)$ квадратичного поля при росте параметра t. Для приложений теории гиперболической дзета-функции решёток к вопросам оценки погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α с помощью обобщенных параллелепипедальных сеток с весами важно иметь оценку через растущий детерминант решётки.

В данной работе получена новая асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции решётки квадратичного поля. Особенностью этой формулы является то, что она имеет двучленный главный член и остаточный член с оценкой входящих констант. В этой формуле более выпукло выявлена связь между гиперболической дзета-функцией решётки квадратичного поля и такими характеристиками квадратичного поля как: дзета-функция Дедекинда главных идеалов квадратичного поля, производной дзета-функции Дедекинда главных идеалов квадратичного поля, регулятором квадратичного поля и фундаментальной единицей квадратичного поля.

Ключевые слова: решётка, гиперболическая дзета-функция решётки, сетка, гиперболическая дзета-функция сетки, квадратурная формула, параллелепипедальная сетка, метод оптимальных коэффициентов.

Библиография: 31 название.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 11-01-00571
[2]Работа частично поддержана грантом РФФИ № 15-41-03263 р_центр_а.

HYPERBOLIC ZETA FUNCTION OF LATTICE OVER QUADRATIC FIELD

© 2012. N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovol'skii (Tula),
V. N. Soboleva, D. K. Sobolev (Moscow), E. I. Yushina (Tula)

Abstract

This work consists of two main parts.

In the first part, which presents the introduction, given a fairly comprehensive overview of the theory of the hyperbolic Zeta-function of lattices. Unlike earlier reviews is that, firstly, most of the results of the General theory particularized to two-dimensional case. This is done because the main goal of this lattice is quadratic fields. And these lattices are two-dimensional.

Secondly, the first explicit form of the functional equation for hyperbolic Zeta-function of one and two diagonal lattices.

In the second part we investigate the behavior of the hyperbolic Zeta-function of the lattice $\Lambda(t)$ of the quadratic field when the growth parameter t. For applications of the theory of hyperbolic Zeta-function lattices to estimate the error of the approximate integration on the class of E_s^α by using generalized parallelepipedal nets with weights it is important to have assessment through growing the determinant of the lattice.

In this work, we derived a new asymptotic formula for the hyperbolic Zeta function lattices of quadratic fields. The peculiarity of this formula is that it has a main two-term member and remaining a member with the assessment of incoming constants. In this formula more specific correlation between the hyperbolic Zeta function of lattices of quadratic fields and quadratic field characteristics as: the Zeta function of the Dedekind principal ideals of a quadratic field, the derivative of the Zeta-function of Dedekind principal ideals of a quadratic field, quadratic field by the regulator and the fundamental unit of the quadratic field.

Keywords: lattice, hyperbolic zeta function of lattice, net, hyperbolic zeta function of net, quadrature formula, parallelepiped net, method of optimal coefficients.

Bibliography: 31 titles.

1. Введение

Во введении приводятся необходимые определения, результаты и факты из теории гиперболической дзета-функции решёток. Эта теория излагается в монографиях [24], [20] и [1], которые опираются на результаты из работ [4]–[7], [10]–[17], [25], [26]. Теории гиперболической дзета-функции решёток и обобщенной гиперболической дзета функции сдвинутых решёток были посвящены диссертации [8], [29], [27], [18] и [5], содержание которых отражено в авторефератах [9], [30], [28], [19] и [6].

В большой обзорной работе [3] приводятся последние достижения в этой теории — дается вывод функционального уравнения для дзета-функции произвольной декартовой решётки. Кроме этого, в последнем разделе этой работы дается список актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток.

Одной из таких проблем — получению уточненой асимптотической формулы для гиперболической дзета-функции квадратичного поля — посвящена данная работа.

Так как решётка вещественного квадратичного поля является двумерной, то для удобства читателей все необходимые сведения и определения переформулированы для двумерного случая.

1.1. Решётки

Напомним некоторые определения из геометрии чисел.

Определение 1. *Пусть $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$ — линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^2$. Совокупность Λ всех векторов вида*

$$a_1\vec{\lambda}_1 + a_2\vec{\lambda}_2,$$

где a_1, a_2 независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется двумерной решёткой в $\mathbb{R}^2$, а сами векторы $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$ — базисом этой решётки.

Множество всех двумерных решёток из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать через PR_2. Под произвольной сдвинутой решёткой $\Lambda(\vec{x})$ понимается множество вида $\Lambda(\vec{x}) = \Lambda + \vec{x}$, где $\Lambda \in PR_2$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Множество всех сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$ из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать через CPR_2.

Очевидно, что $\mathbb{Z}^2$ — решётка, её ещё называют фундаментальной решёткой.

Решётка Λ называется целочисленной решёткой в $\mathbb{R}^2$, если Λ — подрешётка фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2$, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + m_2\vec{\lambda}_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

и $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$ — линейно независимая система целочисленных векторов.

Определение 2. *Для решётки Λ взаимной решёткой Λ^* называется множество*

$$\Lambda^* = \{\vec{y}\ |\, \forall\, \vec{x} \in \Lambda\ (\vec{y}, \vec{x}) \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{1}$$

Очевидно, что взаимная решётка Λ^* для решётки Λ задается взаимным базисом $\vec{\lambda}_1^*, \vec{\lambda}_2^*$, определяемым равенствами

$$\left(\vec{\lambda}_i^*, \vec{\lambda}_j\right) = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^2$ совпадает со своей взаимной решёткой и является подрешёткой взаимной решётки любой целочисленной решётки. Кроме того, если $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^2$, то $\mathbb{Z}^2 \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$; для любого $C \neq 0$ имеем $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$. Для любой решётки справедливо равенство $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$.

Использование решёток, сдвинутых решёток и проекций решёток на координатные подпространства позволяет на единообразном языке обсуждать разные вопросы теории чисел.

Так, например, если $(a_j, N) = 1$ $(1 \leqslant j \leqslant 2)$, то решёткой Λ с $\det \Lambda = N$ является множество $\Lambda = \Lambda(a_1, a_2; N)$ решений линейного однородного сравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 \equiv 0 \pmod N.$$

Действительно, если целые b, b_1, удовлетворяют условиям:

$$a_1b \equiv 1 \pmod N, \quad b_1 \equiv a_2b \pmod N$$

то вектора $\vec{\lambda}_1 = (-b_1, 1)$, $\lambda_2 = (N, 0)$ будут базисом решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, a_2; N)$.

Если F — чисто вещественное алгебраическое расширение степени 2 поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_F$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F, то двумерной решёткой является множество $\Lambda(F)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)})\ |\ \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}, \tag{3}$$

где $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d — дискриминант поля F, то $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Эти два примера решёток — решётка $\Lambda(a_1, a_2; N)$ решений линейного сравнения и алгебраическая решётка $\Lambda(F)$ — будут играть центральную роль в данной работе.

Многие задачи геометрии чисел формулируются в терминах сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x}$, нормы $N(\vec{x}) = |x_1 \cdot x_2|$, норменного минимума решётки и норменного минимума сдвинутой решётки.

Для произвольной решётки $\Lambda \in PR_2$ норменным минимумом называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} N(\vec{x}).$$

Для произвольной сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{b} \in CPR_2$ норменным минимумом называется величина

$$N(\Lambda + \vec{b}) = \inf_{\vec{x} \in (\Lambda + \vec{b}) \setminus \{\vec{0}\}} N(\vec{x}).$$

С норменным минимумом тесно связан усеченный норменный минимум, или гиперболический параметр решётки, так называется величина ([7], [15])

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

которая имеет простой геометрический смысл: *гиперболический крест* $K_2(T)$ *не содержит ненулевых точек решётки* Λ *при* $T < q(\Lambda)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K_2(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant T\},$$

где $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ — усеченная норма $\vec{x}$, и для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Так как $\max(1, N(\vec{x})) \leqslant q(\vec{x})$, то $\max(1, N(\Lambda)) \leqslant q(\Lambda)$ для любой решётки Λ, а из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что

$$q(\Lambda) \leqslant \max(\det \Lambda,\ 1).$$

1.2. Тригонометрические суммы сеток и решёток

Через $G_2 = [0; 1)^2$ будем обозначать полуоткрытый квадрат. Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_2. Под сеткой с весами будем понимать упорядоченную пару (M, ρ), где ρ —произвольная числовая функция на M. Для удобства будем отождествлять сетку M с упорядоченной парой $(M, 1)$, то есть с сеткой с единичными весами $\rho \equiv 1$.

Определение 3. *Произведением двух сеток с весами* (M_1, ρ_1) *и* (M_2, ρ_2) *из* G_s *называется сетка с весами* (M, ρ):

$$M = \{\, \{\vec{x} + \vec{y}\} \,|\, \vec{x} \in M_1,\, \vec{y} \in M_2 \,\}, \quad \rho(\vec{z}) = \sum_{\substack{\{\vec{x}+\vec{y}\} = \vec{z},\\ \vec{x} \in M_1,\, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x})\rho_2(\vec{y}),$$

где $\{\vec{z}\} = (\{z_1\}, \{z_2\})$.

Произведение сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) обозначается через

$$(M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2).$$

Кроме этого, если $(M, \rho) = (M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2)$, то будем писать $M = M_1 \cdot M_2$ и говорить, что сетка M — произведение сеток M_1 и M_2.

Определение 4. *Тригонометрической суммой сетки с весами* (M, ρ) *для произвольного целочисленного вектора* $\vec{m}$ *называется выражение*

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}, \tag{4}$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*(\vec{m}, (M, \rho))| \leqslant \frac{1}{|M|} \rho(M).$$

Легко видеть, что для любых сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) справедливо равенство

$$S(\vec{m}, (M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2)) = S(\vec{m}, (M_1, \rho_1)) \cdot S(\vec{m}, (M_2, \rho_2)). \tag{5}$$

Определение 5. *Если справедливо равенство*

$$(M_1, 1) \cdot (M_2, 1) = (M, 1),$$

то сетки M_1 *и* M_2 *называются взаимно простыми.*

Таким образом, если M_1 и M_2 — взаимно простые сетки, то равенство $\vec{z} = \{\vec{x} + \vec{y}\}$ имеет не более одного решения для $\vec{x} \in M_1$ и $\vec{y} \in M_2$. Поэтому для взаимно простых сеток и только для них справедливо равенство $|M_1 \cdot M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$.

При $\rho \equiv 1$ приходим к определению тригонометрической суммы сетки.

Определение 6. *Тригонометрической суммой сетки M для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина*

$$S(\vec{m}, M) = \sum_{\vec{x}\in M} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки —

$$S^*(\vec{m}, M) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, M).$$

Легко видеть, что для любых взаимно простых сеток M_1 и M_2 справедливо равенство

$$S(\vec{m}, M_1 \cdot M_2) = S(\vec{m}, M_1) \cdot S(\vec{m}, M_2). \tag{6}$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки Λ, целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решётки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Lambda, \end{cases} \qquad \delta^*_\Lambda(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{x} \in \mathbb{Z}^2, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{если} \quad m \not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Определение 7. *Обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_2$.*

Для целочисленной решётки Λ её обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* по фундаментальной подрешётке $\mathbb{Z}^2$. Отсюда следует равенсто $|M(\Lambda)| = \det \Lambda$.

Определение 8. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решётки Λ будем называть выражение*

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\vec{x}\in \Lambda^*/\mathbb{Z}^2} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

Определение 9. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решётки Λ^* целочисленной решётки Λ будем называть выражение*

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m}\in \mathbb{Z}^s/\Lambda} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i(\vec{m}_j,\vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решётки Λ^* и $\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_N$ — полная система вычетов решётки $\mathbb{Z}^s$ по подрешётке Λ.

Справедливы следующие двойственные утверждения.

Теорема 1. *Для $s(\vec{m},\Lambda)$ справедливо равенство*

$$s(\vec{m},\Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det\Lambda.$$

Теорема 2. *Для любой целочисленной решётки Λ с $\det\Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство*

$$s^*(\vec{x},\Lambda) = \delta^*_\Lambda(\vec{x}) \cdot \det\Lambda.$$

1.3. Гиперболическая дзета-функция решёток

Термин *«гиперболическая дзета-функция решётки»* был введен в 1984 году Н. М. Добровольским в работах [7], [8], в которых начато систематическое изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$. Переформулируем общие результаты, полученные в этих работах на случай двумерных решёток.

В частности, получены нижние оценки для гиперболической дзета-функции произвольной двумерной решётки:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \geqslant C_1(\alpha)(\det\Lambda)^{-1} \qquad \text{при } 0 < \det\Lambda \leqslant 1, \tag{7}$$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \geqslant C_2(\alpha)(\det\Lambda)^{-\alpha}\ln\det\Lambda \qquad \text{при } \det\Lambda > 1, \tag{8}$$

где $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha) > 0$ — константы, зависящие только от α.

Доказана верхняя оценка для гиперболической дзета-функции s-мерной решётки:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant C_3(\alpha)C_1(\Lambda)^2 \qquad \text{при } q(\Lambda) = 1, \tag{9}$$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant C_4(\alpha)q^{-\alpha}(\Lambda)(\ln q(\Lambda) + 1) \qquad \text{при } q(\Lambda) > 1. \tag{10}$$

Также Н. М. Добровольским доказана теорема:

Для любой целочисленной решётки Λ и натурального n справедливо представление

$$\zeta_H(\Lambda|2n) = -1 + (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda)} \prod_{j=1}^{2} \left(1 - \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_{2n}(x_j)\right), \tag{11}$$

где $B_{2n}(x)$ — полином Бернулли порядка $2n$ и $M(\Lambda)$ — обобщенная параллелепипедальная сетка решётки Λ, которая состоит из точек взаимной решётки Λ^*, лежащих в единичном полуоткрытом квадрате $G_2 = [0;1)^2$.

$$\zeta_H(\Lambda \mid 2n+1) = -1 + \frac{1}{\det\Lambda} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda)} \prod_{j=1}^{2} \Bigg(1 - (-1)^n \cdot \frac{(2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{B_{2n+1}(\{y+x_j\}) + B_{2n+1}(\{y-x_j\})}{2} \operatorname{ctg}(\pi y)\, dy \Bigg).$$

Эта теорема указывает на аналогию между гиперболической дзета-функцией решётки и дзета-функцией Римана, для которой

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n},$$

$$\zeta(2n+1) = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 B_{2n+1}(y) \operatorname{ctg}(\pi y)\, dy.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{2}\zeta_H(\mathbb{Z}|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it \quad \sigma > 1.$$

Из представления (11) непосредственно вытекает, что для любой целочисленной решётки Λ и четного $\alpha = 2n$ значение $\zeta_H(\Lambda|2n)$ — трансцендентное число.

Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(t, F)$ в работе [12] Добровольским Н. М., Ваньковой В. С. и Козловой С. Л. была получена асимптотическая формула, которая в двумерном случае выглядит следующим образом

$$\zeta_H(\Lambda(t,F)|\alpha) = \frac{2(\det \Lambda(F))^\alpha}{R} \left(\sum_{(w)} \frac{1}{|N(w)|^\alpha} \right) \frac{\ln \det \Lambda(t,F)}{(\det \Lambda(t,F))^\alpha} + \\ + O\left(\frac{1}{(\det \Lambda(t,F))^\alpha} \right), \qquad (12)$$

где R — регулятор поля F и в сумме $\sum\limits_{(w)} \frac{1}{|N(w)|^\alpha}$ суммирование проводится по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$.

На первом этапе исследований с 1984 года по 1990 год изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ проводилось только для вещественных $\alpha > 1$. Начиная с 1995 года, в совместных работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([14], [15], [17]) начался новый этап изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ решётки Λ: во-первых, как функции комплексного аргумента α, во-вторых, как функции на метрическом пространстве решёток.

Таким образом, наиболее общее определение гиперболической дзета-функции двумерной решётки Λ для комплексного α следующее.

Определение 10. *Гиперболической дзета-функцией решётки Λ называется функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, задаваемая при $\sigma > 1$ абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)^{-\alpha}, \qquad (13)$$

где $\sum'$ *означает, что из суммирования исключен* $\vec{x} = \vec{0}$, *а для всех вещественных значений* x *полагаем* $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

По теореме Абеля гиперболическую дзета-функцию решёток можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_2(T)$.

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Норменным спектром решётки Λ называется множество значений нормы на ненулевых точках решётки Λ:

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}.$$

Соответственно усеченным норменным спектром решётки Λ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}.$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda) = \inf_{\lambda \in N_{sp}(\Lambda)} \lambda, \quad q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением нормы. Если таких точек решётки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра обозначается через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, через $q(\lambda)$.

Понятие порядка точки спектра позволяет лучше понять определение гиперболической дзета–функции решётки. В нем вместо нормы точки $\vec{x}$ фигурирует усеченная норма.

Можно привести пример решётки Λ, для которой ряд

$$\sum_{\vec{x} \in \Lambda}{}' |x_1 \cdot x_2|^{-\alpha}$$

расходится при любом $\alpha > 1$.

Действительно, пусть $\Lambda = t\Lambda(F)$ – алгебраическая решётка, тогда

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' |x_1 \cdot x_2|^{-\alpha} = \sum_{w\in\mathbb{Z}_F}{}' |t^2 N(w)|^{-\alpha}, \tag{14}$$

где $N(w)$ — норма целого алгебраического числа из кольца $\mathbb{Z}_F$. В силу теоремы Дирихле о единицах ряд в правой части равенства (14) расходится при любом $\alpha > 1$, так как в кольце $\mathbb{Z}_F$ целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F степени 2 имеется бесконечно много единиц ε и для них $|N(\varepsilon)| = 1$. Таким образом в этом случае каждая точка норменного спектра имеет бесконечный порядок, что и приводит к расходимости при любом α.

Из этого примера видно, что использование усеченной нормы вектора $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ вместо нормы $N(\vec{x}) = |x_1 \cdot x_2|$ в определении $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ существенно, так как тем самым обеспечена абсолютная сходимость ряда гиперболической дзета-функции произвольной решётки Λ.

Тем не менее, забегая в перед, отметим что для произвольной целочисленной решётки Λ полезно рассмотреть дзета-функцию $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$, которая в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda,\, N(\vec{x})\neq 0} |x_1 x_2|^{-\alpha}.$$

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решётки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)^{-\alpha} = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda)\lambda^{-\alpha}. \tag{15}$$

Так как $D(T|\Lambda) = 0$ при $T < q(\Lambda)$, то

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}}. \tag{16}$$

Из равенства (15) следует, что для любого комплексного $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости ($\sigma > 1$) определена регулярная функция комплексного переменного, заданная рядом (13), и справедливо неравенство

$$|\zeta_H(\Lambda|\alpha)| \leqslant \zeta_H(\Lambda|\sigma).$$

Возникает естественный вопрос о продолжении для произвольной решётки Λ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ на всю комплексную плоскость.

В работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([15], [17]) эти вопросы исследовались для PZ_s — множества всех целочисленных решёток, PQ_s — множества всех рациональных решёток, PD_s — множества всех решёток с диагональными матрицами. Далее эти результаты сформулируем только для $s = 2$.

Доказано, что

для любой целочисленной решётки $\Lambda \in PZ_2$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ является регулярной функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс второго порядка.

Для любой решётки $\Lambda \in PQ_2$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ также является регулярной аналитической функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс второго порядка.

Изучено поведение гиперболической дзета-функции решёток на пространстве решёток. В частности, установлено, что

если последовательность решёток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решётке Λ, то последовательность гиперболических дзета-функций решёток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Другой результат такого типа формулируется следующим образом.

Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha - \beta| < \delta$ такая, что для любой решётки $\Lambda = \Lambda(d_1, d_2) \in PD_2$

$$\lim_{M\to\Lambda, M\in PD_2} \zeta_H(M|\beta) = \zeta_H(\Lambda|\beta),$$

причем эта сходимость равномерна в окрестности точки α.

Вывод этих результатов существенно опирается на асимптотическую формулу для числа точек произвольной решётки в гиперболическом кресте как функции от параметра гиперболического креста, полученную Н. М. Добровольским и А. Л. Рощеней ([16]), которая при $s = 2$ имеет вид:

$$D(T \mid \Lambda) = \frac{4T \ln T}{\det \Lambda} + \Theta C(\Lambda) \frac{4T}{\det \Lambda},$$

где $C(\Lambda)$ – эффективная константа, вычисляемая через базис решётки, и $|\Theta| \leqslant \leqslant 1$.

Далее нам потребуются следующие множества целочисленных векторов:

$$J_{1,2} = \{(1, 2), (2, 1)\}, \quad J_{2,2} = \{(1, 2)\}.$$

Другими словами, множество $J_{t,2}$ состоит из векторов $\vec{j}_t$, координаты которых являются перестановкой чисел $1, 2$ такой, что первые t координат монотонно возрастают и последние $2 - t$ координат также монотонно возрастают. Таким образом, справедливы равенства $|J_{1,2}| = 2$, $|J_{2,1}| = 1$.

Еще А. О. Гельфонд [24] обнаружил важную связь между величиной гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки $\Lambda(a_1,\ldots,a_{s-1},1;N)$ и величиной

$$Q(\Lambda)=\min_{k=1,\ldots,N-1}\overline{k}\cdot\overline{k}_1\cdot\ldots\cdot\overline{k}_{s-1},$$

где целые $k,k_1,\ldots,k_{s-1}$ удовлетворяют системе сравнений

$$\begin{cases} k_1\equiv a_1k\\ k_2\equiv a_2k\\ \ldots\ldots\ldots\\ k_{s-1}\equiv a_{s-1}k\end{cases}\pmod N$$

с решёткой решений $\Lambda^{(p)}(a_1,\ldots,a_{s-1};N)$ [3], которая известна как теорема Гельфонда:

Существует положительная константа $C_1=C_1(s)$ такая, что выполняются оценки $Q\geqslant C_1q^{s-1}$ и $q\geqslant C_1\frac{Q^{s-1}}{N^{(s-1)^2-1}}$.

При $s=2$ это утверждение тривиально, так как решётки $\Lambda(a,1;N)$ и $\Lambda^{(p)}(a;N)$ с точностью до перестановки координат совпадают, а поэтому $Q=q$.

Оказалось, что эта связь проявляется и при аналитическом продолжении в левую полуплоскость. Сформулируем соответствующую теорему в простейшем двумерном случае.

Прежде всего выразим гиперболическую дзета-функцию двумерной решётки $\Lambda(a,1;N)$ через дзета-функцию Римана и дзета-функцию двумерной решётки $\Lambda(a,1;N)$. Имеем

$$\zeta_H(\Lambda(a,1;N)\mid\alpha)=\frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha}+\zeta(\Lambda(a,1;N)\mid\alpha).$$

Теорема 3. *В левой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma<0)$ справедливы равенства*

$$\zeta_H(\Lambda(a,1;N)\mid\alpha)=\frac{4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{N^\alpha}+\frac{M(\alpha)^2N}{N^{2\alpha}}\zeta(\Lambda^{(p)}(a,1;N)\mid 1-\alpha),$$
$$\zeta_H(\Lambda^{(p)}(a,1;N)\mid\alpha)=\frac{4M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{N^\alpha}+\frac{M(\alpha)^2N}{N^{2\alpha}}\zeta(\Lambda(a,1;N)\mid 1-\alpha),$$

где

$$M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Из этой теоремы вытекает следующий результат о значении гиперболической дзета–функции этих решёток в отрицательных нечетных точках.

[3] Целочисленная решётка $\Lambda^{(p)}(a_1,\ldots,a_{s-1};N)$ с $\det\Lambda^{(p)}(a_1,\ldots,a_{s-1};N)=N^{s-1}$ называется присоединенной к целочисленной решётке $\Lambda(a_1,\ldots,a_{s-1},1;N)$.

Теорема 4. *Для $\alpha = 1-2n$, $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:*

$$\zeta_H(\Lambda(a,1;N) \mid \alpha) = \frac{2N^{2n-1}B_{2n}}{n} + \frac{N^{4n-2}}{n^2}\sum_{k=0}^{N-1} B_{2n}\left(\left\{\frac{ka}{N}\right\}\right) B_{2n}\left(\left\{\frac{-ak)}{N}\right\}\right),$$

$$\zeta_H(\Lambda^{(p)}(a,1;N) \mid \alpha) = \frac{2N^{2n-1}B_{2n}}{n} + \frac{N^{4n-2}}{n^2}\sum_{k=0}^{N-1} B_{2n}\left(\left\{\frac{ak}{N}\right\}\right) B_{2n}\left(\frac{k}{N}\right),$$

а четные отрицательные точки являются тривиальными нулями.

1.4. Обобщенная гиперболическая дзета-функция решёток

Исходя из аналогии между гиперболической дзета–функцией решёток и дзета-функцией Римана, И. Ю. Реброва по предложению одного из авторов в работах [26], [27] рассмотрела обобщение гиперболической дзета-функции решёток как s-мерного аналога дзета-функции Гурвица. Мы как и раньше все результаты будем формулировать для случая $s = 2$.

Определение 11. *Обобщенной гиперболической дзета–функцией решётки Λ называется функция $\zeta_H(\Lambda + \vec{b}|\alpha)$, задаваемая в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it \quad (\sigma > 1)$ абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta_H(\Lambda + \vec{b} \mid \alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1 + b_1} \cdot \overline{x_2 + b_2})^{-\alpha} = \sum_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x})^{-\alpha}, \tag{17}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка $\vec{x} = -\vec{b}$.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \Lambda(\vec{x})$ для любого $\vec{y} \in \Lambda$, и если $\Lambda_1 + \vec{x}_1 = \Lambda_2 + \vec{x}_2$, то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Lambda_1$.

Для построения аналитического продолжения обобщенной гиперболической дзета-функции выделяется достаточно широкий класс решёток — декартовы решётки. Даются следующие определения.

Определение 12. *Простой декартовой решёткой называется сдвинутая решётка $\Lambda + \vec{x}$ вида*

$$\Lambda + \vec{x} = (t_1 \cdot \mathbb{Z} + x_1) \times (t_2 \cdot \mathbb{Z} + x_2),$$

где $t_j \neq 0 \quad (j = 1, 2)$.

Другими словами, если решётка $\Lambda + \vec{x}$ простая декартова решётка, то она получается из фундаментальной решётки растяжением по осям с коэффициентами t_1, t_2 и сдвигом на вектор $\vec{x}$.

Определение 13. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, представимая объединением конечного числа простых декартовых решёток.*

Определение 14. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, у которой найдется сдвинутая подрешётка, являющаяся простой декартовой решёткой.*

Теорема 5. *Определения* 13 и 14 эквивалентны.

Теорема 6. *Любой сдвиг рациональной решётки является декартовой решёткой.*

Две решётки Λ и Γ называются подобными, если

$$\Gamma = D(d_1, d_2) \cdot \Lambda, \quad \Lambda = D\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}\right) \cdot \Gamma,$$

где

$$D(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

— произвольная диагональная матрица, $d_1 \cdot d_2 \neq 0$.

Множество всех невырожденных вещественных диагональных матриц порядка 2 будем обозначать

$$D_2(\mathbb{R}) = \{D(d_1, d_2) \mid d_1 \cdot d_2 \neq 0\}.$$

Относительно операции матричного умножения $D_2(\mathbb{R})$ — мультипликативная абелева группа.

Множество всех унимодулярных вещественных диагональных матриц $DU_2(\mathbb{R})$ является подгруппой группы $D_2(\mathbb{R})$. Кроме того,

$$D_2(\mathbb{R}) \cong DU_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+,$$

где изоморфизм φ между $D_2(\mathbb{R})$ и прямым произведением $DU_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ устанавливается по правилу

$$\varphi(D(d_1, d_2)) = \left(D\left(\frac{d_1}{\sqrt{|d_1 \cdot d_2|}}, \frac{d_2}{\sqrt{|d_1 \cdot d_2|}}\right), \sqrt{|d_1 \cdot d_2|}\right).$$

Обозначим через $DM_{2,\varepsilon}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц $D(d_1, d_2)$ с

$$\|D(d_1, d_2)\| \leqslant \varepsilon,$$

а через $DM^*_{2,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех диагональных матриц $D(d_1, d_2)$ с

$$\|D(d_1, d_2)\| \leqslant \varepsilon, \quad \text{и} \quad \left\|D\left(\frac{-d_1}{1+d_1}, \frac{-d_2}{1+d_2}\right)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $DM^*_{2,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — компактное подмножество множества $M^*_{2,\varepsilon}(\mathbb{R})$, а $T^2(0, \varepsilon)$ — компактное подмножество тора, то для любой сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x}$ ее замкнутая ε – окрестность траектории $D_2(\mathbb{R}) \cdot (\Lambda + \vec{x})$ при достаточно малом ε будет полным метрическим пространством.

Теорема 7. *Произвольная декартова решётка подобна сдвинутой целочисленной решётке.*

Определение 15. *Целочисленную решётку* Λ *назовем простой, если её проекция на любую координатную ось совпадает с* $\mathbb{Z}$.

Это требование очень существенное и справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Для любой простой решётки* Λ *и её треугольного базиса, заданного матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{\nu,\nu} > 0,\ 0 \leqslant a_{\mu,\nu} < a_{\nu,\nu} \\ (1 \leqslant \mu < \nu \leqslant n) \end{matrix}$$

выполняются соотношения $a_{1,1} = 1$, $(a_{1,\nu}, \dots, a_{\nu,\nu}) = 1$ $(2 \leqslant \nu \leqslant n)$.

Доказательство. Как известно [23], каждая целочисленная решётка имеет треугольный базис, который задается матрицей A. Из требования простоты решётки следует, что $a_{1,1} = 1$, так как проекцией на первую ось является $a_{1,1}\mathbb{Z}$.

Если через N_ν обозначить наибольший общий делитель элементов ν-ого столбца матрицы A, то есть $N_\nu = (a_{1,\nu}, \dots, a_{\nu,\nu})$, то проекцией на ν-ую ось является $N_\nu\mathbb{Z}$. Поэтому $N_\nu = 1$ и теорема доказана. □

Теорема 9. *Любая целочисленная решётка* Λ *подобна простой решётке, которая однозначно определяется решёткой* Λ.

Теорема 10. *Для любой декартовой решётки* Λ *существует единственное представление*

$$\Lambda = D(t_1, t_2) \cdot \Lambda_0, \quad t_1, t_2 > 0,$$

где Λ_0 *— простая решётка.*

Обозначим через $M^*(\Lambda)$ множество точек решётки Λ, попавших в полуоткрытый квадрат $[0; \det\Lambda)^2$, таким образом для любой целочисленной решётки Λ множество $M^*(\Lambda)$ является полной системой вычетов решётки Λ по подрешётке $\det\Lambda \cdot \mathbb{Z}^2$.

Теорема 11. *Пусть*

$$\vec{x}(k) = \left(k, N\left\{\frac{-ak}{N}\right\}\right),$$

тогда для решётки $\Lambda = \Lambda(a, 1; N)$

$$M^*(\Lambda) = \{\vec{x}(k) \mid 0 \leqslant k \leqslant N-1\} \tag{18}$$

и справедливо разбиение

$$\Lambda(a,1;N) = \bigcup_{\vec{x}\in M^*(\Lambda)} (N\mathbb{Z}^2+\vec{x}) =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{N-1}(N\mathbb{Z}^2+\vec{x}(k)). \tag{19}$$

Следствие 1. *Справедливо разбиение*

$$\Lambda(a,1;N) = \bigcup_{k=0}^{N-1}(N\mathbb{Z}+k)\times(N\mathbb{Z}-ak).$$

Для решётки $\Lambda(a,1;N)$ рассмотрим ее присоединенную решётку $\Lambda^{(p)}(a;N)$ решений линейного сравнения

$$m_1 \equiv am \pmod N. \tag{20}$$

При $(a,N)=1$ решётка $\Lambda^{(p)}(a;N)$ также является простой.

Следствие 2. *Справедливо разбиение*

$$\Lambda^{(p)}(a;N) = \bigcup_{k=0}^{N-1}(N\mathbb{Z}+ak)\times(N\mathbb{Z}+k).$$

Для произвольной сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{b}\in CPR_2$ усеченным норменным минимумом, или гиперболическим параметром, называется величина

$$q(\Lambda+\vec{b}) = \min_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x}).$$

Так как

$$\max(1,N(\vec{x}))\leqslant q(\vec{x}),$$

то

$$\max(1,N(\Lambda+\vec{b}))\leqslant q(\Lambda+\vec{b}),$$

для любой решётки Λ.

Норменным спектром сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{b}$ называется множество значений нормы на ненулевых точках сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{b}$:

$$N_{sp}(\Lambda+\vec{b}) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}\},$$

соответственно усеченным норменным спектром сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{b}$ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках сдвинутой решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda+\vec{b}) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}\}.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda+\vec{b}) = \inf_{\lambda\in N_{sp}(\Lambda+\vec{b})} \lambda,$$

$$q(\Lambda+\vec{b}) = \min_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})} \lambda.$$

Порядком точки спектра называется количество точек сдвинутой решётки с заданным значением нормы. Если таких точек сдвинутой решётки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра будем обозначать через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, $q(\lambda)$. Справедлив следующий аналог леммы 1 из работы [15].

Лемма 1. *Для любой решётки $\Lambda+\vec{b}$ и любой точки λ из усеченного норменного спектра $Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})$ порядок точки λ конечен и $Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})$ — дискретен.*

Из леммы 1 следует, что

$$Q_{sp}(\Lambda+\vec{b}) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots\}$$

и

$$q(\Lambda+\vec{b}) = \lambda_1, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Отсюда вытекает, что обобщенную гиперболическую дзета – функцию произвольной сдвинутой решётки $\Lambda+\vec{b}$ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda+\vec{b}\mid\alpha) = \sum_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})} q(\lambda)\lambda^{-\alpha}.$$

Теорема 12. *Для любого $\alpha=\sigma+it$ в правой полуплоскости $\sigma>1$ ряд Дирихле для $\zeta_H(\Lambda+\vec{b}\mid\alpha)$ абсолютно сходится, а в полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0>1$ равномерно сходится.*

Так как при $\alpha=\sigma+it$ и $\sigma\geqslant\sigma_0>0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{q(\lambda_k)}{\lambda_k^{\alpha}}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q(\lambda_k)}{\lambda_k^{\sigma_0}} = \zeta_H(\Lambda+\vec{b}\mid\sigma_0),$$

то из теоремы 12 следует, что для любого комплексного $\alpha=\sigma+it$ в правой полуплоскости $(\sigma>1)$ определена регулярная функция комплексного переменного, заданная рядом (17) (см. стр. 113) и справедливо неравенство

$$|\zeta_H(\Lambda+\vec{b}\mid\alpha)| \leqslant \zeta_H(\Lambda+\vec{b}\mid\sigma).$$

Теорема 13. *Обобщенная гиперболическая дзета–функция одномерной фундаментальной решётки является аналитической функцией на всей α–плоскости, кроме точки $\alpha=1$, в которой у нее полюс первого порядка с вычетом, равным 2.*

Теорема 14. *Для произвольной сдвинутой одномерной решётки $\Lambda + b = d{\cdot}\mathbb{Z}{+}b$ обобщенная гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(d{\cdot}\mathbb{Z}{+}b \mid \alpha)$ является аналитической на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у нее полюс первого порядка с вычетом, равным $\dfrac{2}{\det \Lambda}$.*

Теорема 15. *Обобщенная гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ для любой простой декартовой решётки $\Lambda = \prod_{j=1}^{2}(d_j \cdot \mathbb{Z} + a_j)$ является аналитической функцией во всей α-плоскости $\alpha = \sigma + it$, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у нее полюс 2-порядка.*

Теорема 16. *Для любой декартовой решётки Λ обобщенная гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda + \vec{b} \mid \alpha)$ является аналитической функцией во всей α-плоскости $\alpha = \sigma + it$, кроме точки $\alpha = 1$, в которой у нее полюс s-порядка.*

После этого исследуется вопрос о поведении обобщенной гиперболической дзета-функции на орбите декартовых решёток. И снова рассмотрение начато с одномерного случая.

Теорема 17. *Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha - \beta| < \delta$ такая, что для любой сдвинутой решётки $\Lambda + b \in CPR_1$*

$$\lim_{\Gamma + g \to \Lambda + b} \zeta_H(\Gamma + g \mid \beta) = \zeta_H(\Lambda + b \mid \beta),$$

причем эта сходимость равномерная в окрестности точки α.

Теорема 18. *Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha - \beta| < \delta$ такая, что для любой декартовой решётки $\Lambda + \vec{b} \in CPR_2$*

$$\lim_{D(q_1,q_2)\cdot\Lambda + \vec{g} \to \Lambda + \vec{b}} \zeta_H(D(q_1,q_2) \cdot \Lambda + \vec{g} \mid \beta) = \zeta_H(\Lambda + \vec{b} \mid \beta),$$

причем эта сходимость равномерная в окрестности точки α.

1.5. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решеток

Теперь мы опишем получение явного вида $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ в левой полуплоскости для произвольной целочисленной решётки Λ, при этом нам потребуются присоединенная решётка $\Lambda^{(p)}$, которая определяется соотношением

$$\Lambda^{(p)} = \det \Lambda \cdot \Lambda^*. \tag{21}$$

Для любой целочисленной решётки Λ её присоединенная решётка $\Lambda^{(p)}$ также является целочисленной.

В работе [3] показано, что в этом вопросе существенную роль играют ряды Дирихле с периодическими коэффициентами. Пусть

$$l^*\left(\alpha, \frac{b}{n}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{bm}{n}}}{\overline{m}^{\alpha}} \quad (\Re\alpha > 1). \tag{22}$$

Через ряды Дирихле последнего вида непосредственно выражается гиперболическая дзета-функция целочисленных решёток при $\sigma > 1$, если воспользоваться тригонометрическими суммами решёток (см. [3], стр. 81). Эти ряды имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением, быть может, точки $\alpha = 1$, где может быть полюс первого порядка.

Хотя всё дальнейшее справедливо для произвольной размерности, мы будем излагать материал только для двумерных решёток, делая соответствующие упрощения.

Так как эти решётки — частные случаи декартовых решёток, то как известно существуют аналитические продолжения

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) \quad \text{и} \quad \zeta_H(\Lambda^{(p)} \mid \alpha)$$

на всю комплексную α–плоскость, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой у них полюс порядка 2.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$N = \det\Lambda, \quad M^{(p)}(\Lambda) = \det\Lambda \cdot M(\Lambda), \quad M^*(\Lambda) = \Lambda \cap [0; \det\Lambda)^2. \tag{23}$$

Ясно, что справедливы следующие разложения:

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{x}\in M^*(\Lambda)} \left(\vec{x} + N\mathbb{Z}^2\right), \quad \Lambda^{(p)} = \bigcup_{\vec{x}\in M^{(p)}(\Lambda)} \left(\vec{x} + N\mathbb{Z}^2\right). \tag{24}$$

Пусть $j \in \{1, 2\}$. Через $\Pi(j)$ будем обозначать координатное подпространство

$$\Pi(j) = \{\vec{x} \mid x_\nu = 0 \ (\nu \neq j)\}.$$

Ясно, что

$$\mathbb{R}^2 = \Pi(1) \bigoplus \Pi(2)$$

— разложение в прямую сумму координатных подпространств. Заметим, что если через $(\Lambda + \vec{a})^{(1)}$ и $(\Lambda + \vec{a})^{(2)}$ обозначаются проекции сдвинутой решётки на кооридантные подпространства $\Pi(1)$ и $\Pi(2)$ в соответствии с разложением пространства в прямую сумму этих координатных подпространств, а её пересечения с координатными подпространствами через $(\Lambda + \vec{a})_1 = (\Lambda + \vec{a}) \bigcap \Pi(1)$ и $(\Lambda+\vec{a})_2 = (\Lambda+\vec{a}) \bigcap \Pi(2)$, то вообще говоря $(\Lambda+\vec{a})^{(1)} \neq (\Lambda+\vec{a})_1$ и $(\Lambda+\vec{a})^{(2)} \neq (\Lambda+\vec{a})_2$. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $\Lambda+\vec{a} = (\Lambda_1+\vec{a}_1)\times(\Lambda_2+\vec{a}_2)$, $\Lambda_1 + \vec{a}_1 = (\Lambda + \vec{a})_1$ и $\Lambda_2 + \vec{a}_2 = (\Lambda + \vec{a})_2$.

Напомним, что
$$M(\alpha)=\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$$
и для произвольной целочисленной решётки Λ дзета-функция $\zeta(\Lambda\mid\alpha)$ в правой полуплоскости задается равенством
$$\zeta(\Lambda\mid\alpha)=\sum_{\vec{x}\in\Lambda,\,N(\vec{x})\neq 0}|x_1x_2|^{-\alpha}.$$

Теорема 19. *Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*
$$\zeta(\Lambda\mid\alpha)=\frac{1}{N}\left(M(\alpha)N^{1-\alpha}\right)^2\zeta\left(\Lambda^{(p)}\middle|\,1-\alpha\right). \qquad (25)$$

Доказательство. См. [3]. □

Переходя к взаимным решёткам, эту теорему можно записать в новой форме:

Теорема 20. *Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*
$$\zeta(\Lambda\mid\alpha)=\frac{M(\alpha)^2}{N}\zeta\left(\Lambda^*\middle|\,1-\alpha\right). \qquad (26)$$

Доказательство. См. [3].□

Функциональное уравнение для дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ сразу получается из теоремы 20.

Теорема 21. *Для дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*
$$\zeta(\Lambda\mid\alpha)=\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta\left(\Lambda^*\middle|\,1-\alpha\right). \qquad (27)$$

Доказательство. Действительно,
$$\Lambda=D(d_1,d_2)\cdot\Lambda_0,\quad d_1,d_2>0,$$
где Λ_0 — простая решётка, а $D(d_1,d_2)$ — диагональная матрица.

Справедливы соотношения:
$$\Lambda^*=D(d_1^{-1},d_2^{-1})\cdot\Lambda_0^*,\quad \det\Lambda=d_1d_2\det\Lambda_0,$$
$$\zeta(\Lambda\mid\alpha)=\frac{\zeta(\Lambda_0\mid\alpha)}{(d_1d_2)^{\alpha}},\quad \zeta(\Lambda^*\mid 1-\alpha)=\zeta(\Lambda_0^*\mid 1-\alpha)(d_1d_2)^{1-\alpha}.$$

По теореме 20

$$\zeta(\Lambda_0 \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda_0} \zeta\left(\Lambda_0^* \middle| 1-\alpha\right).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha)(d_1 d_2)^\alpha = \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda_0} \zeta(\Lambda^* \mid 1-\alpha)(d_1 d_2)^{\alpha-1},$$

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda} \zeta\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right).$$

□

Согласно предыдущим обозначениям $(\Lambda)_j = \Lambda \bigcap \Pi(j)$ — пересечение решётки с координатным подпространством. Через Λ_j будем обозначать одномерную решётку, которая получается из решётки $(\Lambda)_j$ отбрасыванием у каждой точки нулевой координаты, а через N_j — её определитель. Таким образом $\Lambda_j^{(p)}$ — "присоединеная" одномерная решётка, $N_j = \det \Lambda_j$ и $N_j | N$.

Как известно [23], каждая целочисленная решётка имеет треугольный базис: $\vec{\lambda}_1 = (M_1, a)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, N_2)$, $0 \leqslant a < N_2$, $\det \Lambda = N = M_1 N_2$ и $\vec{\lambda}'_1 = (N_1, 0)$, $\vec{\lambda}'_2 = (b, M_2)$, $0 \leqslant b < N_1$, $\det \Lambda = N = N_1 M_2$. Справедливы следующие соотношения: $M_1 = (b, N_1)$, $M_2 = (a, N_2)$. Пользуясь этими базисами гиперболическую дзета-функцию целочисленной решётки Λ можно записать в виде

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, (m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{\left(\overline{mM_1} \cdot \overline{ma + N_2 n}\right)^\alpha} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, (m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{\left(\overline{mN_1 + nb} \cdot \overline{M_2 n}\right)^\alpha}.$$

Выделяя одномерные компоненты и главную компонету, получим

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = 2\zeta(\alpha) \left(\frac{1}{N_1^\alpha} + \frac{1}{N_2^\alpha} \right) + \zeta(\Lambda \mid \alpha),$$

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, (m, ma+N_2 n) \neq (0,0)} \frac{1}{\left(\overline{mM_1} \cdot \overline{ma + N_2 n}\right)^\alpha} =$$

$$= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, (mN_1+nb, n) \neq (0,0)} \frac{1}{\left(\overline{mN_1 + nb} \cdot \overline{M_2 n}\right)^\alpha}.$$

Теорема 22. *Для гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha) \left(\frac{1}{N_1^\alpha} + \frac{1}{N_2^\alpha} \right) + M(\alpha)^2 N^{1-2\alpha} \zeta\left(\Lambda^{(p)} \middle| 1-\alpha\right). \quad (28)$$

Доказательство. См. [3]. □

Используя теорему 20 и переходя к взаимной решётке, получим новую форму функционального уравнения для гиперболической дзета-функции целочисленной решётки.

Теорема 23. *Для гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)\left(\frac{1}{N_1^\alpha} + \frac{1}{N_2^\alpha}\right) + \frac{M(\alpha)^2}{N}\zeta\left(\Lambda^*\right| 1-\alpha). \qquad (29)$$

Доказательство. См. [3]. □

1.6. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции диагональных решёток

В этом разделе рассмотрим одномерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d\mathbb{Z} \mid \alpha)$ и двумерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \mid \alpha)$.

Лемма 2. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d), \qquad (30)$$

где аналитическая по α функция $f(\alpha, d)$ задана равенством

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geqslant 1, \\ \sum\limits_{1 \leqslant |m| \leqslant \left[\frac{1}{d}\right]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < d < 1. \end{cases} \qquad (31)$$

Доказательство. Действительно, при $d \geqslant 1$ для любого целого $m \neq 0$ имеем $\overline{dm} = |dm|$, поэтому

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{x \in \Lambda}{}' \,\overline{x}^{\,-\alpha} = \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}' \,\overline{dm}^{\,-\alpha} = \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}' |dm|^{-\alpha} = \zeta(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d).$$

При $0 < d < 1$ для любого целого $m \neq 0$ имеем

$$\overline{dm} = \begin{cases} |dm|, & \text{при } |m| > \frac{1}{d}, \\ 1, & \text{при } 1 \leqslant |m| \leqslant \frac{1}{d} \end{cases},$$

поэтому

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}' \,\overline{dm}^{\,-\alpha} = \sum_{m \in \mathbb{Z}}{}' |dm|^{-\alpha} + \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant \left[\frac{1}{d}\right]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d).$$

□

Теорема 24. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$, где $d > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda} \left(\zeta_H\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right) - f(1-\alpha, d^{-1})\right). \tag{32}$$

Доказательство. Действительно, если $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$, то $\Lambda^* = d^{-1} \cdot \mathbb{Z}$.

По теореме 20 (см. стр. 120) при $s = 1$ получим

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)}{d} \zeta\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right).$$

Так как по лемме 2 имеем

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d), \quad \zeta_H(\Lambda^* \mid 1-\alpha) = \zeta(\Lambda^* \mid 1-\alpha) + f(1-\alpha, d^{-1}),$$

то теорема доказана. □

Лемма 3. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1)\zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2) + f(\alpha, d_1) + f(\alpha, d_2) = \\ = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2).\end{gathered} \tag{33}$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \left(1 + {\sum_{m \in \mathbb{Z}}}' \overline{d_1 m}^{\,-\alpha}\right)\left(1 + {\sum_{m \in \mathbb{Z}}}' \overline{d_2 m}^{\,-\alpha}\right) - 1 = \\ = \left(1 + \zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + f(\alpha, d_1)\right)\left(1 + \zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\right) - 1 = \\ = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_1)\zeta(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta(\Lambda_1 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2) + f(\alpha, d_1) + f(\alpha, d_2) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + \\ + f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1) f(\alpha, d_2).\end{gathered}$$

□

Теорема 25. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости*

$\sigma < 0$ *справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) -$$
$$-f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + f(\alpha, d_1)f(\alpha, d_2) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right) - \right.$$
$$-\zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) - \zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) -$$
$$-f(1-\alpha, d_1^{-1})\zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) - f(1-\alpha, d_2^{-1})\zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) +$$
$$\left. + f(1-\alpha, d_1^{-1})f(1-\alpha, d_2^{-1})\right). \tag{34}$$

Доказательство. Действительно, если $\Lambda = d_1 \cdot \mathbb{Z} \times d_2 \cdot \mathbb{Z}$, то $\Lambda^* = d_1^{-1} \cdot \mathbb{Z} \times \times d_2^{-1} \cdot \mathbb{Z}$.

По теореме 20 (см. стр. 120) при $s = 2$ получим

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right).$$

Так как по лемме 3 имеем

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) + \zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) +$$
$$+f(\alpha, d_1)\zeta_H(\Lambda_2 \mid \alpha) + f(\alpha, d_2)\zeta_H(\Lambda_1 \mid \alpha) - f(\alpha, d_1)f(\alpha, d_2),$$
$$\zeta_H(\Lambda^* \mid 1-\alpha) = \zeta(\Lambda^* \mid 1-\alpha) + \zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) + \zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) +$$
$$+f(1-\alpha, d_1^{-1})\zeta_H(\Lambda_2^* \mid 1-\alpha) + f(1-\alpha, d_2^{-1})\zeta_H(\Lambda_1^* \mid 1-\alpha) -$$
$$-f(1-\alpha, d_1^{-1})f(1-\alpha, d_2^{-1}).$$

то теорема доказана. □

1.7. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции декартовых решёток

Прежде всего нам потребуется основной результат о виде произвольной декартовой решётки (см. теорему 10 на стр. 115). Согласно этой теореме декартову решётку Λ однозначно можно представить в виде

$$\Lambda = D(d_1, d_2) \cdot \Lambda_0, \quad d_1, d_2 > 0,$$

где Λ_0 — простая решётка, а $D(d_1, d_2)$ — диагональная матрица.

Из теоремы 8 (стр. 115) следует, что простая решётка Λ_0 является решёткой решений сравнения

$$-am_1 + m_2 \equiv 0 \pmod N \quad (a, N) = 1$$

или эквивалентного сравнения

$$m_1 - bm_2 \equiv 0 \pmod N \quad (b, N) = 1,$$

где $ab \equiv 1 \pmod N$ и $1 \leqslant b \leqslant N-1$.

По аналогии с предыдущими обозначениями $(\Lambda_0)_j = \Lambda_0 \bigcap \Pi(j)$ — пересечение решётки с координатным подпространством. Через $\Lambda_{0,j}$ будем обозначать одномерную решётку, которая получается из решётки $(\Lambda_0)_j$ отбрасыванием у каждой точки нулевой координаты. Ясно, что $\Lambda_{0,j} = N\mathbb{Z}$.

Лемма 4. *Для любой одномерной целочисленной решётки $\Lambda = N\mathbb{Z}$ для её взаимной и присоединенной решёток справедливы равенства*

$$\Lambda^* = \frac{1}{N}\mathbb{Z}, \quad \Lambda^{(p)} = \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Действительно, $\det \Lambda = N$. Соотношение $\Lambda^* = \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ очевидно, а второе следует из равенства $\Lambda^{(p)} = \det \Lambda \cdot \Lambda^*$. $\square$

Таким образом $\Lambda_{0,j}^{(p)} = \mathbb{Z}$ — "присоединеная" одномерная решётка.

Теперь перейдем к гиперболической дзета-функции декартовой решётки. Рассмотрим сначала более простой случай, когда все элементы $d_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2)$.

Теорема 26. *Для гиперболической дзета-функции декартовой решётки Λ вида $\Lambda = D(d_1, d_2) \cdot \Lambda_0$, где Λ_0 — простая решётка и все элементы $d_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2)$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)\left(\frac{1}{(Nd_1)^\alpha} + \frac{1}{(Nd_2)^\alpha}\right) + \\ + M(\alpha)^2\left(d_1^{-\alpha} d_2^{-\alpha} N^{1-2\alpha}\right)\zeta\left(\Lambda_0^{(p)}\middle| 1-\alpha\right), \tag{35}$$

где $N = \det \Lambda_0$.

Доказательство. См. [3]. $\square$

Теперь получим функциональное уравнение с использованием взаимной решётки.

Теорема 27. *Для гиперболической дзета-функции декартовой решётки Λ вида $\Lambda = D(d_1, d_2) \cdot \Lambda_0$, где Λ_0 — простая решётка и все элементы $d_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2)$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = 2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)\left(\frac{1}{(Nd_1)^\alpha} + \frac{1}{(Nd_2)^\alpha}\right) + \frac{M(\alpha)^2}{\det \Lambda}\zeta\left(\Lambda^* \middle| 1-\alpha\right). \tag{36}$$

Доказательство. См. [3]. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда множество $D_1 = \{j | 0 < d_j < 1\} \neq \varnothing$. Таким образом, $D_1 = \{1\}$ или $D_1 = \{2\}$, или $D_1 = \{1, 2\}$.

Для этого рассмотрим ещё один вид рядов Дирихле с периодическими коэффициентами. Пусть

$$l^{**}\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{bm}{n}}}{\overline{dm}^{\alpha}} \quad (\Re\alpha > 1, \quad d > 0). \tag{37}$$

Через ряды Дирихле последнего вида непосредственно выражается гиперболическая дзета-функция декартовых решёток при $\sigma > 1$, если воспользоваться тригонометрическими суммами решёток, а именно, для любой декартовой решётки $\Lambda = D(d_1, d_2) \cdot \Lambda_0$, где Λ_0 — простая решётка, а $D(d_1, d_2)$ — диагональная матрица:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) + 1 = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)^{-\alpha} + 1 = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} \frac{\delta_{\Lambda_0}(\vec{m})}{(\overline{d_1 m_1} \cdot \overline{d_2 m_2})^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\det\Lambda_0} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)} \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2} \frac{e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{d_1 m_1} \cdot \overline{d_2 m_2})^{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\det\Lambda_0} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)} \prod_{j=1}^{2} \sum_{m_j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m_j x_j}}{\overline{d_j m_j}^{\alpha}} = \frac{1}{\det\Lambda_0} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)} \prod_{j=1}^{2} l^{**}\left(\alpha, d_j, \frac{b_j(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right), \tag{38}$$

где $b_j(\vec{x}) = x_j \det\Lambda_0$ — целое число $(j = 1, 2)$ для любой точки $\vec{x} = (x_1, x_2) \in M(\Lambda_0)$.

Гиперболическая дзета-функция решётки не является однородной, а дзета-функция является. Из предыдущих рассуждений видно, что однородная дзета-функция решётки играет при аналитическом продолжении ключевую роль. В общем случае гиперболическую дзета-функцию решётки нельзя представить как сумму однородных компонент, как это удается сделать для целочисленных решеток, но для декартовых решеток мы дадим определение j, t-компонент.

Как и раньше, для декартовой решётки Λ через Λ_j будем обозначать проекцию пересечения $\Lambda \bigcap \Pi(j)$ в $\mathbb{R}$. Следующие определения несколько отличаются от общих из работы [3].

Определение 16. *Будем одномерной компонентой гиперболической дзета-функции решётки Λ называть функцию $\zeta_H(\Lambda_j|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, задаваемую при $\sigma > 1$ рядом*

$$\zeta_H(\Lambda_j|\alpha) = \sum_{x\in\Lambda_j,\, |x|\neq 0} \overline{x}^{-\alpha}. \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что для одномерной компоненты гиперболической дзета-функции решётки Λ справедлив аналог формулы (38).

$$\zeta_H(\Lambda_j|\alpha) = \frac{1}{\det\Lambda_{0,j}} \sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_{0,j})} l^{**}\left(\alpha, d_j, \frac{b_j(\vec{x})}{\det\Lambda_{0,j}}\right) - 1. \tag{40}$$

Кроме этого имеет место разложение на компоненты

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \zeta_H(\Lambda_1|\alpha) + \zeta_H(\Lambda_2|\alpha) + \zeta_{H,2}(\Lambda|\alpha), \tag{41}$$

где $\zeta_{H,2}(\Lambda|\alpha)$ — главная компонента.

Определение 17. *Будем двумерную компоненту гиперболической дзета-функции решётки Λ называть главной компонентой и обозначать через $\zeta_{H,2}(\Lambda|\alpha)$.*

Ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_{H,2}(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda,\, N(\vec{x})\neq 0} (\overline{x_1}\cdot\overline{x_2})^{-\alpha}. \tag{42}$$

Теорема 28. *Для натуральных n, целых b с $\delta_n(b)=0$, положительных d и аналитического продолжения функции $l^{**}\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right)$ на всю комплексную плоскость справедливы представления*

$$l^{**}\!\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right) = 1 + \frac{1}{d^\alpha}\left(l^{*}\!\left(\alpha, \frac{b}{n}\right) - 1\right) + f\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right), \tag{43}$$

где

$$f\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right) = \sum_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{d}\right]} e^{2\pi i\frac{bm}{n}}\left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right)$$

и $f\left(\alpha, d, \frac{b}{n}\right) = 0$ при $d\geqslant 1$.

Доказательство. См. [3]. □

Согласно определения множества D_1 на стр. 125 возможно три случая: $D_1=\{1\}$, $D_1=\{2\}$ и $D_1=\{1,2\}$.

Теорема 29. *Для главной компоненты гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = D(d_1,d_2)\cdot\Lambda_0$, где Λ_0 — простая решётка и все элементы $d_j>0$ $(j=1,2)$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

при $D_1=\{1\}$

$$\zeta_{H,2}(\Lambda\mid\alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta\left(\Lambda^*|\, 1-\alpha\right) + \frac{1}{\det\Lambda_0}\sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)} M(\alpha)N_0^{1-\alpha}\cdot$$
$$\cdot(d_2)^{-\alpha} f\left(\alpha, d_1, \frac{b_1(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right)\zeta\left(N_0\mathbb{Z} + b_2(\vec{x})|\, 1-\alpha\right), \tag{44}$$

при $D_1 = \{2\}$

$$\zeta_{H,2}(\Lambda\mid\alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta\left(\Lambda^*\middle|\,1-\alpha\right) + \frac{1}{\det\Lambda_0}\sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)} M(\alpha)N_0^{1-\alpha}\cdot$$
$$\cdot(d_1)^{-\alpha} f\left(\alpha, d_2, \frac{b_2(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right)\zeta\left(N_0\mathbb{Z}+b_1(\vec{x})\middle|\,1-\alpha\right), \tag{45}$$

при $D_1 = \{1,2\}$

$$\zeta_{H,2}(\Lambda\mid\alpha) = \frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta\left(\Lambda^*\middle|\,1-\alpha\right) + \frac{1}{\det\Lambda_0}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_0)}\left(M(\alpha)N_0^{1-\alpha}\cdot\left((d_2)^{-\alpha} f\left(\alpha, d_1, \frac{b_1(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right)\zeta\left(N_0\mathbb{Z}+b_2(\vec{x})\middle|\,1-\alpha\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\,(d_1)^{-\alpha} f\left(\alpha, d_2, \frac{b_2(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right)\zeta\left(N_0\mathbb{Z}+b_1(\vec{x})\middle|\,1-\alpha\right)\right)+$$
$$\left.+\,f\left(\alpha, d_1, \frac{b_1(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right) f\left(\alpha, d_2, \frac{b_2(\vec{x})}{\det\Lambda_0}\right)\right), \tag{46}$$

где $N_0 = \det\Lambda_0$.

Доказательство. См. [3].□

Заметим, что формула (46) справедлива во всех трех случаях и при условиях теоремы 26 (стр. 125).

Теорема 30. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки* Λ *вида* $\Lambda = D(d_1, d_2)\cdot\Lambda_0$, *где* Λ_0 — *простая решётка и все элементы* $d_j > 0$ $(j = 1, 2)$, *в левой полуплоскости* $\sigma < 0$ *справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha) = \sum_{t=1}^{2}\sum_{\vec{j}_t\in J(t,2)}\frac{M(\alpha)^t}{\det\Lambda_{\vec{j}_t}}\zeta\left(\Lambda^*_{\vec{j}_t}\middle|\,1-\alpha\right)+$$
$$+\sum_{t=1}^{2}\sum_{\vec{j}_t\in J(t,2)}\frac{1}{\det\Lambda_{0,\vec{j}_t}}\sum_{\vec{x}\in M(\Lambda_{0,\vec{j}_t})}\sum_{r=1}^{|D_{1,\vec{j}_t}|}M(\alpha)^{t-r}N_{0,\vec{j}_t}^{t-r-\alpha(t-r)}\cdot$$
$$\cdot\sum_{\vec{j}_{t-r,r}\in J_{t-r,r,t}(D_{1,\vec{j}_t})}\prod_{\nu=1}^{t-r}(d_{j_\nu})^{-\alpha}\prod_{\nu=t-r+1}^{t} f\left(\alpha, d_{j_\nu}, \frac{b_{j_\nu}(\vec{x})}{\det\Lambda_{0,\vec{j}_t}}\right)\zeta\left(N_{0,\vec{j}_t}\mathbb{Z}^{t-r}+\vec{b}_{t-r}(\vec{x})\middle|\,1-\alpha\right), \tag{47}$$

где $N_{0,\vec{j}_t} = \det\Lambda_{0,\vec{j}_t}$.

Доказательство. См. [3]. □

1.8. Алгебраические решётки

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решётки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор, такой что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{48}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (48) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda(T(\vec{a}))$, заданную равенством

$$\Lambda(T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) \middle| m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{50}$$

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1 \ldots x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Обозначим через $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Так как все корни неприводимого многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ — действительные числа, то мы имеем набор из s изоморфных чисто вещественных алгебраических полей степени s.

Заметим, что, вообще говоря, $\Lambda(T(\vec{a})) \neq \Lambda\left(\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(1)}\right)$, а выполняется только включение $\Lambda(T(\vec{a})) \subset \Lambda\left(\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(1)}\right)$. Равенство будет иметь место только тогда, когда числа $1, \Theta_1, \ldots, \Theta_1^{s-1}$ будут образовывать базис кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(1)}}$.

Из предыдущего следует, что каждая строка матрицы $T(\vec{a})$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Так как точки решётки $\Lambda(T(\vec{a}))$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $T(\vec{a})$, то координаты каждой точки $\vec{x} \in \Lambda(T(\vec{a}))$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решётки принадлежит одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка. Как обычно,[4] $\sigma_j(\vec{\Theta}) = (-1)^j a_{s-j}$ — элементарные симметрические многочлены степени j от корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant s)$.

Лемма 5. *Пусть* $S_j(\vec{\Theta}) = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \Theta_\nu^j$, $j \geqslant 0$ *и симметрическая матрица* $Q(\vec{a})$ *задана равенством*

$$Q(\vec{a}) = \begin{pmatrix} S_0(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{s-1}(\vec{\Theta}) \\ S_1(\vec{\Theta}) & \ldots & S_s(\vec{\Theta}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{s-1}(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{2s-2}(\vec{\Theta}) \end{pmatrix},$$

тогда $Q(\vec{a})$ *— невырожденная симметрическая рациональная матрица и справедливо равенство* $Q(\vec{a}) = T(\vec{a}) \cdot T(\vec{a})^\top$.

Доказательство. См. [3]. □

Обозначим через $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$ элементы матрицы $Q(\vec{a})^{-1}$. Ясно, что из симметричности функций $S_j(\vec{\Theta})$ вытекает симметричность функций $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$T^*(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. См. [3].□

Лемма 7. *Произвольная точка* $\vec{x}$ *решётки* $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ *имеет вид*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\, k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_1^{k-1}, \ldots, \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\, k}(\vec{\Theta}) m_\nu \right) \Theta_s^{k-1} \right),$$

где $m_1, \ldots, m_s$ *— произвольные целые числа.*

[4]здесь пользуемся естественным соглашением, что $a_s = 1$.

Доказательство. См. [3].□

Лемма 8. *Пусть $t(\vec{\Theta})$ — наименьший общий знаменатель для рациональных чисел $S_0(\vec{\Theta}),\ldots,S_{s-1}(\vec{\Theta})$, тогда точка $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ будет целочисленной тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ имеет вид: $\vec{x} = t(\vec{\Theta})\cdot(m,\ldots,m)$ и m — целое число.*

Других точек $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$, у которых хотя бы одна координата рациональная, не существует.

Доказательство. См. [3].□

Из предыдущих лемм следует, что точки взаимной решётки имеют координаты, образующие полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решётки принадлежит одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu = 1,\ldots,s)$.

1.9. Цели и содержание работы

В работе [12] была получена асимптотическая формула (12) (стр. 108) для произвольной алгебраической решётки.

Целью данной работы является уточнение этой формулы для алгебраической решётки квадратичного поля.

Во втором разделе последовательно проводится осуществление указанной программы исследований.

2. Асимптотическая формула для алгебраической решётки

2.1. Интегральное представление для $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ алгебраической решётки Λ квадратичного поля

Пусть F — чисто вещественное квадратичное поле , $F^{(1)} = F$, $F^{(2)} = F$ набор его сопряженных полей и для любого алгебраического числа Θ из F $\Theta^{(1)} = \Theta, \Theta^{(2)}$ — набор его алгебраически сопряженных чисел. Через $\mathbb{Z}_F$ обозначим кольцо целых алгебраических чисел квадратичного поля F.

Рассмотрим алгебраическую решётку

$$\Lambda = \left\{(\Theta^{(1)},\Theta^{(2)})|\Theta\in\mathbb{Z}_F\right\}.$$

Так как для любого ненулевого целого алгебраического числа Θ из $\mathbb{Z}_F$ имеем $|\Theta^{(1)}\Theta^{(2)}| = |N(\Theta)| \geqslant 1$, то $q(\Lambda) = 1$.

Для произвольного $t > 1$ рассмотрим алгебраическую решётку

$$\Lambda(t) = \left\{(\Theta^{(1)}t,\Theta^{(2)}t)|\Theta\in\mathbb{Z}_F\right\}.$$

Ясно, что $q(\Lambda(t)) = t^2$. Так как $\det\Lambda(t) = t^2\det\Lambda$, то

$$q(\Lambda(t)) = \frac{\det\Lambda(t)}{\det\Lambda}. \tag{51}$$

Согласно (7) (стр. 107), (9) (стр. 107), (51) для гиперболической дзета–функции $\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)$

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \sum_{\Theta\in\mathbb{Z}_F}{}' (\overline{t\Theta^{(1)}}\cdot\overline{t\Theta^{(2)}})^{-\alpha} \tag{52}$$

алгебраической решётки $\Lambda(t)$ справедливы оценки

$$C_2(\alpha)\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} \leqslant \zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) \leqslant C_4(\alpha)\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}.$$

Для вывода асимптотической формулы для гиперболической дзета – функции алгебраической решётки $\Lambda(t)$ нам потребуются следующие обозначения.

Через $\varepsilon_0 > 1$ обозначим фундаментальную единицу кольца $\mathbb{Z}_F$, а через $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$, $\varepsilon^{(2)}$ — набор алгебраически сопряженных единиц.

Пусть далее везде $\sum\limits_{(\omega)}$ обозначает суммирование по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$, а $\sum\limits_{\varepsilon}$ обозначает суммирование по всем единицам кольца $\mathbb{Z}_F$. Как обычно,через R обозначим регулятор поля F, то есть

$$R = \left|\ln|\varepsilon_0^{(1)}|\right| = \ln|\varepsilon_0^{(1)}|.$$

Обозначения для различных областей суммирования и интегрирования будут вводиться по мере необходимости.

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}}\cdot\overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha}.$$

Доказательство. Как известно, ряд (52) для $\zeta(\Lambda(t)|\alpha)$ при $\alpha > 1$ абсолютно сходится, поэтому сгруппируем все слагаемые с ассоциированными Θ. Так как ассоциированные целые алгебраические числа порождают один и тот же главный идеал, то

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \sum_{\Theta\in\mathbb{Z}_F}{}' (\overline{t\Theta^{(1)}}\cdot\overline{t\Theta^{(2)}})^{-\alpha} = \sum_{(\omega)}\sum_{\varepsilon}\left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon^{(1)}}\cdot\overline{t\omega^{(2)}\varepsilon^{(2)}}\right)^{-\alpha}.$$

Применяя теорему Дирихле о единицах к внутренней сумме, получим

$$\sum_{\varepsilon}(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon^{(1)}}\cdot\overline{t\omega^{(2)}\varepsilon^{(2)}})^{-\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\overline{t\omega^{(1)}(\pm1)\varepsilon_0^{(1)k}}\cdot\overline{t\omega^{(2)}(\pm1)\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha} =$$

$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}}\cdot\overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha}.$$

Что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть ω — произвольное целое ненулевое алгебраическое число и вектор $\vec{j}$ — произвольный вектор из области $D(p)$ целочисленных векторов, заданной равенством

$$D(1) = \{(1,2),\,(2,1)\}, \quad D(2) = \{(1,2)\}.$$

Через $B(\vec{j},p) = B(\vec{j},p,\omega)$ обозначим множество значений k, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}| \geqslant 1, & \text{при } \nu = 1,\dots,p, \\ |t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}| < 1, & \text{при } \nu = p+1,\dots,2. \end{cases}$$

Пусть далее

$$A(\vec{j},p) = \begin{cases} \sum\limits_{k\in B(\vec{j},1)} \left|t\omega^{(j_2)}\varepsilon_0^{(j_2)k}\right|^{\alpha}, & \text{при } p = 1, \\ \sum\limits_{k\in B(\vec{j},2)} 1, & \text{при } p = 2 \end{cases} \tag{53}$$

и

$$A(\omega) = \sum_{p=1}^{2} \sum_{\vec{j}\in D(p)} A(\vec{j},p). \tag{54}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 10. *Справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)} \frac{1}{(t^2|N(\omega)|)^{\alpha}} \cdot A(\omega).$$

Доказательство. Так как

$$|\left(t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}\right) \cdot \left(t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}\right)| = t^2|N(\omega)| \cdot |N(\varepsilon_0)|^k = t^2|N(\omega)| \geqslant 1,$$

то множество целых k таких, что выполнено условие

$$|t\omega^{(j)}\varepsilon_0^{(j)k}| < 1 \qquad (j = 1,2),$$

пусто. Поэтому для величины

$$\sigma(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}} \cdot \overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha}$$

справедливо равенство

$$\sigma(\omega) = \sum_{p=1}^{2} \sum_{\vec{j}\in D(p)} \sum_{k\in B(\vec{j},p)} \left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}} \cdot \overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha}.$$

Так как для любого ненулевого действительного x имеем

$$(\bar{x})^{-\alpha} = \begin{cases} |x|^{-\alpha} & \text{при} \quad |x| \geqslant 1, \\ |x|^{-\alpha}|x|^{\alpha} & \text{при} \quad 0 < |x| < 1, \end{cases}$$

то для любого $k \in B(\vec{j}, p)$ справедливо равенство

$$\left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}} \cdot \overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha} = \left(\prod_{\nu=1}^{p}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|\right)^{-\alpha} \cdot \left(\prod_{j=p+1}^{s}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|\right)^{-\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{\nu=p+1}^{s}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|\right)^{\alpha} = \left(t^2\left|\omega^{(1)}\omega^{(2)}\right|\left|\varepsilon_0^{(1)}\varepsilon^{(2)}\right|^k\right)^{-\alpha}\left(\prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|\right)^{\alpha} =$$

$$= \left(t^2|N(\omega)||N(\varepsilon_0)|^k\right)^{-\alpha}\left(\prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|\right)^{\alpha} = \left(t^2|N(\omega)|\right)^{-\alpha}\prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|^{\alpha}.$$

Заметим, что

$$\prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|^{\alpha} = \begin{cases} \left|t\omega^{(j_2)}\varepsilon_0^{(j_2)k}\right|^{\alpha}, & \text{при } p=1, \\ 1, & \text{при } p=2. \end{cases}$$

Отсюда и из (53) следует, что

$$\sum_{k\in B(\vec{j},p)}\left(\overline{t\omega^{(1)}\varepsilon_0^{(1)k}} \cdot \overline{t\omega^{(2)}\varepsilon_0^{(2)k}}\right)^{-\alpha} = \sum_{k\in B(\vec{j},p)}\left(t^2|N(\omega)|\right)^{-\alpha}\prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|^{\alpha} =$$

$$= \frac{A(\vec{j},p)}{(t^2|N(\omega)|)^{\alpha}}.$$

И так как по лемме 9 (стр. 132)

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)}\sigma(\omega),$$

то из (54) следует

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)}\sum_{p=1}^{2}\sum_{\vec{j}\in D(\vec{p})}\frac{A(\vec{j},p)}{(t^2|N(\omega)|)^{\alpha}} = 2\sum_{(\omega)}\frac{A(\omega)}{(t^2|N(\omega)|)^{\alpha}},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Пусть

$$Y(\vec{j},p,k) = \prod_{\nu=p+1}^{2}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_0^{(j_\nu)k}\right|^{\alpha} = \begin{cases} \left|t\omega^{(j_2)}\varepsilon_0^{(j_2)k}\right|^{\alpha}, & \text{при } p=1, \\ 1, & \text{при } p=2, \end{cases} \tag{55}$$

$$L_n(x) = \ln t + \ln |\omega^{(n)}| + x \ln |\varepsilon^{(n)}| \quad (n = 1, 2), (t > 1).$$

Заметим, что для любого x

$$L_1(x) + L_2(x) = \ln t^2 + \ln |N(\omega)|.$$

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$Y(\vec{j}, p, k) = \begin{cases} \dfrac{\alpha R}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2} R\right)} \displaystyle\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{\alpha L_{j_2}(x)} dx, & \text{\textit{при} } p = 1, \\ \displaystyle\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} dx, & \text{\textit{при} } p = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно, при $p = 2$ утверждение леммы тривиально.

Преобразовывая $Y(\vec{j}, 1, k)$ к экспоненциальному виду, получим

$$Y(\vec{j}, 1, k) = e^{\alpha(\ln t + \ln |\omega^{(j_2)}| + k \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|)} = e^{\alpha(\ln t + \ln |\omega^{(j_2)}|)} e^{k\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|}.$$

Так как при $b \neq 0$

$$\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{bx} dx = e^{bk} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{bx} dx = e^{bk} \cdot \frac{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}}{b} = \frac{2e^{bk} \operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}{b},$$

то получим при $b = \alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|$

$$e^{k\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|} = \frac{\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|}{2}\right)} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{x\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|} dx.$$

Далее заметим, что

$$\frac{\alpha R}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)} = \frac{-\alpha R}{2 \operatorname{sh}\left(-\frac{\alpha R}{2}\right)},$$

поэтому

$$e^{k\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|} = \frac{\alpha R}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{x\alpha \ln |\varepsilon_0^{(j_2)}|} dx.$$

Отсюда следует, что

$$Y(\vec{j},1,k)=e^{\alpha(\ln t+\ln|\omega^{(j_2)}|)}\cdot\frac{\alpha R}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}e^{x\alpha\ln|\varepsilon_0^{(j_2)}|}dx=$$

$$=\frac{\alpha R}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\cdot\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}e^{\alpha(\ln t+\ln|\omega^{(j_2)}|+x\ln|\varepsilon_0^{(j_2)}|)}dx=\frac{\alpha R}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}e^{\alpha L_{j_2}(x)}dx,$$

что и требовалось доказать. □

Определим область $\Omega(\vec{j},p)\subset\mathbb{R}$, как множество всех значений x, удовлетворяющих соотношениям

при $p=1$

$$\begin{cases} L_{j_1}(x)\geqslant\left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(j_1)}|,\\ L_{j_2}(x)\leqslant\left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(j_2)}|;\end{cases}$$

при $p=2$

$$\begin{cases} L_{1}(x)\geqslant\left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(1)}|,\\ L_{2}(x)\geqslant\left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(2)}|.\end{cases}$$

Лемма 12. *Справедливо следующее интегральное представление*

$$A(\vec{j},p)=\begin{cases}\dfrac{\alpha R}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\displaystyle\int\limits_{\Omega(\vec{j},p)}e^{\alpha L_{j_2}(x)}dx, & \text{\textit{при} } p=1,\\[2ex] \displaystyle\int\limits_{\Omega(\vec{j},2)}dx, & \text{\textit{при} } p=2.\end{cases}$$

Доказательство. Из (53) и (55) следует, что

$$A(\vec{j},p)=\sum_{k\in B(\vec{j},p)}Y(\vec{j},p,k).$$

Находим по лемме 11:

$$A(\vec{j},p)=\begin{cases}\dfrac{\alpha R}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\displaystyle\sum_{k\in B(\vec{j},1)}\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}e^{\alpha L_{j_2}(x)}dx, & \text{при } p=1,\\[2ex] \displaystyle\sum_{k\in B(\vec{j},2)}\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}dx, & \text{при } p=2\end{cases}$$

Так как для любого целого k при $x \in [k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})$ имеем

$$k = [x+\frac{1}{2}] = x + \frac{1}{2} - \{x+\frac{1}{2}\},$$

то

$$L_n(k) = \ln t + \ln|\omega^{(n)}| + k\ln|\varepsilon^{(n)}| = \ln t + \ln|\omega^{(n)}| + \left(x+\frac{1}{2}-\left\{x+\frac{1}{2}\right\}\right)\ln|\varepsilon^{(n)}| =$$

$$= L_n(x) - \left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln|\varepsilon^{(n)}|,$$

отсюда следует, что

$$\bigcup_{k\in B(\vec{j},p)}\left[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) = \Omega(\vec{j},p),$$

а, значит

$$A(\vec{j},p) = \begin{cases} \dfrac{\alpha R}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)} \displaystyle\int\limits_{\Omega(\vec{j},1)} e^{\alpha L_{j_2}(x)}dx, & \text{при } p=1, \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega(\vec{j},2)} dx, & \text{при } p=2, \end{cases}$$

что и требовалось доказать $\square$

Пусть далее везде

$$a = \frac{1}{2}\max_{1\leqslant n\leqslant 2}|\ln|\varepsilon_0^{(n)}||.$$

Так как $\ln|\varepsilon_0^{(1)}| + \ln|\varepsilon_0^{(2)}| = 0$, то $|\ln|\varepsilon_0^{(1)}|| = |\ln|\varepsilon_0^{(2)}||$ и $a = \frac{R}{2}$, где $R = \left|\ln|\varepsilon_0^{(1)}|\right|$ — регулятор поля F.

Определим область $\Omega_\lambda(\vec{j},p) \subset \mathbb{R}$ $(\lambda = 1,2)$ следующими соотношениями

при $p=1$

$$\begin{cases} L_{j_1}(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ L_{j_2}(x) \leqslant (-1)^{\lambda}a, \end{cases}$$

при $p=2$

$$\begin{cases} L_1(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ L_2(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \end{cases}$$

а величины $A_\lambda(\vec{j},p)$ $(\lambda=1,2)$ зададим равенствами

$$A_\lambda(\vec{j},p) = \begin{cases} \dfrac{\alpha R}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)} \displaystyle\int\limits_{\Omega_\lambda(\vec{j},1)} e^{\alpha L_{j_2}(x)}dx, & \text{при } p=1, \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega_\lambda(\vec{j},2)} dx, & \text{при } p=2, \end{cases}, \quad (\lambda=1,2).$$

Лемма 13. *Справедливы неравенства*

$$A_1(\vec{j},p) \leqslant A(\vec{j},p) \leqslant A_2(\vec{j},p).$$

Доказательство. Так как

$$-a \leqslant \left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(n)}| \leqslant a, \qquad (n=1,2),$$

то из неравенства

$$L_n(x) \geqslant a$$

следует неравенство

$$L_n(x) \geqslant \left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(n)}|,$$

из которого следует неравенство

$$L_n(x) \geqslant -a$$

и, наоборот, из неравенства

$$L_n(x) < -a$$

следует неравенство

$$L_n(x) < \left(\left\{x+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_0^{(n)}|,$$

из которого следует неравенство

$$L_n(x) < a.$$

Поэтому справедливы включения

$$\Omega_1(\vec{j},p) \subset \Omega(\vec{j},p) \subset \Omega_2(\vec{j},p)$$

и, так как подынтегральная функция положительна, то

$$A_1(\vec{j},p) \leqslant A(\vec{j},p) \leqslant A_2(\vec{j},p),$$

что и требовалось доказать. □

Определим области $\Omega'_\lambda(\vec{j},p) \subset \mathbb{R}$ $(\lambda=1,2)$ следующим образом: пусть для произвольной точки y_1 величина

$$y_2 = \ln t^2 + \ln|N(\omega)| - y_1.$$

Тогда точка y_1 принадлежит $\Omega'_\lambda(\vec{j},p)$, если выполнены неравенства

при $p=1$

$$\begin{cases} y_{j_1} \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ y_{j_2} < (-1)^{\lambda}a, \end{cases}$$

при $p=2$

$$\begin{cases} y_1 \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ y_2 \geqslant (-1)^{\lambda-1}a. \end{cases}$$

Лемма 14. *Справедливо равенство*

$$A_\lambda(\vec{j},p) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)} \displaystyle\int\limits_{\Omega'_\lambda(\vec{j},1)} e^{\alpha y_{j_2}}dy, & \text{при } p=1, \\ \dfrac{1}{R}\displaystyle\int\limits_{\Omega'_\lambda(\vec{j},2)} dy, & \text{при } p=2, \end{cases} \qquad (\lambda=1,2),$$

где R — регулятор поля.

Доказательство. Сделаем линейную замену в интеграле по области $\Omega_\lambda(\vec{j},p)$ $(\lambda=1,2)$

$$y_1 = L_1(x).$$

Так как

$$L_1(x)+L_2(x) = \left(\ln t + \ln|\omega^{(1)}| + x\ln|\varepsilon^{(1)}|\right) + \left(\ln t + \ln|\omega^{(2)}| + x\ln|\varepsilon^{(2)}|\right) = \\ = \ln t^2 + \ln|N(\omega)| + x\ln|N(\varepsilon)| = \ln t^2 + \ln|N(\omega)|,$$

то $y_2 = L_2(x)$.

Поэтому область $\Omega_\lambda(\vec{j},p)$, заданная соотношениями

при $p=1$

$$\begin{cases} L_{j_1}(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ L_{j_2}(x) < (-1)^{\lambda}a, \end{cases}$$

при $p=2$

$$\begin{cases} L_1(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ L_2(x) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a \end{cases}$$

перейдет в область $\Omega'_\lambda(\vec{j},p)$, заданную соотношениями

при $p=1$

$$\begin{cases} y_{j_1} \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ y_{j_2} < (-1)^{\lambda}a, \end{cases}$$

при $p=2$

$$\begin{cases} y_1 \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \\ y_2 \geqslant (-1)^{\lambda-1}a, \end{cases}$$

а так как коэффициент линейного преобразования равен регулятору поля, то лемма доказана. □

Пусть для $\lambda=1,2$ величины $I_\lambda(\vec{j},p)$ определены равенствами

$$I_\lambda(\vec{j},p) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\Omega'_\lambda(\vec{j},1)} e^{\alpha y_{j_2}}dy_1, & \text{при } p=1, \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega'_\lambda(\vec{j},2)} dy_1, & \text{при } p=2. \end{cases}$$

Лемма 15. *Справедливы равенства*

$$I_\lambda(\vec{j},1)=\frac{e^{(-1)^\lambda a\alpha}}{\alpha},$$

$$I_\lambda(\vec{j},2)=\ln t^2+\ln|N(\omega)|+(-1)^\lambda 2a.$$

Доказательство. При $p=2$ имеем $D(2)=\{(1,2)\}$ и, следовательно, $\vec{j}=$ $=(1,2)\in D(2)$.

Поэтому

$$I_\lambda(\vec{j},2)=\int\limits_{\Omega'_\lambda(\vec{j},2)}dy_1$$

и $\Omega'_\lambda(\vec{j},2)$ задано соотношениями

$$y_1\geqslant(-1)^{\lambda-1}a,$$

$$y_1+y_2=\ln t^2+\ln|N(\omega)|.$$

Сделаем линейную замену переменных

$$z_1=y_1+(-1)^\lambda a,$$

тогда область $\Omega'_\lambda(\vec{j},2)$ перейдет в область Ω''_λ, заданную соотношениями

$$z_1\geqslant 0,$$

$$\ln t^2+\ln|N(\omega)|-(z_1-(-1)^\lambda a)\geqslant(-1)^{\lambda-1}a. \tag{56}$$

Неравенство (56) можно записать в виде

$$z_1\leqslant\ln t^2+\ln|N(\omega)|+2\cdot(-1)^\lambda a.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$I_\lambda(\vec{j},2)=\ln t^2+\ln|N(\omega)|+2\cdot(-1)^\lambda a.$$

Пусть теперь $p=1$. Сделаем линейную замену переменных

$$z_\nu=\begin{cases} y_{j_2}-(-1)^\lambda a & \text{при} \quad \nu=1,\\ y_{j_1}+(-1)^\lambda a & \text{при} \quad \nu=2.\end{cases}$$

Тогда область $\Omega'_\lambda(\vec{j},p)$ перейдет в область Ω''_λ точек z_1, удовлетворяющих условиям

$$z_1<0\ ,\quad z_2\geqslant 0.$$

При этом

$$z_1+z_2=(y_{j_1}+(-1)^\lambda a)+(y_{j_2}-(-1)^\lambda a)=\ln t^2+\ln|N(\omega)|.$$

Отсюда следует, что

$$I_\lambda(\vec{j},1)=\int\limits_{\Omega''_{\lambda,1}} e^{\alpha(z_1+(-1)^\lambda a)}dz_1=e^{(-1)^\lambda\alpha a}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx=\frac{e^{(-1)^\lambda a\alpha}}{\alpha},$$

так как $\alpha>0$, то интеграл абсолютно сходится и

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{0} e^{\alpha x}dx=\lim_{N\to\infty}\left.\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right|_{-N}^{0}=\frac{1}{\alpha},$$

.

Лемма полностью доказана. □

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$A_\lambda(\vec{j},p)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0^{(1)(-1)^\lambda\frac{\alpha}{2}}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}, & \text{\textit{при} } p=1,\\[2ex] \dfrac{\ln t^2+\ln|N(\omega)|}{R}+(-1)^\lambda, & \text{\textit{при} } p=2,\end{cases}\qquad(\lambda=1,2),$$

где R — регулятор поля.

Доказательство. Действительно, по лемме 14 и определению величины $I_\lambda(\vec{j},p)$

$$A_\lambda(\vec{j},p)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}I_\lambda(\vec{j},1), & \text{при } p=1,\\[2ex] \dfrac{1}{R}I_\lambda(\vec{j},2), & \text{при } p=2.\end{cases}$$

Применяя лемму 15, получим доказываемое утверждение:

$$A_\lambda(\vec{j},p)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\dfrac{e^{(-1)^\lambda a\alpha}}{\alpha}, & \text{при } p=1,\\[2ex] \dfrac{1}{R}\left(\ln t^2+\ln|N(\omega)|+(-1)^\lambda 2a\right), & \text{при } p=2.\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0^{(1)(-1)^\lambda\frac{\alpha}{2}}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}, & \text{при } p=1,\\[2ex] \dfrac{\ln t^2+\ln|N(\omega)|}{R}+(-1)^\lambda, & \text{при } p=2,\end{cases}$$

□

2.2. Асимптотическая формула для $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов квадратичного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F)=\sum_{(\omega)}|N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta'_{D_0}(\alpha|F)=-\sum_{(\omega)}\ln(N(\omega))|N(\omega)|^{-\alpha}.$$

Теорема 31. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=\frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{R}\cdot\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}-$$
$$-\frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\ln\left(\det\Lambda\right)\zeta_{D_0}(\alpha|F)+\zeta'_{D_0}(\alpha|F)\right)+$$
$$+\frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\theta_1(\alpha)+\frac{\theta_2(\alpha)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\alpha)|\leqslant 1$ *и* $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\theta_2(\alpha)\leqslant\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$, ε_0 *— фундаментальная единица квадратичного поля* F *и* R *— регулятор этого поля.*

Доказательство. Согласно лемме 10 (стр. 133) имеем

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}A(\omega)$$

и

$$A(\omega)=\sum_{p=1}^{2}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p).$$

По лемме 13 (стр. 138)

$$A_1(\vec{j},p)\leqslant A(\vec{j},p)\leqslant A_2(\vec{j},p).$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^2|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{2}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A_1(\vec{j},p)\leqslant\zeta(\Lambda(t)|\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^2|N(\omega)|)^\alpha}\ \sum_{p=1}^{2}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A_2(\vec{j},p).$$

Согласно лемме 16

$$A_\lambda(\vec{j},2) = \frac{\ln t^2 + \ln|N(\omega)| + 2\cdot(-1)^\lambda a}{R} = \frac{\ln t^2 + \ln|N(\omega)|}{R} + (-1)^\lambda. \qquad (57)$$

$$A_\lambda(\vec{j},1) = \frac{\varepsilon_0^{(1)(-1)^\lambda \frac{\alpha}{2}}}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}. \qquad (58)$$

Объединяя оценки (57) и (58), получим

$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)} \frac{1}{(t^2|N(\omega)|)^\alpha}\cdot\left(\frac{\ln t^2 + \ln|N(\omega)|}{R} + \theta_1(\omega,\alpha) + \frac{\theta_2(\omega,\alpha)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\omega,\alpha)| \leqslant 1$ и $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \theta_2(\omega,\alpha) \leqslant \varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$.

Выделяя главный член по t, окончательно находим

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2}{R}\cdot\frac{\ln t^2}{t^{2\alpha}}\sum_{(\omega)}\frac{1}{|N(\omega)|^\alpha} + \frac{2}{R}\cdot\frac{1}{t^{2\alpha}}\sum_{(\omega)}\frac{\ln|N(\omega)|}{|N(\omega)|^\alpha} +$$
$$+\frac{2}{t^{2\alpha}}\sum_{(\omega)}\frac{1}{|N(\omega)|^\alpha}\left(\theta_1(\alpha) + \frac{\theta_2(\alpha)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{R}\cdot\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} -$$
$$-\frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\ln\left(\det\Lambda\right)\zeta_{D_0}(\alpha|F) + \zeta'_{D_0}(\alpha|F)\right) +$$
$$+\frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\theta_1(\alpha) + \frac{\theta_2(\alpha)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\alpha)| \leqslant 1$ и $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \theta_2(\alpha) \leqslant \varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$, что и требовалось доказать. □

3. Заключение

Анализ полученных результатов показывает, что в случае квадратичных полей удается существенно уточнить асимптотическую формулу для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки квадратичного поля.

Ясно, что дальнейшие исследования должны быть в случае квадратичных полей направлены на изучение дзета-функции Дедекинда главных идеалов квадратичного поля и её производных.

В разделе 1. 6 получен ещё один новый результат — функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции одномерной и двумерной диагональной решётки. Естественно, продолжить эти исследования как на многомерный случай, так и на новые классы решёток. Особенно важно изучить эти вопросы для случая алгебраических решёток и решёток совместных приближений Дирехле.

В заключение авторы выражают свою глубокую благодарность профессорам Г. И. Архипову и В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов.Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Ученые записки Орловского государственного университета. Сер. Естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6, ч. 2. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды X международной конференции. С. 90–98.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

5. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

6. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

7. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

8. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

9. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

10. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения// Теория чисел и ее приложения: тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

11. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета–функции алгебраических решёток. // Теория чисел и ее приложения: тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

12. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, № 2327–В90.

13. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

14. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета–функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

15. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 77–87.

16. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки.1998. Т. 63, вып. 3. С. 363–369.

17. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 4. С. 522–526.

18. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Дис. ... доктора физ.–мат. наук. Тула, 2000.

19. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Автореф. дис. ... доктора физ.–мат. наук. М., 2000.

20. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. — 195 с.

21. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Е. И. Юшина О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях / Чебышевский сборник. 2012 .Т. 13,вып. 3(43). С. 47 — 52.

22. Г. Дэвенпорт Высшая арифметика. М.: Наука, 1965.

23. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

24. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

25. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Современные проблемы теории чисел: тез. докл. III Междунар. конф. 1996. С. 119.

26. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4, вып.3. С. 99–108.

27. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

28. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МПГУ, 1999.

29. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

30. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

31. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

REFERENCES

1. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovolsky, N. N. 2012, "Multidimensional Number-theoretic grid and lattice algorithms for finding the optimal coefficients.", *Tula: Izd-vo Tul. state PED. University n. a. L. N. Tolstoy*, 283 p. (Russian)

2. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. Yu. 2012, "Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis", *Scientific notes, Orel state University. Ser. Natural, technical and medical science.* № 6, part 2. Algebra and number theory: modern problems and applications: proceedings of the X international conference. pp. 90–98. (Russian)

3. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M. & Dobrovolsky N. N. 2012, "Hyperbolic Zeta-function grids and sheets the calculation of the optimal coefficients", *Chebyshevskii Sb.* Vol. 13, is. 4(44). pp. 4–107. (Russian)

4. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "A functional equation for the hyperbolic zeta function of integer lattices.", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 5, pp. 18–23, p. 71 (Russian); translation in Moscow Univ. Math. Bull. 62 (2007), no. 5, pp. 186–191.

5. Dobrovol'skii, M. N. 2009, "Some number-theoretic methods of approximate analysis.", Dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow, Moscow state University.

6. Dobrovol'skii, M. N. 2009, "Some number-theoretic methods of approximate analysis.", Author. dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow, Moscow state University.

7. Dobrovol'skii N. M. 1984, "Hyperbolic Zeta function lattices.", *Dep. v VINITI* 24.08.84, № 6090–84. (Russian)

8. Dobrovol'skii N. M. 1984, "Theoretical–numerical nets and their applications." Dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Tula.

9. Dobrovol'skii N. M. 1985, "Theoretical–numerical nets and their applications." Author. dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow.

10. Dobrovol'skii N. M. 1985, "Theoretical–numerical nets and their applications." *Number theory and its applications: proc. Dokl. Vsesoyuz. Conf. Tbilisi*, pp. 67–70.

11. Dobrovol'skii, N. M. & Van'kova, V. S. 1990, "About hyperbolic Zeta-functions of algebraic lattices." *Number theory and its applications: proc. Dokl. republics. Conf. Tashkent*, pp. 22.

12. Dobrovol'skii N. M., Van'kova, V. S. & Kozlova, S. L. 1990, "Hyperbolic Zeta-function of an algebraic lattices.", *Dep. v VINITI* 12.04.90, № 2327–B90. (Russian)

13. Dobrovol'skii, N. M. & Roshchenya, A. L. 1995, "On the number of lattice points in hyperbolic cross", *Algebraic, probabilistic, geometrical, combinatorial and functional methods in number theory: Coll.proc. Dokl. II Intern. Conf. Voronezh*, pp. 53.

14. Dobrovol'skii, N. M. & Roshchenya, A. L. 1996, "On the analytical continuation of hyperbolic Zeta functions of rational lattices", *Modern problems of theory numbers and its applications: Mo. proc. Dokl. III Intern. Conf. Tula*, pp. 49.

15. Dobrovol'skii, N. M. & Roshchenya, A. L. 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta function of lattices.", *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.* Vol. 2, no. 1, Matematika, pp. 77–87, 274, 283–284. (Russian)

16. Dobrovol'skii, N. M.; Roshchenya, A. L. 1998, "On the number of points in a lattice in a hyperbolic cross.", *Mat. Zametki.* Vol. 63, no. 3, pp. 363–369. (Russian); translation in Math. Notes. 1998. Vol. 63, no. 3–4, pp. 319–324.

17. Dobrovol'skii, N. M.; Roshchenya, A. L. & Rebrova, I. Yu. 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices.", *Mat. Zametki.* Vol. 63, no. 4, pp. 522–526. (Russian); translation in Math. Notes 63 (1998), no. 3–4, pp. 460–463.

18. Dobrovol'skii N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.", Dis. ... doctor of physical-Mat. Sciences. Tula.

19. Dobrovol'skii N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.", Author. dis. ... doctor of physical-Mat. Sciences. Moscow.

20. Dobrovol'skii, N. M. 2005, "Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.", *Tula: Publishing house of Tula state PED. Univ. L. N. Tolstoy,* — 195 p.

21. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. & Yushina, E. I. 2012, "On a matrix form of a theorem of Galois on purely periodic continued fractions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 13, no. 3(43), pp. 47–52. (Russian)

22. Davenport, H. 1965, "The higher arithmetic." *M.: Iz-vo "Nauka".*

23. Kassels, Dħ. V. S. 1965, "Vvedenie v geometriyu chisel.", (Russian) [An introduction to the geometry of numbers] Translated from the English by A. N. Andrianov and I. V. Bogacenko. Edited by A. V. Malyshev *Izdat. "Mir", Moscow* 421 pp.

24. Korobov, N. M. 2004, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhлnnom analize." (Russian) [Number-theoretic methods in approximate analysis] Second edition. *Moskovskii Tsentr Nepreryvnogo Matematicheskogo Obrazovaniya, Moscow*, 285 pp.

25. Rebrova, I. Yu. 1996, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices" *Modern problems of number theory: proc. Dokl. III Intern. Conf. Ṫula: Publishing house of Tula state pedagogical University*, pp. 119.

26. Rebrova, I. Yu. 1998,"Continuity of the generalized hyperbolic zeta function of lattices and its analytic continuation." *Izv. Tul. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.*, vol. 4, no. 3, Matematika, pp. 99–108. (Russian)

27. Rebrova, I. Yu. 1999, "The space of lattices and functions on it" Dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow. MPSU.

28. Rebrova, I. Yu. 1999, "The space of lattices and functions on it" Author. dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow, MPSU.

29. Roshchenya, A. L. 1998, "Analytic continuation of the hyperbolic Zeta-functions of lattices." Dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow. MPSU.

30. Roshchenya, A. L. 1998, "Analytic continuation of the hyperbolic Zeta-functions of lattices." Author. dis. ... candidate. Phys.–math. Sciences. Moscow. MPSU.

31. Chandrasekkharan, K.; Candrasekharan, K. 1974, "Vvedenie v analiticheskuyu teoriyu chisel." (Russian) [Introduction to analytic number theory] Translated from the English by S. A. Stepanov. Edited by A. I. Vinogradov. *Izdat. "Mir", Moscow,*. 187 pp.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Московский педагогический государственный университет
Поступило 10.01.2013