ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-350-358

Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости[1]

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru
Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости.

Полагается, что скорость набегающего потока значительно меньшей скорости звука. Поверхность цилиндра совершает гармонические колебания.

Получено приближенное аналитическое решение задачи, построенное с использованием потенциала скорости набегающего на тело потока и потенциала скорости акустического поля неподвижного излучателя.

Рассмотрены частные случаи излучения звука цилиндром.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности акустического поля в дальней зоне при разных значениях отношения скорости потока к скорости звука и волнового размера цилиндра.

Ключевые слова: акустическое излучение, цилиндр, идеальная жидкость, потенциальное течение

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Излучение звука цилиндром, обтекаемым стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.2, с. 350–358.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-350-358

Sound radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru
Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tolsl@mail.ru

Abstract

In the article the problem of the acoustic radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid is considered

It is assumed that the velocity of the incoming flow is significantly lower than the speed of sound. The surface of the spheroid makes harmonic vibrations.

An approximate analytical solution of the problem was obtained with using the speed potential of the oncoming on the body flow and the speed potential of the stationary radiator acoustic field.

Special cases of sound radiation by a cylinder are considered.

The results of numerical calculations of polar diagrams of the acoustic pressure distribution on the surface of a spheroid at different values of the ratio of the flow velocity to the speed of sound and the wave size of the cylinder are presented.

Keywords: acoustic radiation, cylinder, ideal fluid, potential flow

Bibliography: 14 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2024, “Sound radiation of a cylinder streamlined by a stationary flow of an ideal liquid” , *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.2, pp. 350–358.

1. Введение

Анализ звуковых полей, возникающих при излучении элементов различных конструкций, имеет важное значение во многих приложениях акустики, а элементы многих таких конструкций имеют цилиндрическую форму.

Задача об излучении звука круговым цилиндром бесконечной длины в идеальной жидкости хорошо известна (см., например, [1 – 3]). Определены акустические характеристики таких излучателей при произвольном распределении колебательной скорости на их поверхности, а также в частных случаях. В [4, 5] рассматривалось акустическое излучение цилиндра в вязкой жидкости. Оценено влияние вязкости среды на излучение звука. В ряде работ исследовалось излучение звука цилиндром конечной длины, находящихся в идеальной жидкости [6 – 11]. Во всех этих работах полагалось, что цилиндрические излучатели являются неподвижными и помещены в среду, находящуюся в состоянии покоя.

В настоящей работе рассматривается задача об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньшей скорости звука.

2. Постановка задачи

Рассмотрим круговой цилиндр бесконечной длины и радиуса a , на который перпендикулярно его оси вращения набегает стационарный поток идеальной сжимаемой жидкости. Жидкость характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c. Полагаем, что скорость потока много меньше скорости звука ($u << c$). Поэтому будем считать, что в результате обтекания цилиндра потоком вихреобразование не происходит и поток является потенциальным.

Пусть осью вращения цилиндра является ось z прямоугольной декартовой системы координат x, y, z, а поток набегает вдоль оси x.

Свяжем с координатами x, y, z цилиндрические координаты r, φ, z.

Цилиндр излучает гармонические звуковые волны с произвольным распределением нормальной составляющей колебательной скорости на его поверхности

$$V_n = f(\varphi)\exp(-i\omega t),$$

где ω — круговая частота; t — время.

Определим акустическое поле цилиндрического излучателя.

3. Аналитическое решение задачи

Получим приближенное аналитическое решение задачи методом Блохинцева [12].

Обозначим через Ψ и Φ потенциалы скорости акустического поля ($\mathbf{v} = \triangledown\Psi$) и невозмущенного звуком потока ($\mathbf{u} = \triangledown\Phi$) соответственно. Положим $\Psi = \psi\exp(-i\omega t)$.

Согласно [12] распространение гармонических звуковых волн в потенциальном потоке идеальной жидкости описывается уравнением

$$\Delta\psi + k^2\psi + 2i\frac{k}{c}(\triangledown\Phi \cdot \triangledown\psi) = 0, \tag{1}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число. Уравнение (1) получено при пренебрежением членами порядка u^2/c^2.

Искомый потенциал скорости акустического поля ψ, являющийся решением уравнения (1), должен удовлетворять граничному условию на поверхности тела ($v_n|_S = V_n|_S$)

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi) \tag{2}$$

и условию излучения на бесконечности [2].

Так как скорость потока $u << c$, то будем полагать, что жидкость является несжимаемой [12].

Потенциал Φ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \tag{3}$$

и должен удовлетворять граничному условию, которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на поверхности абсолютно жесткого тела

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \tag{4}$$

а в бесконечно удаленной точке (в координатной системе x, y, z) $\triangledown\Phi = (0, 0, u_\infty)$, где u_∞ — скорость потока на бесконечности.

Выражение для потенциала Φ имеет вид [13]

$$\Phi = u_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\varphi. \tag{5}$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-ikc^{-1}\Phi), \tag{6}$$

где ψ_0 — потенциал скорости акустического поля цилиндрического излучателя в отсутствии потока.

Потенциал ψ_0, являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющий граничному условию при произвольном распределении колебательной скорости на поверхности цилиндра

$$\left. \frac{\partial\psi_0}{\partial r} \right|_{r=a} = g(\varphi) \tag{8}$$

и условию излучения на бесконечности, будем искать в виде

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(kr) e^{in\varphi}, \tag{9}$$

где H_n — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n.

Подставив (9) в (8), умножим обе части полученного равенства на $e^{-im\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах от 0 до 2π. В результате находим

$$A_n = \frac{1}{2\pi k H_n'(ka)} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-in\varphi}\, d\varphi. \tag{10}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу.

Подставляя выражение (6) в уравнение (1) и принимая во внимание (3) и (7), убеждаемся, что (6) удовлетворяет (1) при пренебрежении членами порядка u^2/c^2.

Теперь подставим (6) в граничное условие (2). С учетом условий (4) и (8) находим, что (6) удовлетворяет условию (2) тогда, когда

$$g(\varphi) = f(\varphi) e^{ikc^{-1}\Phi|_{r=a}}. \tag{11}$$

С учетом (11) и (5) выражение (10) принимает вид

$$A_n = \frac{1}{2\pi k H_n'(ka)} \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos\varphi)]\, d\varphi. \tag{12}$$

Согласно [12] акустическое давление в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = \rho\, [i\omega\psi_0 - (\bigtriangledown\Phi \cdot \bigtriangledown\psi_0)] \exp(-ikc^{-1}\Phi). \tag{13}$$

Учитывая, что в системе координат r, φ, z $\quad \bigtriangledown = \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial}{\partial z}$, имеем

$$(\bigtriangledown\Phi\cdot\bigtriangledown\psi_0)=u_\infty\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{in\varphi}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)kH_n'(kr)\cos\varphi-\frac{in}{r^2}\left(r+\frac{a^2}{r}\right)H_n(kr)\sin\varphi\right].$$

На поверхности цилиндра акустическое давление определяется по формуле

$$p|_{r=a}=i\frac{\rho c}{a}\exp(-2ikac^{-1}u_\infty\cos\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_nH_n(kr)e^{in\varphi}\left(ka+2nc^{-1}u_\infty\sin\varphi\right). \tag{14}$$

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля ($kr >> 1$). Воспользовавшись асимптотической формулой для функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [14]

$$H_n(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\pi n/2-\pi/4)},$$

из (13) получаем

$$p=\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi)=\frac{\rho c}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\pi/4}ka\left(1-\frac{u_\infty}{c}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^{n-1}A_ne^{in\varphi}. \tag{15}$$

4. Частные случаи

1. *Пульсирующий цилиндр.* Если распределение колебательной скорости не зависит от угла φ, то есть $f(\varphi)=V$, то из (12) находим

$$A_n=\frac{V}{2\pi kH_n'(ka)}\int_0^{2\pi}\exp[i(-n\varphi+2kac^{-1}u_\infty\cos\varphi)]\,d\varphi. \tag{16}$$

Согласно (14) и (16) на поверхности цилиндра акустическое давление при излучении полосы определяется по формуле

$$p|_{r=a}=i\frac{\rho cV}{2\pi ka}\exp(-2ikac^{-1}u_\infty\cos\varphi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{H_n(ka)}{H_n'(ka)}e^{in\varphi}\left(ka+2nc^{-1}u_\infty\sin\varphi\right)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\exp[i(-n\hat\varphi+2kac^{-1}u_\infty\cos\hat\varphi)]\,d\hat\varphi.$$

В дальней зоне акустического поля при излучении полосы на основании (15) и (16) имеем

$$F(\varphi)=\frac{\rho cV}{\pi\sqrt{2\pi}}e^{-i\pi/4}\left(1-\frac{u_\infty}{c}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\varphi}\frac{(-i)^{n-1}}{H_n'(ka)}\int_0^{2\pi}\exp[i(-n\hat\varphi+2kac^{-1}u_\infty\cos\hat\varphi)]\,d\hat\varphi. \tag{17}$$

2. *Линейный источник на цилиндре.* Предположим, что на поверхности абсолютно жесткого цилиндра находится линейный источник, расположенный вдоль образующей цилиндра $\varphi=\varphi_0$. При этом колебательная скорость $f(\varphi)=\dfrac{Q(\varphi_0)}{a}\delta(\varphi-\varphi_0)$, где $Q(\varphi_0)$ — объемная скорость источника, рассчитанная на единицу его длины; δ — дельта-функция Дирака.

Тогда, учитывая, что [2]

$$\int\limits_0^{2\pi} h(\varphi)\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi = \begin{cases} h(\varphi_0), & \text{если} \quad \varphi_0 \quad \text{внутри} \quad [0,2\pi], \\ h(\varphi_0)/2, & \text{если} \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_0 = 2\pi, \end{cases}$$

из (12) получаем

$$A_n = \frac{Q(\varphi_0)}{2\pi ka H_n'(ka)} \exp[i(-n\varphi_0 + 2kac^{-1}u_\infty \cos\varphi_0)],$$

когда φ_0 находится внутри $[0,2\pi]$. Если φ_0 принимает значение 0 или 2π, то в правую часть формулы следует добавить множитель 1/2.

3. *Излучение полосы на цилиндре.* Пусть на поверхности цилиндра S находится полоса S_1, расположенная между образующими цилиндра $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и пульсирующая с нормальной колебательной скоростью постоянной амплитуды V, а остальная часть цилиндра S_2 является абсолютно жесткой. При этом $f(\varphi) = \begin{cases} V & \text{на} \quad S_1, \\ 0 & \text{на} \quad S_2. \end{cases}$

Тогда из (12) получаем

$$A_n = \frac{V}{2\pi k H_n'(ka)} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos\varphi)]\, d\varphi. \tag{18}$$

Согласно (14) и (18) на поверхности цилиндра акустическое давление при излучении полосы определяется по формуле

$$p|_{r=a} = i\frac{\rho c V}{2\pi ka} \exp(-2ikac^{-1}u_\infty \cos\varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_n(ka)}{H_n'(ka)} e^{in\varphi} \left(ka + 2nc^{-1}u_\infty \sin\varphi\right) \times$$

$$\times \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos\hat{\varphi})]\, d\hat{\varphi}.$$

В дальней зоне акустического поля при излучении полосы на основании (15) и (18) имеем

$$F(\varphi) = \frac{\rho c V}{\pi\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi/4} \left(1 - \frac{u_\infty}{c}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \frac{(-i)^{n-1}}{H_n'(ka)} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp[i(-n\hat{\varphi} + 2kac^{-1}u_\infty \cos\hat{\varphi})]\, d\hat{\varphi}. \tag{19}$$

4. *Осциллирующий цилиндр.* Предположим, что абсолютно жесткий цилиндр колеблется около положения равновесия вдоль оси x. Тогда нормальная колебательная скорость на поверхности цилиндра определяется выражением $f(\varphi) = V\cos\varphi$, где V — скорость цилиндра при $\varphi = 0$.

В этом случае из (12) находим

$$A_n = \frac{V}{2\pi k H_n'(ka)} \int\limits_0^{2\pi} \exp[i(-n\varphi + 2kac^{-1}u_\infty \cos\varphi)] \cos\varphi\, d\varphi.$$

5. Численные исследования

По формулам (17) и (19) были проведены расчеты диаграмм направленности акустического поля в дальней зоне $|F(\varphi)|$ для пульсирующего цилиндра и при излучении полосы на цилиндре. Поверхность S_1 была задана параметрами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ для пульсирующего цилиндра и $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/6$ при излучении полосы.

При расчетах значения волнового размера цилиндра ka полагались равными 1 и 5, а $u_\infty/c = 0$, 0.1, 0.2.

На рис. 1 представлены диаграммы направленности $|F(\varphi)|/\rho cV$ для пульсирующего цилиндра, а на рис. 2 — для пульсирующей полосы, рассчитанные при $ka = 1$ и $ka = 5$.

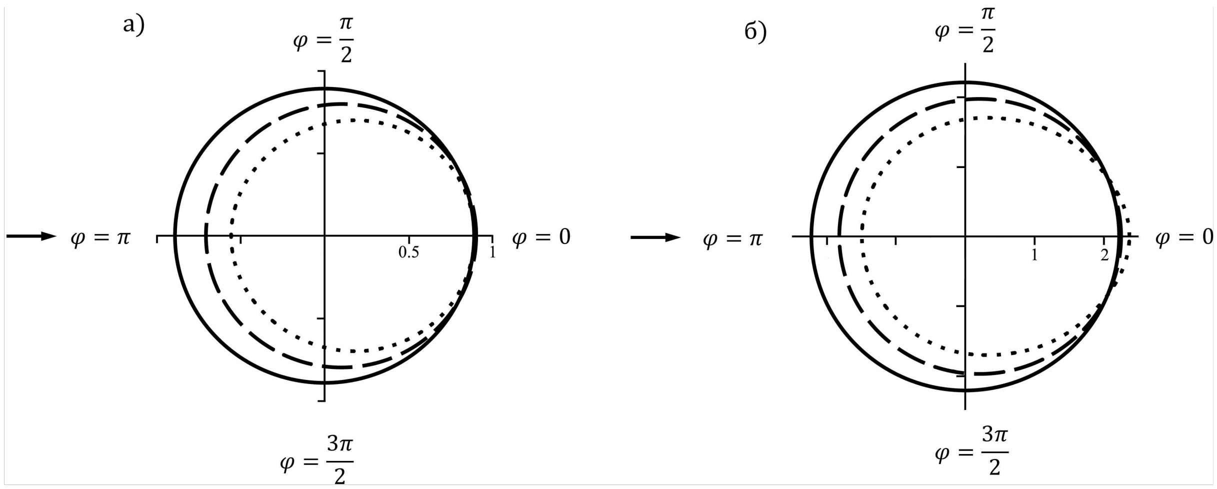

Рис. 1: Диаграммы направленности акустического поля пульсирующего цилиндра,
а) $ka = 1$, б) $ka = 5$

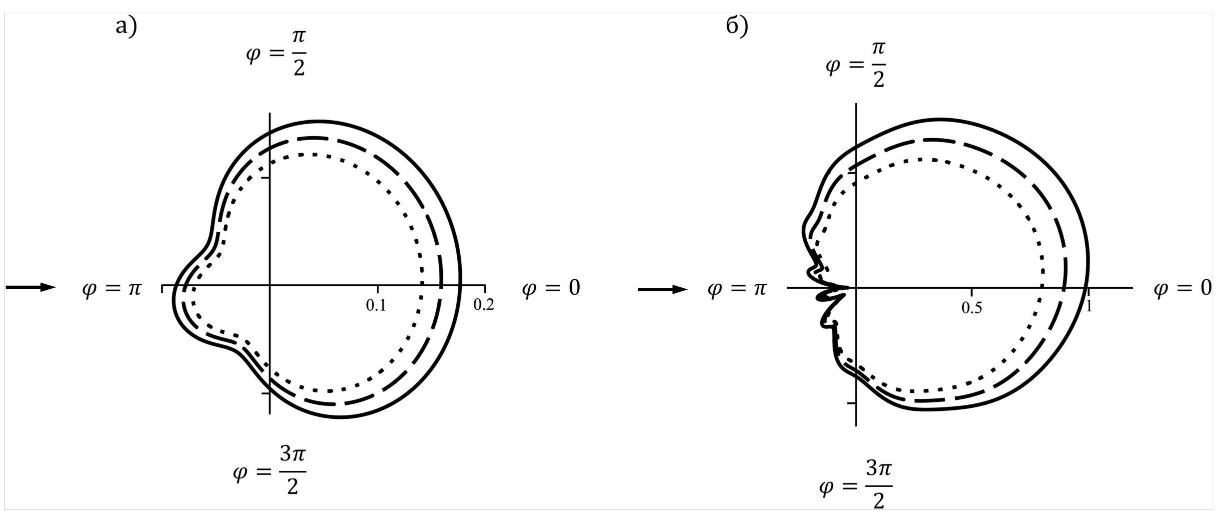

Рис. 2: Диаграммы направленности акустического поля при излучении полосы на поверхности цилиндра , а) $ka = 1$, б) $ka = 5$

Сплошные линии соответствуют случаю $u_\infty/c = 0$, штриховые — $u_\infty/c = 0.1$, пунктирные — $u_\infty/c = 0.2$. Стрелкой показано направление набегающего на цилиндр потока.

6. Заключение

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение задачи об акустическом излучении цилиндра, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука. Полученное аналитическое решение позволяет исследовать акустическое поля излучающего цилиндра при различных законах излучения. Проведенные численные расчеты выявили характерные черты влияния скорости набегающего потока жидкости и волнового размера цилиндра на акустические характеристики цилиндрического излучателя в случаях пульсирующего цилиндра и излучения полосы на поверхности цилиндра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.
2. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
3. Скучик Е. Основы акустики. Том 2. М.: Мир, 1976. 544 с.
4. Цой П. И. Излучение цилиндра в вязкой среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 82 – 92.
5. Кожин В. Н. Излучение и рассеяние звука в вязкой среде // Акуст. журн. 1970. Т. 16. № 2. С. 269 – 274.
6. Copley L. G. Integral equation method for radiation from vibrating bodies // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. Vol. 41. No. 4. Part 1. P. 807 – 816.
7. Schenck H. A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. Vol. 44. No. 1, P. 41 – 58.
8. Fenlon F. H. Calculation of the acoustic radiation field of the surface of a finite cylinder by the method of final residuals // Proc. IEEE. 1969. Vol. 57. No. 3. P. 291 – 306.
9. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Коцюба В. С. Об одном методе оценки акустических свойств цилиндрического излучателя конечной высоты // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 701 – 705.
10. Sandman B. E. Fluid-loading influence coofficionls for a finites cylindrical shell // J. Acoust, Soc. Amer. 1976. Vol. 60. No. 6. P. 1256 – 1264.
11. Козырев В. А., Шендеров Е. Л. О сопротивлении излучения цилиндра конечной высоты// Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 3. С. 422 – 432.
12. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

REFERENCES

1. Rzhevkin, S. N. 1960, “A course of lectures on the theory of sound”, *Publishing House of Moscow State Univer., Moscow*, 336 p., [in Russian].

2. Shenderov, E. L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p., [in Russian].

3. Skudrzyk, E. 1971, “The foundations of acoustics”, *Springer-Verlag, New York*, 816 p.

4. Tzoi, P. I. 1966, “Radiation of a cylinder in a viscous medium”, *Izv. AN USSR. Mechanics of liquid and gas*, no. 5, pp. 82 – 92, [in Russian].

5. Kozhin, V. N. 1970, “Radiation arid scattering of sound by a cylinder in a viscous medium”, *Akust. Zhurn.*, vol. 16, no. 2, pp. 269 – 274, [in Russian].

6. Copley, L. G. 1967, “Integral equation method for radiation from vibrating bodies”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 41, no. 4, part. 1, pp. 807 – 816.

7. Schenck, H. A. 1968, “Improved integral formulation for acoustic radiation problems”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 44, no. 1, pp. 41 – 58.

8. Fenlon, F. H. 1969, “Calculation of the acoustic radiation field of the surface of a finite cylinder by the method of final residuals”, *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 3, pp. 291 – 306.

9. Vovk, I. V., Grinchenko, V. T., Kotsuba, V. S. 1975, “On one method of evaluation of acoustic properties of cylindrical radiator of a finite height”, *Akust. Zhurn.*, vol. 21, no. 5, pp. 701 – 705, [in Russian].

10. Sandman, B. E. 1976, “Fluid-loading influence coefficients for a finite cylindrical shell”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 60, no. 6, pp. 1256-1264.

11. Kozirev, V. A., Shenderov, E. L. 1980, “On radiation resistance of cylinder of finite height”, *Akust. Zhurn.*, vol. 26, no. 3, pp. 422 – 432, [in Russian].

12. Blohintsev, D. I. 1981, “Acoustics of an inhomogeneous moving medium”, *Nauka , Moscow*, 208 p., [in Russian].

13. Kochin, N. E., Kibel, I. A., Roze, N. V. 1963, “Theoretical hydromechanics”, *Fizmatgiz, Moscow*, 584 p., [in Russian].

14. Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965, “Handbook of Mathematical Functions”, *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.

Получено: 04.04.2024
Принято в печать: 28.06.2024