ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 517.925.8

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЯХ ДВУКРАТНОГО И ТРЁХКРАТНОГО КОРНЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ [1]

В. Ф. Бутузов, А. И. Бычков (г. Москва)

Аннотация

В статье рассматриваются две начально-краевые задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(u_t - \Delta u\right) = f(u, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in g \times (0 < t \leq T)\,,$$

где ε — малый параметр, Δ — оператор Лапласа, в случаях когда вырожденное уравнение $f(u, x, y, t, 0) = 0$ имеет корень $u = \varphi(x, y, t)$, кратность которого равна двум или трём. Установлены условия, при которых каждая задача имеет решение погранслойного типа, построены и обоснованы асимптотики этих решений при $\varepsilon \longrightarrow 0$, состоящие из регулярного ряда и нескольких погранслойных рядов.

В отличие от хорошо известного случая, когда вырожденное уравнение имеет простой (однократный) корень, асимптотическое разложение погранслойного решения в случае кратного корня ведётся не по целым, а по дробным степеням малого параметра, причём эти дробные степени и также масштабы погранслойных переменных зависят от кратности корня вырожденного уравнения. Ещё одно существенное отличие состоит в том, что пограничный слой в окрестности начального момента времени оказывается трёхзонным с различным характером убывания пограничных функций и различными масштабами погранслойной переменной в разных зонах.

Сам алгоритм построения пограничных функций, известный для случая простого корня, становится непригодным и требует существенной модификации. Это относится к пограничным функциям, описывающим погранслойное поведение решения в окрестности начального момента времени, а также к угловым пограничным функциям, играющим важную роль в окрестности кривой $\partial g \times (t = 0)$. Предложенный модифицированный алгоритм позволяет построить единые пограничные функции, описывающие

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 15-01-04619)

поведение решения во всех трёх зонах пограничного слоя. В этом состоит преимущество предложенного алгоритма перед методом сращивания асимптотических разложений, когда в каждой зоне асимптотика строится раздельно, а затем производится сращивание (согласование) разложений, построенных в разных зонах.

Обоснование асимптотики (т. е. доказательство теоремы о существовании решения с построенной асимптотикой) проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что подходящие нижнее и верхнее решения задачи строятся с помощью формальной асимптотики.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные параболические уравнения, погранслойная асимптотика, случай кратных корней вырожденного уравнения.

Библиография: 17 названий.

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATION IN THE CASE OF DOUBLE AND TRIPLE ROOT OF THE DEGENERATE EQUATION

V. F. Butuzov, A. I. Bychkov (Moscow)

Abstract

The article considers two initial-boundary value problems for a singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2 \left(u_t - \Delta u\right) = f(u, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in g \times (0 < t \leq T)\,,$$

where ε is a small positive parameter, Δ is the Laplas operator, for cases where degenerate equation $f(u, x, y, t, 0) = 0$ has root $u = \varphi(x, y, t)$ of multiplicity 2 or 3. Conditions are determined in each case for the problem to have a solution of boundary-layer type. Asymptotics are found and justified for epsilon $\varepsilon \longrightarrow 0$, which consist of a regular part and a few boundary-layer series.

Unlike a well-known case of a single root of degenerate equation, boundary-layer solution asymptotic in case of a multiple root is constructed as a series in fractional powers of the small parameter, and these powers as well as scales of boundary layer variables depend on a multiplicity of the degenerate equation root. Another substantial difference is that three-zones of the boundary layer in a neighborhood of the initial time exist. These zones differ in decay behavior of boundary-level functions and scales of boundary-level value.

The existing algorithm for constructing boundary-layer functions in case of a single root gives unacceptable results and needs significant modifications. This holds for boundary-layer functions describing boundary-layer behavior of the solution in a neighborhood of initial time as well as for angular boundary-layer functions, which play role in a neighborhood of the curve $\partial g \times (t = 0)$. Proposed here modified algorithm allows for constructing unified boundary-level functions for all three boundary-layer zones. This is an advantage of this method in comparison to the method of coordination of asymptotic decomposition, where a separate asymptotic is found for each zone and then they are coordinated with each other.

Asymptotic justification (i.e. existence of the solution with this asymptotic) is made using the asymptotic method of differential inequalities, that is lower and higher solutions of the problem are found using formal asymptotics.

Keywords: singularly perturbed parabolic equations, boundary layer asymptotics, double and triple root of the degenerate equation.

Bibliography: 17 titles.

1. Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 \left(u_t - \Delta u\right) = f(u, x, y, t, \varepsilon), (x, y, t) \in \Omega = g \times \left(0 < t \leq T\right), \tag{1}$$

$$u \mid_{t=0} = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{g}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x, y, t) \in \{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, g — область на плоскости (x, y), ограниченная простой гладкой кривой ∂g, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внутренней нормали к поверхности $\{\partial g \times (0 \leq t \leq T)\}$, ε — малый положительный параметр.

Известно [1], что если вырожденное уравнение

$$f(u, x, y, t, 0) = 0 \tag{4}$$

имеет простой (однократный) корень $u = \varphi(x, y, t)$, такой, что

$$f_u(\varphi(x, y, t), x, y, t, 0) < 0, \ (x, y, t) \in \bar{\Omega},$$

и если начальная функция $u^0(x, y)$ принадлежит области притяжения этого корня, то для достаточно малых ε задача (1)-(3) имеет решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ с погранслойной асимптотикой вида

$$u(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, t, \varepsilon) + \Pi(x, y, \tau, \varepsilon) + Q(\rho, l, t, \varepsilon) + P(\rho, l, \tau, \varepsilon). \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}(x, y, t, \varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики, представляющая собой ряд по целым степеням ε с коэффициентами, зависящими от x, y и t, и главным членом $\varphi(x, y, t)$; $\Pi(x, y, \tau, \varepsilon)$ — ряд по целым степеням ε, описывающий погранслойное поведение решения в окрестности начального момента времени $t = 0$, его коэффициенты зависят от x, y и погранслойной переменной $\tau = t/\varepsilon^2$ и убывают экспоненциально при $\tau \longrightarrow \infty$, т.е. как $\exp(-\varkappa\tau)$, $\varkappa = const > 0$; $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$ — погранслойная переменная, (r, l) — локальные координаты точки области $\bar{g}$ в окрестности границы ∂g, r — расстояние от точки до ∂g вдоль нормали к ∂g, l- переменная, определяющая положение точки на границе ∂g, $Q(\rho, l, t, \varepsilon)$ — погранслойный ряд, играющий существенную роль вблизи границы $\partial\Omega$, его члены экспоненциально стремятся к нулю при $\rho \longrightarrow \infty$; $P(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ — угловой погранслойный ряд, служащий для описания погранслойного поведения решения в малой окрестности кривой $\partial g \times \{t = 0\}$.

В данной статье рассматриваются случаи, когда вырожденное уравнение (4) имеет при $(x, y, t) \in \bar{\Omega}$ либо двукратный, либо трёхкратный корень $u = \varphi(x, y, t)$.

Будет доказано, что в этих случаях при определенных условиях асимптотика решения задачи (1)–(3) имеет вид (5), но $\bar{u}$ и Π представляют собой ряды не по целым, а по дробным степеням ε, причем пограничный слой в окрестности начального момента времени имеет три зоны: в первой зоне Π-функции убывают с ростом τ степенным образом, затем во второй зоне происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания Π-функций, и, наконец в третьей зоне Π-функции убывают экспоненциально, но более медленно, чем в случае однократного корня. Погранслойная переменная ρ в окрестности границы ∂g имеет теперь другой масштаб, а именно, $\rho = r/\varepsilon^{3/4}$ в случае двукратного корня и $\rho = r/\varepsilon^{2/3}$ в случае трёхкратного корня, и разложение Q (а также P) ведется по дробным степеням ε.

Ещё одной особенностью случая кратного корня вырожденного уравнения является то, что теперь важную роль в построении асимптотического представления вида (5) играют члены порядка ε, входящие в правую часть уравнения (1), т. е. в состав функции $f(u, x, y, t, \varepsilon)$.

Задача (1)–(3) при условии двукратности корня вырожденного уравнения рассмотрена в разделе 2, а в разделе 3 рассмотрен случай, когда вырожденное уравнение имеет трёхкратный корень.

2. Задача (1)–(3) в случае двукратного корня вырожденного уравнения

2.1. Сформулируем условия, при которых в этом разделе рассматривается задача (1)–(3).

Условие A_1.

Функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = -h(x, y, t)(u - \varphi(x, y, t))^2 + \varepsilon f_1(u, x, y, t, \varepsilon),$$

причём

$$h(x,y,t) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \tag{6}$$

Отметим, что если функция h зависит также от u, то все качественные особенности асимптотики решения задачи (1)–(3) сохранятся, но выкладки станут более громоздкими.

Из условия A_1 следует, что вырожденное уравнение (4) имеет двукратный корень $u = \varphi(x,y,t)$.

Условие A_2. Функции $h(x,y,t)$, $\varphi(x,y,t)$, $f_1(u,x,y,t,\varepsilon)$, $u^0(x,y)$ являются достаточно гладкими, и для начальной функции $u^0(x,y)$ выполнено условие согласования начального и граничного условий

$$\left.\frac{\partial u^0}{\partial n}\right|_{\partial g} = 0. \tag{7}$$

Как обычно, требуемый порядок гладкости входных данных зависит от порядка строящейся асимптотики. Для построения асимптотики произвольного порядка потребуем, чтобы эти функции были бесконечно дифференцируемыми.

Условие A_3.

$$\bar{f}_1(x,y,t) := f_1(\varphi(x,y,t),x,t,0) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}.$$

Условие A_4.

$$\Pi^0(x,y) := u^0(x,y) - \varphi(x,y,0) > 0, \quad (x,y) \in \bar{g}.$$

Роль условий A_3–A_4 прояснится при построении и обосновании асимптотики.

При условиях A_1–A_4 будем строить асимптотику решения задачи (1)–(3) в виде (5), где $\tau = t/\varepsilon^2$, $\rho = r/\varepsilon^{3/4}$, $\bar{u}$ и Π — ряды по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$, Q и P — ряды по целым степеням $\varepsilon^{1/4}$.

Отметим, что задача (1)–(3) в случае одной пространственной переменной (т. е. когда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$) и двукратного корня вырожденного уравнения исследована в работе [2], результаты которой будут использованы в данной работе.

2.2. Регулярную часть асимптотики построим в виде

$$\bar{u}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \bar{u}_i(x,y,t). \tag{8}$$

Подставляя ряд (8) в уравнение (1), приходим к равенству

$$-h(x,y,t)(\bar{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + \ldots - \varphi(x,y,t))^2 + \varepsilon f_1(\bar{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + \ldots, x, y, t, \varepsilon) - \\ - \varepsilon^2(\bar{u}_{0t} - \Delta\bar{u}_0 + \ldots) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты разложения левой части равенства по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$, получаем последовательно уравнения для $\bar{u}_0,\ \bar{u}_1,\dots$

Уравнение для $\bar{u}_0$ имеет вид

$$-h(x,y,t)(\bar{u}_0-\varphi(x,y,t))^2=0,$$

откуда $\bar{u}_0=\varphi(x,y,t)$. Для $\bar{u}_1(x,y,t)$ получаем уравнение

$$-h(x,y,t)\bar{u}_1^2+\bar{f}_1(x,y,t)=0,$$

которое в силу (6) и условия A_3 имеет два вещественных корня разных знаков. Как будет видно из дальнейшего, для построения погранслойной асимптотики нужно взять положительный корень

$$\bar{u}_1=[h^{-1}(x,y,t)\bar{f}_1(x,y,t)]^{1/2}>0,\quad (x,y,t)\in\bar{\Omega}.$$

Последующие коэффициенты $\bar{u}_i$ ряда (8) однозначно определяются как решения линейных алгебраических уравнений, в частности, $\bar{u}_2=\frac{1}{2}h^{-1}(x,y,t)\bar{f}_{1u}(x,y,t)$.

Для невязки, вносимой функцией $\overset{(n)}{\bar{u}}=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i(x,y,t)$ в уравнение (1), имеет место оценка

$$\varepsilon^2(\overset{(n)}{\bar{u}}_t-\Delta\overset{(n)}{\bar{u}})-f(\overset{(n)}{\bar{u}},x,y,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{n}{2}+1}),\quad (x,y,t)\in\bar{\Omega}.\tag{9}$$

2.3. Погранслойный ряд $\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)$ построим в виде

$$\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{2}}\Pi_i(x,y,\tau).\tag{10}$$

Уравнения для коэффициентов Π_i этого ряда будем извлекать из равенства

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}=\Pi f+\varepsilon^2\Delta\Pi,\tag{11}$$

где Πf имеет вид (введём ещё одну погранслойную переменную $\widetilde{\tau}=\sqrt{\varepsilon}\tau=\frac{t}{\varepsilon^{3/2}}$):

$$\begin{multline}\Pi f=\{f(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon)+\Pi(x,y,\tau,\varepsilon),x,y,t,\varepsilon)-f(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon),x,y,t,\varepsilon)\}_{t=\varepsilon^{3/2}\widetilde{\tau}}=\\ =\{-h(x,y,t)[(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon)+\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)-\varphi(x,y,t))^2-(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon)-\varphi(x,y,t))^2]+\\ +\varepsilon\Pi f_1\}_{t=\varepsilon^{3/2}\widetilde{\tau}}.\end{multline}\tag{12}$$

Начальные условия для функций Π_i следуют из равенства

$$\Pi(x,y,0,\varepsilon)=u^0(x,y)-\bar{u}(x,y,0,\varepsilon).$$

При стандартном приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в разложениях левой и правой частей равенства (11) для главного члена Π_0 ряда (10) получается задача (x, y входят как параметры, $(x, y) \in \bar{g}$):

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x, y, 0)\Pi_0^2, \ \tau > 0, \tag{13}$$

$$\Pi_0(x, y, 0) = \Pi^0(x, y). \tag{14}$$

Для того, чтобы решение этой задачи стремилось к нулю при $\tau \longrightarrow \infty$, необходимо потребовать неотрицательности начальной функции $\Pi^0(x, y)$. Это обеспечено условием A_4. Однако, при этом $\Pi_0(x, y, \tau) \longrightarrow 0$ при $\tau \longrightarrow \infty$ как $O(1/\tau)$ (это следует из легко получаемого явного выражения для $\Pi_0(x, y, \tau)$), т. е. убывание Π_0 при $\tau \longrightarrow \infty$ имеет степенной характер.

Вместе с тем, как показывает исследование задачи (1)–(3) (см. [2]), ее решение ведет себя в пограничном слое более сложным образом. Степенное убывание пограничных функций имеет место только в первой зоне пограничного слоя, потом следует вторая (переходная) зона, а затем (в третьей зоне)пограничные функции убывают экспоненциально, как $\exp(-\varkappa\widetilde{\tau})$, где $\widetilde{\tau} = \sqrt{\varepsilon}\tau$, т. е. во второй зоне происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания пограничных функций. Границы этих зон мы уточним ниже.

В тех случаях, когда пограничный слой имеет несколько масштабов, обычно используют метод согласования асимптотических разложений, построенных в разных зонах пограничного слоя [3]. Оказалось, что в задаче (1)–(3) можно построить единые пограничные функции, описывающие поведение решения во всех зонах пограничного слоя. Для этого нужно изменить стандартные уравнения для Π_0 и следующих членов погранслойного ряда. Уравнение для Π_0 нужно взять в виде

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x, y, 0)(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0), \quad \tau > 0, \tag{15}$$

т. е. нужно в правую часть уравнения (13) добавить член

$$-2\sqrt{\varepsilon}h(x, y, 0)\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0,$$

содержащийся в разложении правой части (11).

Аналогичные слагаемые $-2\sqrt{\varepsilon}h(x, y, 0)\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_i$ нужно включить в уравнения для последующих функций Π_i. Эти слагаемые обеспечивают экспоненциальное убывание в третьей зоне функций Π_i, которые теперь будут зависеть не только от x, y и τ, но также и от ε, но для упрощения записи зависимость от ε отмечать не будем, т. е. будем писать $\Pi_i(x, y, \tau)$ вместо $\Pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$.

Решение уравнения (15) с начальным условием (14) находится в явном виде:

$$\Pi_0(x, y, \tau) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi^0(x, y)\exp(-2\sqrt{\varepsilon}h(x, y, 0)\bar{u}_1(x, y, 0)\tau)}{2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x, y, 0) + \Pi^0(x, y)(1 - \exp(-2\sqrt{\varepsilon}h(x, y, 0)\bar{u}_1(x, y, 0)\tau))}. \tag{16}$$

В дальнейшем для краткости записи вместо $\bar{u}_1(x,y,0), \Pi^0(x,y)$ и $h(x,y,0)$ будем часто писать $\bar{u}_1, \Pi^0$ и h.

Несложный анализ выражения (16) показывает: если $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$, где $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$ (т. е. если $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^{2-\gamma}$), то

$$\Pi_0(x,y,\tau) = \frac{\Pi^0}{1+\Pi^0 h\tau}\left(1 + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}-\gamma}\right)\right).$$

Если $\tau \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (т. е.$t \geqslant \varepsilon^{\frac{3}{2}}$), то

$$\Pi_0(x,y,\tau) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\exp(-k_0\widetilde{\tau}),$$

где $k_0 = k_0(x,y) := 2h(x,y,0)\bar{u}_1(x,y,0), \widetilde{\tau} = \sqrt{\varepsilon}\tau = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$.

Таким образом, функция $\Pi_0(x,y,\tau)$ подтверждает сказанное выше о пограничных функциях в данной задаче: в первой зоне пограничного слоя, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^{2-\gamma}$, где $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, функция $\Pi_0(x,y,\tau)$ убывает с ростом погранслойной переменной τ степенным образом: $\Pi_0 = O\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$; затем следует вторая (переходная) зона $\varepsilon^{2-\gamma} \leqslant t \leqslant \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции Π_0; и, наконец, в третьей зоне, т.е при $t \geqslant \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, погранслойная переменная имеет вид $\widetilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$, а функция Π_0 убывает с ростом $\widetilde{\tau}$ экспоненциально. Достоинство функции $\Pi_0(x,y,\tau)$, которую мы определили как решение задачи (15) с начальным условием (14), состоит в том, что она описывает поведение решения во всех зонах пограничного слоя. Как будет видно из дальнейшего, следующие члены погранслойного ряда (10) имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(x,y,\tau)$. Отметим также, что в силу условия A_4: $\Pi_0(x,y,\tau) > 0$. Это играет важную роль при определении следующих функций $\Pi_i(x,y,\tau)$ и при обосновании асимптотики.

Если же $\Pi^0(x,y) < 0$, то $\Pi_0(x,y,\tau) \longrightarrow -\infty$ при $\tau \longrightarrow \infty$, а если $\Pi^0(x,y) = 0$, то $\Pi_0(x,y,\tau) = 0$, и этот случай требует отдельного рассмотрения.

Задачи для следующих функций $\Pi_i(x,y,\tau),\ i = 1,2,\ldots$, имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = -\alpha(x,y,\tau,\varepsilon)\Pi_i + \pi_i(x,y,\tau,\varepsilon), \quad \tau > 0, \tag{17}$$

$$\Pi_i(x,y,0) = -\bar{u}_i(x,y,0), \tag{18}$$

где

$$\alpha(x,y,\tau,\varepsilon) = 2h(x,y,0)(\Pi_0(x,y,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,y,0)), \tag{19}$$

а π_i выражаются рекуррентно через функции Π_k с номерами $k < i$. При этом функции π_i формируются иначе, нежели при стандартном подходе. В состав $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ нужно включить те коэффициенты при $\varepsilon^{i/2}$ в разложении Πf (см. (12)) оценка, которых по модулю содержит не менее двух сомножителей $|\Pi_k||\Pi_m|,\ k+m \leq i,\ k < i,\ m < i$, а также умноженные на $\sqrt{\varepsilon}$ коэффициенты при

$\varepsilon^{(i+1)/2}$ оценка, которых содержит только один сомножитель $|\Pi_k|,\ k < i$, и после этого заменить $\widetilde{\tau}$ на $\sqrt{\varepsilon}\tau$. Кроме того, при $i \geqslant 3$ в состав π_i нужно включить слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\Delta\Pi_{i-3}$, представлящее собой умноженный на $\sqrt{\varepsilon}$ коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i+1}{2}}$ в разложении слагаемого $\varepsilon^2\Delta\Pi$ (см. (11)).

Например, функция $\pi_1(x, y, \tau, \varepsilon)$ при таком подходе имеет вид

$$\pi_1(x, y, \tau, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}(-2h(x, y, 0)\bar{u}_2(x, y, 0)\Pi_0(x, y, \tau) + \Pi_0 f_1),$$

поскольку выражение в круглых скобках не превосходит по модулю величины $c|\Pi_0|$, содержащей один сомножитель вида $|\Pi_k|,\ \ k < i = 1$, в то время как при стандартном подходе $\pi_1(x, y, \tau, \varepsilon) = 0$. Предложенный подход даёт следующую оценку для функций $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$:

$$|\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)| \le c(\Pi^2_{\varkappa}(x, y, \tau) + \sqrt{\varepsilon}\,\Pi_{\varkappa}(x, y, \tau)), \quad (x, y) \in \bar{g},\ \tau \geqslant 0, \tag{20}$$

где функция $\Pi_{\varkappa}(x, y, \tau)$ имеет вид (16) с тем отличием, что в показателе экспоненты, стоящей в числителе дроби (16), нужно множитель $2\bar{u}_1(x, y, 0)h(x, y, 0)$ заменить на положительное число $\varkappa$, меньшее минимального в области $\bar{g}$ значения этого множителя, а буквой c здесь и далее обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Указанная процедура формирования функций $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ позволяет получить единообразную оценку пограничных функций $\Pi_i(x, y, \tau)$ и функций $\Delta\Pi_i(x, y, \tau),\ i = 0, 1, 2, \ldots$:

$$|\Pi_i(x, y, \tau)| \le c\Pi_{\varkappa}(x, y, \tau),\ |\Delta\Pi_i(x, y, \tau)| \le c\Pi_{\varkappa}(x, y, \tau), \quad (x, y) \in \bar{g}, \quad \tau \geqslant 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Лемма 1. *Функции $\Pi_i(x, y, \tau)$ и $\Delta\Pi_i(x, y, \tau),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, где n — любое фиксированное натуральное число, имеют оценки (21).*

Доказательство. Для $\Pi_0(x, y, \tau)$ эта оценка непосредственно следует из (16).

Чтобы получить оценку (21) для $\Delta\Pi_0(x, y, \tau)$, рассмотрим сначала уравнение для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x, y, \tau)$, которое получается из уравнения (15) дифференцированием по x:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}\right) = \alpha(x, y, \tau, \varepsilon)\frac{\partial\Pi_0}{\partial x} + r(x, y, \tau, \varepsilon), \quad \tau \geqslant 0, \tag{22}$$

где функция $\alpha(x, y, \tau, \varepsilon)$ определена формулой (19), а

$$r(x, y, \tau, \varepsilon) = -h_x(x, y, 0)\left[\Pi_0^2(x, y, \tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0\right] - \\ - 2h(x, y, 0)\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_{1x}(x, y, 0)\Pi_0.$$

Так как $\Pi_0(x,y,\tau) \le \Pi_\varkappa(x,y,\tau)$, то для $r(x,y,\tau,\varepsilon)$ имеет место очевидная оценка типа (20):

$$|r(x,y,\tau,\varepsilon)| \le c\left(\Pi_\varkappa^2(x,y,\tau)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\right), \quad (x,y)\in\bar{g}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{23}$$

Начальное условие для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$ получается из (14) дифференцированием по x:

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,0)=\frac{\partial\Pi^0}{\partial x}(x,y). \tag{24}$$

Таким образом, производная $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$ является решением линейного дифференциального уравнения (22) с начальным условием (24), причем неоднородность $r(x,y,\tau,\varepsilon)$ в уравнении (22) имеет оценку (20). Ниже, рассматривая задачу (17), (18) для $\Pi_i(x,y,\tau)$ (задача (22), (24) такого же типа, как (17), (18)), мы покажем, что если неоднородность $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ в уравнении (17) имеет такую же оценку, как оценка (23) для $r(x,y,\tau,\varepsilon)$, то решение $\Pi_i(x,y,\tau)$ задачи (17), (18) имеет оценку (21). Поэтому и для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$ справедлива оценка вида (21).

Уравнение и начальное условие для $\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}(x,y,\tau)$ получаются дифференцированием по x из (22) и (24), причем неоднородность в уравнении (обозначим её $r_1(x,y,\tau,\varepsilon)$) будет иметь такую же оценку, как и оценка (3.20). В этом нетрудно убедиться, записав выражение для $r_1(x,y,\tau,\varepsilon)$ и используя оценки вида (21) для $\Pi_0(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$.

Аналогичным образом доказывается, что для $\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial y^2}(x,y,\tau)$ также справедлива оценка вида (21).

Итак, функции $\Pi_0(x,y,\tau)$ и $\Delta\Pi_0(x,y,\tau)$ имеют оценки вида (21). Для $\Pi_i(x,y,\tau)$, $i=1,2,\ldots$ оценка (21) доказывается по индукции с помощью представления решения задачи (17), (18) в виде

$$\Pi_i(x,y,\tau)=-\bar{u}_i(x,y,0)\exp\left[-\int_0^\tau \alpha(x,y,s,\varepsilon)ds\right]+ \\ +\int_0^\tau \exp\left[-\int_{\tau_0}^\tau \alpha(x,y,s,\varepsilon)ds\right]\pi_i(x,y,\tau_0,\varepsilon)d\tau_0.$$

Используя это представление и выражение (19) для функции $\alpha(x,y,\tau)$, нетрудно доказать (см. [2]), что если для $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ справедлива оценка (20), то $\Pi_i(x,y,\tau)$ имеет оценку (21).

Оценки вида (21) для $\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial y^2}(x,y,\tau)$ при $i=1,2,\ldots$ получаются таким же образом, как была получена оценка для $\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}(x,y,\tau)$. Стоит лишь отметить, что в состав $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ при $i\geqslant 3$ мы включаем слагаемое $\sqrt{\varepsilon}\Delta\Pi_{i-3}$, следовательно, после дифференцирования дважды по x или по y уравнения (17), в состав неоднородности полученного уравнения войдут слагаемые, содержащие производные третьего и четвёртого порядков функций $\Pi_{i-3}(x,y,\tau)$.

Оценки вида (21) для этих производных получаются аналогично тому, как были получены оценки для производных $\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial x^2}(x,y,\tau)$. $\square$

Замечание. Число $\varkappa$, входящее в выражения для $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$, будет различным в оценках (21) для различных i, но для упрощения записи все такие числа будем обозначать буквой $\varkappa$.

Для невязки, вносимой в равенство (11) функцией $\overset{(n)}{\Pi} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2}\Pi_i(x,y,\tau)$, получается оценка:

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\Pi}}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \Delta \overset{(n)}{\Pi} - \overset{(n)}{\Pi} f = O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}) \left[\Pi_\varkappa^2(x,y,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\right]. \qquad (25)$$

2.4. Для построения ряда $Q(\rho,l,t,\varepsilon)$ перейдем в окрестности границы ∂g области g к новым (локальным) координатам. Пусть уравнения границы ∂g имеют вид

$$x = \psi_1(l), \quad y = \psi_2(l), \quad 0 \leqslant l \leqslant l_0,$$

где $\psi_1(l), \psi_2(l)$ — бесконечно дифференцируемые функции и

$$\Big(\psi_1'(l)\Big)^2 + \Big(\psi_2'(l)\Big)^2 \neq 0.$$

В достаточно малой окрестности границы ∂g (в которой нормали к ∂g не пересекаются) введем локальные координаты (r,l), где r- расстояние от точки из этой окрестности до ∂g вдоль нормали к границе. Координаты (x,y) точки связаны с её координатами (r,l) равенствами

$$x = \psi_1(l) - r\frac{\psi_2'(l)}{\sqrt{\big(\psi_1'(l)\big)^2 + \big(\psi_2'(l)\big)^2}}, \quad y = \psi_2(l) + r\frac{\psi_1'(l)}{\sqrt{\big(\psi_1'(l)\big)^2 + \big(\psi_2'(l)\big)^2}}.$$

Для функций, зависящих от x и y, после перехода к новым координатам r и l, будем использовать краткие обозначения, например, вместо $\bar{u}_1(x(r,l),y(r,l),t)$ будем писать $\bar{u}_1(r,l,t)$.

Произведем растяжение переменной r, причем коэффициент растяжения возьмем равным $\varepsilon^{3/4}$ (а не ε, как в случае простого корня вырожденного уравнения), т. е. введем погранслойную переменную $\rho = \frac{r}{\varepsilon^{3/4}}$.

В переменных ρ, l оператор $\varepsilon^2\Delta$ имеет вид

$$\varepsilon^2\Delta = \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon^2\theta(\varepsilon^{3/4}\rho,l)\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \varepsilon^{\frac{5}{4}}\vartheta(\varepsilon^{3/4}\rho,l)\frac{\partial}{\partial \rho} + \varepsilon^2\phi(\varepsilon^{3/4}\rho,l)\frac{\partial}{\partial l} =$$
$$= \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{3j+2}{4}}L_j,$$

где $\theta(r,l) = \left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)^2$, $\vartheta(r,l) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$, $\phi(r,l) = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2}$, L_j — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ρ, l, содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial^2}{\partial l^2}$, в частности, $L_1 = \vartheta(0,l)\frac{\partial}{\partial \rho}$.

Погранслойный ряд $Q(\rho,l,t,\varepsilon)$ построим в виде

$$Q(\rho,l,t,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{3}{4}} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{4}} Q_i(\rho,l,t).$$

С помощью равенства

$$\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2} = -Qf - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{3j+2}{4}} L_j Q + \varepsilon^2 \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{26}$$

в котором

$$\begin{aligned} Qf = f(\bar{u}(\varepsilon^{3/4}\rho,l,t,\varepsilon) + Q(\rho,l,t,\varepsilon), \varepsilon^{3/4}\rho,l,t,\varepsilon) - \\ - f(\bar{u}(\varepsilon^{3/4}\rho,l,t,\varepsilon), \varepsilon^{3/4}\rho,l,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{27}$$

для функций $Q_i(\rho,l,t)$ стандартным образом получаются задачи (l,t входят как параметры, $0 \le l \le l_0,\ 0 \le t \le T$):

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \rho^2} - \beta^2(l,t) Q_i = q_i(\rho,l,t), \quad \rho > 0,$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \rho}(0,l,t) = \begin{cases} -\frac{\partial \bar{u}_{i/2}}{\partial r}(0,l,t),\ i = 2n,\ n = 0,1,\dots \\ 0,\ i = 2n+1,\ n = 0,1,\dots \end{cases}, \tag{28}$$

$$Q_i(\infty,l,t) = 0,$$

где $\beta(l,t) = [2h(0,l,t)\bar{u}_1(0,l,t)]^{1/2} > 0$, а $q_i(\rho,l,t)$ рекуррентно выражаются через $Q_k(\rho,l,t)$ с номерами $k < i$, в частности $q_0(\rho,l,t) = 0$.

Все функции $Q_i(\rho,l,t)$ можно последовательно найти в явном виде, например,

$$Q_0(\rho,l,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0,l,t)\beta^{-1}(l,t)\exp(-\beta(l,t)\rho). \tag{29}$$

Все $Q_i(\rho,l,t)$ имеют экспоненциальную оценку вида

$$|Q_i(\rho,l,t)| \le c\ \exp(-\varkappa\rho), \quad \rho \ge 0. \tag{30}$$

(как и для функций $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$ множитель $\varkappa$ в показателе экспоненты обозначен одной и той же буквой для всех i).

Нетрудно показать, что такие же оценки имеют производные

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \rho},\ \frac{\partial Q_i}{\partial l},\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial l^2},\ \frac{\partial Q_i}{\partial t}.$$

Для невязки, вносимой в равенство (26) функцией

$$\overset{(n)}{Q} = \varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/4}Q_i(\rho,l,t),$$

справедлива оценка

$$\varepsilon^2\frac{\partial \overset{(n)}{Q}}{\partial t} - \sqrt{\varepsilon}\ \frac{\partial^2 \overset{(n)}{Q}}{\partial \rho^2} - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{\frac{3i+2}{4}}L_i\overset{(n)}{Q} - \overset{(n)}{Q}f = O(\varepsilon^{\frac{n}{4}+\frac{3}{2}})\exp(-\varkappa\rho),$$
$$\rho \geqslant 0,\ 0\le l\le l_0,\ 0\le t\le T. \tag{31}$$

Хотя формально функции $Q_i(\rho,l,t)$ определены для $\rho\geqslant 0$, фактически они имееют смысл только при $0\leqslant\rho\leqslant\frac{\delta}{\varepsilon^{3/4}}$, т. е. в той (достаточно малой) δ-окрестности границы $\partial\Omega$, где введены локальные координаты (r,l). Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{\Omega}$ применим стандартную процедуру (см. [1]) умножения Q-функций на бесконечно дифференцируемую срезающую функцию $\sigma(r)$, в результате чего Q-функции не изменятся в $\frac{\delta}{2}$-окрестности границы $\partial\Omega$ и станут равными нулю вне δ- окрестности$\partial\Omega$. Для регуляризованных таким образом функций $Q_i(\rho,l,t)$ сохраним старые обозначения. Соотношения (30) и (31) останутся при этом в силе.

2.5. Члены углового погранслойного ряда

$$P(\rho,l,\tau,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac14}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i(\rho,l,\tau)$$

служат для устранения невязок, внесенных членами ряда $\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)$ в граничное условие при $(x,y,t)\in\{\partial g\times(0\le t\le T)\}$ и членами ряда $Q(\rho,l,t,\varepsilon)$ в начальное условие при $t=0$. Уравнения для функций $P_i(\rho,l,\tau)$ получаются из равенства

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \sqrt{\varepsilon}\ \frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2} = Pf + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{3j+2}{4}}L_jP, \tag{32}$$

где

$$Pf = f(\bar{u}+\Pi+Q+P,\varepsilon^{3/4}\rho,l,\varepsilon^{3/2}\widetilde{\tau},\varepsilon) - \Pi f - Qf - f(\bar{u},\varepsilon^{3/4}\rho,l,\varepsilon^{3/2}\widetilde{\tau},\varepsilon), \tag{33}$$

Πf и Qf определены равенствами (12) и (27); они имеют вид (l входит как параметр, $0\le l\le l_0$):

$$\frac{\partial P_i}{\partial\tau} - \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial^2 P_i}{\partial\rho^2} + \alpha(0,l,\tau,\varepsilon)P_i = p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon),\quad \rho>0,\ \tau>0, \tag{34}$$

а начальное и граничное условия зададим в соответствии с назначением функций $P_i(\rho, l, \tau)$:

$$P_i(\rho, l, 0) = \begin{cases} -Q_{i-2}(\rho, l, 0), \ i \geqslant 2, \quad \rho \geqslant 0, \\ 0, \ i = 0, 1, \ \rho \geqslant 0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho}(0, l, \tau) = \begin{cases} -\frac{\partial \Pi_{\frac{i}{2}-1}}{\partial r}(0, l, \tau), \ i = 2n, \ n = 1, 2, \ldots, \ \tau \geqslant 0, \\ 0, \ i = 0, \ i = 2n+1, \ n = 0, 1, \ldots, \quad \tau \geqslant 0. \end{cases} \tag{36}$$

Коэффициент $\alpha(0, l, \tau, \varepsilon)$ определен формулой (19), а функции $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ рекуррентно выражаются через $P_k(\rho, l, \tau)$ с номерами $k < i$, а также через Π_k и Q_k с номерами $k \leq i$, в частности, $p_0(\rho, l, \tau, \varepsilon) = -2\sqrt{\varepsilon} h(0, l, 0)\Pi_0(0, l, \tau)Q_0(\rho, l, 0)$.

Отметим, что начальное (35) и граничное (36) условия согласованы в точках кривой $\{\partial g \times (t = 0)\}$. При $i = 0$ и $i = 1$ это следует непосредственно из (35) и (36). При $i = 2$ имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial \rho} P_2(\rho, l, 0)\bigg|_{\rho=0} = -\frac{\partial Q_0}{\partial \rho}(0, l, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, l, 0)$$

(см. (28)) и

$$\frac{\partial P_2}{\partial \rho}(0, l, 0) = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}(0, l, 0) = -\frac{\partial u^0}{\partial n}(0, 0) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, l, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0, l, 0)$$

(см. (14), (7)). Поскольку правые части в этих равенствах одинаковы, то равны и левые части, что и означает согласованность начального и граничного условий (35) и (36) при $i = 2$. Нетрудно проверить согласованность начального и граничного условий при любом $i > 2$.

При формировании правых частей $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ уравнений (34) при $i = 1, 2, \ldots$ будем включать в состав $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ не только коэффициенты при $\varepsilon^{(i+1)/4}$ в разложении Pf по степеням $\varepsilon^{1/4}$ (см. (33)), но также и некоторые коэффициенты при $\varepsilon^{(i+3)/4}$ (умноженные на $\sqrt{\varepsilon}$), аналогично тому, как это делалось при формировании правых частей $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ уравнений (17). Кроме того, при $i \geqslant 3$ в состав $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ нужно включить слагаемые $\sqrt{\varepsilon} \sum_{3j+k=i} L_j P_k$ при $j \geqslant 1, \ k \geqslant 0$, извлекаемые из последнего члена в правой части (32). Это позволяет получить для функций $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ оценку

$$|p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)| \leq c\left[\Pi_{\varkappa}^2(0, l, \tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_{\varkappa}(0, l, \tau)\right] \exp(-\varkappa\rho). \tag{37}$$

Например, при таком подходе функция $p_1(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ имеет вид

$$p_1(\rho, l, \tau, \varepsilon) = -2h(0, l, 0)\left[\frac{1}{2}P_0^2(\rho, l, \tau) + \sqrt{\varepsilon}\,(\Pi_0(0, l, \tau)Q_1(\rho, l, 0) + \right.$$
$$\left. + Q_0(\rho, l, 0)P_0(\rho, l, \tau))\right].$$

В силу (37) для функций $P_i(\rho, l, \tau)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, получается оценка вида

$$|P_i(\rho, l, \tau)| \le c\Pi_\varkappa(0, l, \tau) \exp(-\varkappa\rho).$$

Доказательство данной оценки аналогично доказательству, приведенному в [2].

Нетрудно показать, что такие же оценки имеют производные $\frac{\partial P_i}{\partial \rho}$, $\frac{\partial P_i}{\partial l}$, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial l^2}$.

Таким образом, P-функции ведут себя в трех зонах пограничного слоя аналогично П-функциям.

Для невязки, вносимой в равенство (32) функцией

$$\overset{(n)}{P} = \varepsilon^{1/4} \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/4} P_i(\rho, l, \tau),$$

получается оценка

$$\frac{\partial \overset{(n)}{P}}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \Delta \overset{(n)}{P} - \overset{(n)}{P} f = O(\varepsilon^{\frac{n+2}{4}}) \left(\Pi_\varkappa^2(0, l, \tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(0, l, \tau)\right) \exp(-\varkappa\rho). \tag{38}$$

Аналогично тому, как это было сделано с функциями $Q_i(\rho, l, t)$, умножим функции $P_i(\rho, l, \tau)$ на срезающую функцию $\sigma(r)$ и сохраним за ними старые обозначения.

2.6. Теорема об асимптотике решения.

Обозначим через $U_n(x, t, \varepsilon)$ частичную сумму ряда (5) следующего вида:

$$U_n(x, y, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2} (\bar{u}_i(x, y, t) + \Pi_i(x, y, \tau)) + \\ + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/4} Q_i(\rho, l, t) + \varepsilon^{1/4} \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i/4} P_i(\rho, l, \tau),$$

здесь $n \geqslant 1$, а при $n = 0$ функции с отрицательными номерами, возникающие в этих суммах, считаются равными нулю.

Теорема 1. *Если выполнены условия A_1–A_4, то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, y, t, \varepsilon)$, для которого построенный ряд (5) является асимптотическим рядом, т. е. для любого целого $n \ge 0$ справедливо равенство*

$$u(x, y, t, \varepsilon) = U_n(x, y, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x, y, t) \in \bar{\Omega}. \tag{39}$$

Доказательство. Проведём доказательство теоремы с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т. е. путём построения с использованием частичной суммы ряда (5) подходящих нижнего и верхнего решений задачи (1)–(3) [4]. В связи с этим напомним понятия нижнего и верхнего решений.

Определение 1. *Функции* $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon)$ *и* $\bar{U}(x,y,t,\varepsilon)$ *называются нижним и верхним решениями задачи (1)–(3), если они удовлетворяют условиям:*

1^o. $L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon^2(\underline{U}_t - \Delta \underline{U}) - f(\underline{U},x,y,t,\varepsilon) \le 0 \le L_\varepsilon \bar{U},\ (x,y,t)\in\Omega$;

2^o. $\underline{U}(x,y,0,\varepsilon) \le u^0(x,y) \le \bar{U}(x,y,0,\varepsilon),\ (x,y)\in\bar{g}$;

3^o. $\frac{\partial \underline{U}}{\partial n} \ge 0 \ge \frac{\partial \bar{U}}{\partial n},\ (x,y,t)\in\partial g\times(0\le t\le T)$. *Нижнее и верхнее решения называются упорядоченными, если*

$$\underline{U}(x,y,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,y,t,\varepsilon),\ (x,y,t)\in\bar{\Omega}$$

Известно (см. [5]), что если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1)–(3), то эта задача имеет решение $u(x,y,t,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,y,t,\varepsilon) \le u(x,y,t,\varepsilon) \le \bar{U}(x,y,t,\varepsilon),\ (x,y,t)\in\bar{\Omega}. \tag{40}$$

Пусть n — любое натуральное число ($n\ge 1$).

Нижнее решение возьмём в виде:

$$\underline{U}(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) - \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} z(r,\varepsilon), \tag{41}$$

где

$$z(r,\varepsilon) = M + \exp\left(-k\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\sigma(r),$$

$\sigma(r)$ — срезающая функция (см. п. 2.3).

Покажем, что если взять положительные числа M и k достаточно большими, то для достаточно малых ε функция (41) будет нижним решением задачи (1)–(3).

В силу оценок (9), (25), (31) и (38) имеем оценку для$L_\varepsilon U_n$:

$$L_\varepsilon U_n = O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right) + \left[O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)\Pi_\varkappa^2(x,y,\tau) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right)\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\right] +$$

$$+O\left(\varepsilon^{\frac{2n+4}{4}}\right)\exp(-\varkappa\rho) + \left[O\left(\varepsilon^{\frac{2n+2}{4}}\right)\Pi_\varkappa^2(0,l,\tau) + O\left(\varepsilon^{\frac{2n+4}{4}}\right)\Pi_\varkappa(0,l,\tau)\right]\exp\left(-\varkappa\rho\right).$$

Следовательно

$$L_\varepsilon U_n = O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)\Pi_\varkappa(x,y,\tau), \quad (x,y,t)\in\Omega.$$

Вычислим $L_\varepsilon \underline{U}$:

$$\begin{gathered} L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon^2\left(\underline{U}_t - \Delta\underline{U}\right) - f(\underline{U},x,y,t,\varepsilon) = L_\varepsilon U_n + \varepsilon^{\frac{n+5}{2}}\Delta z - \\ - \left[f\left(U_n - \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} z, x,y,t,\varepsilon\right) - f\left(U_n,x,y,t,\varepsilon\right)\right] = O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+3}{2}}\right)k^2 + \\ + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)\Pi_\varkappa(x,y,\tau) + f_u\left(U_n,x,y,t,\varepsilon\right)\varepsilon^{\frac{n+1}{2}} z - \frac{1}{2}f_{uu}^*\varepsilon^{n+1}z^2, \end{gathered} \tag{42}$$

где

$$f_u\left(U_n, x, y, t, \varepsilon\right) = -2h(x,y,t)\left(U_n(x,y,t,\varepsilon) - \varphi(x,y,t)\right) + \varepsilon f_{1u}\left(U_n, x, y, t, \varepsilon\right) =$$
$$= -2h\left[\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \varepsilon^{1/4}P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_1 + O\left(\varepsilon^{3/4}\right)\right] + O\left(\varepsilon\right) =$$
$$= -h\left[\left(\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + \Pi_0\right) + a(x,y,t,\varepsilon)\right] + O\left(\varepsilon\right), \quad (43)$$

$$a(x,y,t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + 2\left(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \varepsilon^{1/4}P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_1\right) + O\left(\varepsilon^{3/4}\right) > \sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1 + \Pi_0 -$$
$$- c\varepsilon^{1/4}\left(\Pi_\varkappa(0,l,\tau) + \varepsilon^{1/4}\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\right),$$

производная второго порядка f^*_{uu} берётся в некоторой промежуточной точке.

Заметим, что

$$\Pi_\varkappa(x,y,\tau) = \Pi_0(x,y,\tau)\exp(\sqrt{\varepsilon}(2\bar{u}_1 h - \varkappa)\tau),$$

откуда следует, что при $0 \le \tau \le \varepsilon^{-1/2}$ выполняется неравенство

$$\Pi_\varkappa(x,y,\tau) \le c_1\Pi_0(x,y,\tau), \quad (x,y) \in \bar{g}, \quad 0 \le t \le \varepsilon^{3/2},$$

где c_1 — некоторое положительное число, не зависящее от ε. Нетрудно доказать, используя выражение (16) для $\Pi_0(x,y,\tau)$, что при $0 \le \tau \le \varepsilon^{-1/2}$ справедливы также неравенства

$$\Pi_\varkappa(0,l,\tau) \le c_2\Pi_0(x,y,\tau), \quad \sqrt{\varepsilon} \le c_3\Pi_0(x,y,\tau), \quad (x,y) \in \bar{g}.$$

В силу этих неравенств для достаточно малых ε при $0 \le \tau \le \varepsilon^{-1/2}$ имеем:

$$\Pi_0(x,y,\tau) > c\varepsilon^{1/4}\left(\Pi_\varkappa(0,l,\tau) + \varepsilon^{1/4}\Pi_\varkappa(x,y,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\right).$$

Если $\tau > \varepsilon^{-1/2}$, то $\Pi_\varkappa(x,y,\tau) = O(\sqrt{\varepsilon})$, поэтому для достаточно малыхε

$$\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,y,t) > c\varepsilon^{1/4}\left(\Pi_\varkappa(0,l,\tau) + \varepsilon^{1/4}\Pi_\varkappa(x,y,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\right), \quad (x,y) \in \bar{g}, \quad t \geqslant \varepsilon^{3/2}.$$

Таким образом, для достаточно малыхε

$$a(x,y,t,\varepsilon) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}.$$

Из (43) теперь следует оценка

$$f_u\left(U_n, x, y, t, \varepsilon\right) < -h(x,y,t)\left(\sqrt{\varepsilon}\bar{u}_1(x,y,t) + \Pi_0(x,y,\tau)\right) <$$
$$< -c_0\left(\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(x,y,\tau)\right), \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega},$$

где c_0 — положительное число, не зависящее от , а из (42) получаем

$$L_\varepsilon \underline{U} < O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right)\Pi_\varkappa(x,y,\tau) - c_0\left(\sqrt{\varepsilon} + \Pi_0(x,y,\tau)\right)\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}M -$$
$$- \varepsilon^{n+1}O\left(M^2\right) < 0, \quad (x,y,t) \in \overline{\Omega},$$

при $n \geqslant 1$ для достаточно большого M и достаточно малых ε, т. е. функция $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon)$ удовлетворяет условию 1^o определения 1.

Так как $U_n(x,y,0,\varepsilon) = u^0(x,y)$ (это следует из (14),(18) и (35)), то

$$\underline{U}(x,y,0,\varepsilon) = u^0(x,y) - \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} z(r,\varepsilon) < u^0(x,y)$$

и, тем самым, для $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon)$ выполнено условие 2^o определения 1.

Наконец, поскольку в силу (28) и (36)

$$\left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial n}\right|_{\partial g\times(0\leq t\leq T)} = \frac{\partial U_n}{\partial r}(0,l,t,\varepsilon) - \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\frac{\partial z}{\partial r}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial r}(0,t) + \varepsilon^{\frac{n}{2}}\frac{\partial \Pi_n}{\partial r}(0,\tau) + \varepsilon^{\frac{n}{2}}k,$$

то для достаточно большого k выполнено неравенство

$$\left.\frac{\partial \underline{U}}{\partial n}\right|_{\partial g\times(0\leq t\leq T)} > 0,$$

т. е. функция $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon)$ удовлетворяет условию 3^o определения 1.

Таким образом, функция $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon)$, определенная равенством (41), для достаточно большого M, достаточно большого k и достаточно малых ε удовлетворяет всем условиям определения 1 и, следовательно, является нижним решением задачи (1)–(3).

Аналогично доказывается, что функция

$$\overline{U}(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} z(r,t) \tag{44}$$

для достаточно большого M, достаточно большого k и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1)–(3), а поскольку $\underline{U}(x,y,t,\varepsilon) \leq \bar{U}(x,y,t,\varepsilon)$, то построенные нижнее и верхнее решения являются упорядоченными.

Следовательно, для достаточно малых ε существует решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее при $n \geqslant 1$ неравенствам (40). Из этих неравенств и вида (41) и (44) нижнего и верхнего решений следует, что при $n \geqslant 1$

$$u(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\right), \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \tag{45}$$

При $n = 1$ из (45) имеем:

$$u = U_1 + O(\varepsilon) = U_0 + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right), \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega},$$

где $U_0 = \bar{u}_0 + \Pi_0 + \varepsilon^{1/4} P_0$.

Таким образом, равенство (39) верно для любого целого $n \geqslant 0$. Теорема 1 доказана.$\square$

3. Задача (1)–(3) в случае трёхкратного корня вырожденного уравнения

3.1. Сформулируем условия, при которых в этом разделе рассматривается задача (1)–(3).

Условие A_1'.

Функция $f(u,x,y,t,\varepsilon)$ имеет вид

$$f(u,x,y,t,\varepsilon) = -h(x,y,t)(u-\varphi(x,y,t))^3 + \varepsilon f_1(u,x,y,t,\varepsilon), \tag{46}$$

причем $h(x,y,t) > 0$, $(x,y,t) \in \bar{\Omega}$.

Из представления (46) следует, что вырожденное уравнение (4) имеет трехкратный корень $u = \varphi(x,y,t)$.

Условие A_2'.

Функции $h(x,y,t)$, $\varphi(x,y,t)$, $f_1(u,x,y,t,\varepsilon)$, $u^0(x,y)$ являются достаточно гладкими, и для начальной функции $u^0(x,y)$ выполнено условие согласования начального и граничных условий

$$\left.\frac{\partial u^0}{\partial n}\right|_{\partial g} = 0. \tag{47}$$

Условие A_3'.

$$\bar{f}_1(x,y,t) := \bar{f}_1(\varphi(x,y,t),x,y,t,0) \neq 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}.$$

Отметим, что, в отличие от случая двукратного корня вырожденного уравнения (см. условие A_3), знак$\bar{f}_1(x,y,t)$ может быть теперь любым, но существенно, что $\bar{f}_1(x,y,t)$ не обращается в нуль ни в одной точке области $\bar{\Omega}$.

Условие A_4'.

$$\Pi^0(x,y) := u^0(x,y) - \varphi(x,y,0) \begin{cases} > 0, & \text{если} \;\; \bar{f}_1(x,y,t) > 0, \\ < 0, & \text{если} \;\; \bar{f}_1(x,y,t) < 0. \end{cases}, \quad (x,y) \in \bar{g}.$$

При условиях A_1'-A_4' будем строить асимптотику решения задачи (1)–(3) в виде (5), где $\tau = t/\varepsilon^2$, $\rho = r/\varepsilon^{2/3}$, (r,l) — те же локальные координаты точки области g в малой окрестности границы ∂g этой области, что и в разделе 2, $\bar{u}$, Π, Q и P — ряды по целым степеням $\varepsilon^{1/3}$.

3.2. Регулярную часть асимптотики построим в виде

$$\bar{u}(x,y,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{3}} \bar{u}_i(x,y,t).$$

Уравнения для членов этого ряда получаются стандартным способом. Как и ранее, $\bar{u}_0(x,y,t) = \varphi(x,y,t)$, а для $\bar{u}_1(x,y,t)$ получается уравнение

$$-h(x,y,t)\bar{u}_1^3 + \bar{f}_1(x,y,t) = 0,$$

которое в силу условия A_3' имеет вещественный корень, не равный нулю ни в одной точке области $\bar{\Omega}$:

$$\bar{u}_1 = [h^{-1}(x,y,t)\bar{f}_1(x,y,t)]^{1/3}, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \tag{48}$$

Последующие члены $\bar{u}_i$ однозначно определяются как решения линейных алгебраических уравнений

$$\left(-3h(x,y,t)\bar{u}_1^2(x,y,t)\right)\bar{u}_i = F_i(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega},$$

где $F_i(x,y,t)$ выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_j(x,y,t)$ с номерами $j < i$. В частности, $\bar{u}_2 = \frac{1}{3}\left(h^2(x,y,t)\bar{f}_1(x,y,t)\right)^{-\frac{1}{3}}\bar{f}_{1u}(x,y,t)$.

3.3. Погранслойный ряд $\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)$ построим в виде

$$\Pi(x,y,\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{3}} \Pi_i(x,y,\tau). \tag{49}$$

Уравнения для членов этого ряда будем извлекать из равенства

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \Pi f + \varepsilon^2 \Delta \Pi, \tag{50}$$

где Πf имеет вид (вводим еще одну погранслойную переменную $\tilde{\tau} = \varepsilon^{2/3}\tau = \frac{t}{\varepsilon^{4/3}}$):

$$\begin{aligned}\Pi f = {}& [f(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon) + \Pi(x,y,\tau,\varepsilon), x,y,t,\varepsilon) - f(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon), x,y,t,\varepsilon)]_{t=\varepsilon^{4/3}\tilde{\tau}} = \\ &= \big[-h(x,y,t)[(\bar{u}(x,y,t,\varepsilon) + \Pi(x,y,\tau,\varepsilon) - \varphi(x,y,t))^3 - (\bar{u}(x,y,t,\varepsilon) - \\ &\qquad - \varphi(x,y,t))^3] + \varepsilon \Pi f_1\big]_{t=\varepsilon^{4/3}\tilde{\tau}}.\end{aligned}$$

При этом, как и в п. 2.3, уравнения для функций $\Pi_i(x,y,\tau)$ будем формировать не стандартным способом.

Начальные условия для функций Π_i следуют из равенства

$$\Pi(x,y,0,\varepsilon) = u^0(x,y) - \bar{u}(x,y,0,\varepsilon).$$

Главный член Π_0 ряда (49) определим как решение задачи (x и y входят как параметры):

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x,y,0)\left(\Pi_0^3 + 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi_0^2 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0\right), \quad \tau > 0, \tag{51}$$

$$\Pi_0(x,y,0) = \Pi^0(x,y). \tag{52}$$

В силу условия A_4' решение задачи (51), (52) монотонно стремится к нулю при $\tau \longrightarrow \infty$.

Функция $\Pi_0(x,y,\tau)$ не находится в явном виде. Получим для нее оценки сверху и снизу.

Пусть для определенности $\bar{f}_1(x,y,t) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}$, и, следовательно, $\Pi^0(x,y) > 0$ и $\bar{u}_1(x,y,t) > 0, \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}$ (см. условие $A_4^{'}$ и (48)). Тогда

$$\Pi_0(x,y,\tau) > 0, \quad (x,y) \in \bar{g}, \quad \tau \geqslant 0,$$

и

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} < -h(x,y,0)\left(\Pi_0^3 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0\right), \ \tau > 0.$$

Введем функцию $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \tau} = -h(x,y,0)\left(\bar{\Pi}^3 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\bar{\Pi}\right), \quad \tau > 0;$$

$$\bar{\Pi}(x,y,0) = \Pi^0(x,y) > 0.$$

Функция $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$ находится в явном виде:

$$\bar{\Pi}(x,y,\tau) = \\ = \frac{\sqrt{3}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi^0(x,y)\exp(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau)}{\left[3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0) + \left(\Pi^0(x,y)\right)^2\left(1-\exp(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (53)$$

и дает оценку сверху для $\Pi_0(x,y,\tau)$:

$$\Pi_0(x,y,\tau) \leq \bar{\Pi}(x,y,\tau) \leq c\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau\right)}{\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau\right)\right]^{\frac{1}{2}}}, \\ (x,y) \in \bar{g}, \quad \tau \geqslant 0. \quad (54)$$

Буквой c здесь и далее (иногда через $c_1, c_2, \dots$) обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε. Несложный анализ выражения (53) показывает, что функция $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$ имеет различное поведение в трёх зонах пограничного слоя: в первой зоне, где $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon^{-\left(\frac{2}{3}-\gamma\right)}, \quad 0 < \gamma < \frac{2}{3}$, функция $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$ убывает с ростом погранслойной переменной τ степенным образом: $\bar{\Pi} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tau}}\right)$; затем следует вторая (переходная) зона $\varepsilon^{-\left(\frac{2}{3}-\gamma\right)} \leqslant \tau \leqslant \varepsilon^{-\frac{2}{3}}$, в которой происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания функции $\bar{\Pi}$; и, наконец, в третьей зоне, т.е при $\tau \geqslant \varepsilon^{-\frac{2}{3}}$, погранслойная переменная имеет вид $\tilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}$, а функция $\bar{\Pi}$ убывает с ростом $\tilde{\tau}$ экспоненциально: $\bar{\Pi}(x,y,\tau) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-\varkappa\tilde{\tau}\right)\right)$.

Получим теперь оценку снизу для функции $\Pi_0(x,y,\tau)$. Так как

$$\varepsilon^{1/3}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi_0^2 = \sqrt{\Pi_0^3 \cdot \varepsilon^{2/3}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0} \leq \frac{1}{2}\left(\Pi_0^3 + \varepsilon^{2/3}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0\right)$$

(среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического), то

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = -h(x,y,0)\left(\Pi_0^3 + 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi_0^2 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0\right) \geqslant$$

$$\geqslant -h(x,y,0)\left(\frac{5}{2}\Pi_0^3 + \frac{9}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\Pi_0\right).$$

Введем функцию $\underline{\Pi}(x,y,\tau)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial \tau} = -h(x,y,0)\left(\frac{5}{2}\underline{\Pi}_0^3 + \frac{9}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0)\underline{\Pi}\right), \quad \tau > 0,$$

$$\underline{\Pi}(x,y,0) = \Pi^0(x,y) > 0.$$

Функция $\underline{\Pi}(x,y,\tau)$ находится в явном виде:

$$\underline{\Pi}(x,y,\tau) =$$
$$= \frac{\sqrt{\frac{9}{5}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi^0(x,y)\exp(-\frac{9}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau)}{\left[\frac{9}{5}\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x,y,0) + \left(\Pi^0(x,y)\right)^2\left(1-\exp(-9\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad (55)$$

и дает оценку снизу для $\Pi_0(x,y,\tau)$:

$$\Pi_0(x,y,\tau) \geqslant \underline{\Pi}(x,y,\tau) \geqslant c\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-\frac{9}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau\right)}{\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-9\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$
$$(x,y)\in\bar{g} \quad \tau \geqslant 0.$$

Выражение (55) для $\underline{\Pi}(x,y,\tau)$ аналогично выражению (53) для $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$, с тем лишь отличием, что в показателях экспонент стоят другие числовые коэффициенты, а это означает, что функция $\underline{\Pi}(x,y,\tau)$ ведет себя в пограничном слое таким же образом, как и функция $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$, т. е. имеет одинаковое с $\bar{\Pi}(x,y,\tau)$ поведение в трех зонах пограничного слоя.

Таким образом, оценки сверху и снизу для $\Pi_0(x,y,\tau)$ подтверждают сказанное выше о пограничном слое в данной задаче. Пограничный слой имеет в окрестности начального момента времени три зоны : в первой зоне функция $\Pi_0(x,y,\tau)$ убывает с ростом τ степенным образом как $\frac{1}{\sqrt{1+\tau}}$, затем во второй зоне происходит изменение масштаба погранслойной переменной и характера убывания, и, наконец в третьей зоне функция $\Pi_0(x,y,\tau)$ убывает экспоненциально:

$$\Pi_0 = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)\exp(-\varkappa\tilde{\tau}),$$

где $\tilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{4/3}}$. Достоинство функции $\Pi_0(x,y,\tau)$, которую мы определили как решение задачи (51), (52), состоит в том, что она описывает поведение решения во всех зонах пограничного слоя. Как будет видно из дальнейшего, следующие члены погранслойного ряда (49) имеют такое же поведение, как и $\Pi_0(x, y, \tau)$.

Чтобы получить уравнения для функций $\Pi_i(x, y, \tau)$, $i \geqslant 1$, перепишем равенство (50) в развёрнутом виде (учитывая, что $t = \varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau}$):

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau) = -h(x,y,\varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau})\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau)\right)^3 + \right.$$
$$+ 3\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\bar{u}_j(x,y,\varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau})\right)^2\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau)\right) +$$
$$\left. +3\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\bar{u}_j(x,y,\varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau})\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau)\right)^2\right] + \varepsilon\left[f_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\bar{u}_j(x,y,\varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau), x, y, \varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau}, \varepsilon\right) - f_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{j}{3}}\bar{u}_j(x,y,\varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau}), x, y, \varepsilon^{\frac{4}{3}}\tilde{\tau}, \varepsilon\right)\right] +$$
$$+ \varepsilon^2\Delta\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{i}{3}}\Pi_i(x,y,\tau)\right). \quad (56)$$

Из этого равенства будем извлекать уравнения для функций $\Pi_i(x, y, \tau)$ не стандартным способом аналогично тому, как мы это делали в п. 2.3. Функцию $\Pi_i(x, y, \tau)$, $i = 1, 2, \ldots$ определим как решение задачи:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = -\alpha(x, y, \tau, \varepsilon)\Pi_i + \pi_i(x, y, \tau, \varepsilon), \quad \tau > 0, \quad (57)$$
$$\Pi_i(x, y, 0) = -\bar{u}_i(x, y, 0), \quad (58)$$

где

$$\alpha(x, y, \tau, \varepsilon) = 3h(x, y, 0)\left(\Pi_0(x, y, \tau) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x, y, 0)\right)^2, \quad (59)$$

а $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ выражаются рекуррентно через функции $\Pi_j(x, y, \tau)$ с номерами $j < i$. В состав $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ нужно включить те коэффициенты при $\varepsilon^{i/3}$ в разложении Πf (см. (56)), оценки которых по модулю содержат не менее трёх сомножителей $|\Pi_k|$, $|\Pi_m|$, $|\Pi_n|$, $k + m + n \leq i$, $k < i$, $m < i$, $n < i$, а также умноженные на $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ коэффициенты при $\varepsilon^{(i+1)/3}$, оценки которых содержат два таких сомножителя, и умноженные на $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ коэффициенты при $\varepsilon^{(i+2)/3}$, оценки которых содержат только один сомножитель $|\Pi_k|$, $k < i$, и после этого нужно заменить аргумент $\tilde{\tau}$ на $\varepsilon^{\frac{2}{3}}\tau$. Кроме того, в состав $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ нужно включить при $i \geqslant 4$ слагаемое $\varepsilon^{\frac{2}{3}}\Delta\Pi_{i-4}$, представляющее собой умноженный на $\varepsilon^{2/3}$ коэффициент при $\varepsilon^{\frac{i+2}{3}}$ в разложении члена $\varepsilon^2\Delta\Pi$ (см. (56)).

В качестве примера отметим, что формирование функции $\pi_1(x,y,\tau,\varepsilon)$ по указанному принципу даёт следующее выражение:

$$\pi_1(x,y,\tau,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{2}{3}}[-6h(x,y,0)\bar{u}_1(x,y,0)\bar{u}_2(x,y,0)\Pi_0(x,y,\tau)+ \\ + f_1(\varphi(x,y,0)+\Pi_0(x,y,\tau),x,y,0,0) - f_1(\varphi(x,y,0),x,y,0,0)]- \\ - 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[h(x,y,0)\bar{u}_2(x,y,0)\Pi_0^2(x,y,\tau)\right],$$

поскольку выражение в первых квадратных скобках не превосходит величины $c\Pi_0(x,y,\tau)$, а выражение во вторых квадратных скобках не превосходит величины $c\Pi_0^2$.

Как будет показано ниже, указанная процедура формирования функций $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ позволяет получить единообразную оценку пограничных функций $\Pi_i(x,y,\tau)$ и функций $\Delta\Pi_i(x,y,\tau)$, $i=0,1,2,\ldots$:

$$|\Pi_i(x,y,\tau)| \le c\Pi_\varkappa(x,y,\tau),\ |\Delta\Pi_i(x,y,\tau)| \le c\Pi_\varkappa(x,y,\tau),\quad (x,y)\in\bar{g},\quad \tau\geqslant 0, \tag{60}$$

где функция $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$ имеет вид:

$$\Pi_\varkappa(x,y,\tau) = \exp\Big(-h(x,y,0)\int\limits_0^\tau \Big(\Pi_0^2(x,y,s) + 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi_0(x,y,s)\Big)\,ds- \\ - 2\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa\tau\Big). \tag{61}$$

Сравним выражение для $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$ с выражением для $\Pi_0(x,y,\tau)$, которое следует из (51), (52):

$$\Pi_0(x,y,\tau)=\Pi^0(x,y)\exp\Big(-h(x,y,0)\int\limits_0^\tau\Big(\Pi_0^2(x,y,s) + 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x,y,0)\Pi_0(x,y,s)\Big)\,ds- \\ -3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau\Big). \tag{62}$$

Функция $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$ имеет такой же вид, как $\Pi_0(x,y,\tau)$ в виде (62), с тем лишь отличием, что в (62) перед экспонентой стоит множитель $\Pi^0(x,y)$ и в показателе экспоненты выражения (61) вместо члена

$$-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau$$

стоит

$$-2\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)\tau - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa\tau.$$

В качестве $\varkappa$ берётся некоторое число из интервала

$$0<\varkappa<\varkappa_0 := \min_{(x,y)\in\bar{g}}(h(x,y,0)\bar{u}_1^2(x,y,0)).$$

Число $\varkappa$ в оценках (60) будет различным для различных i, но для упрощения записи все такие числа будем обозначать буквой $\varkappa$.

Заметим, что оценка (60), очевидно, верна при $i = 0$ для любого $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$:

$$\Pi_0(x, y, \tau) \le c\Pi_\varkappa(x, y, \tau). \tag{63}$$

Лемма 2. *Функции $\Pi_i(x, y, \tau)$ и $\Delta\Pi_i(x, y, \tau)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, где n- любое фиксированное натуральное число, имеют оценки (60).*

Доказательство. Для $\Pi_0(x, y, \tau)$ оценка верна (см. (63)).

Оценка вида (60) для $\Delta\Pi_0(x, y, \tau)$ получается таким же образом, как в лемме 1. Далее по индукции.

Допустим, что оценки (60) верны для $\Pi_j(x, y, \tau)$ и $\Delta\Pi_j(x, y, \tau)$ при $j < i$. Тогда, учитывая принцип формирования неоднородности $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$ в уравнении (57) и очевидное для любого $k > 0$ неравенство

$$\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\tau\right)^k \Pi_\varkappa(x, y, \tau) \le c\Pi_\varkappa(x, y, \tau)$$

(с разными $\varkappa$ в левой и правой частях неравенства) приходим к оценке вида (3.20) для $\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)$:

$$|\pi_i(x, y, \tau, \varepsilon)| \le c\left(\Pi^3_\varkappa(x, y, \tau) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\,\Pi^2_\varkappa(x, y, \tau) + \varepsilon^{\frac{2}{3}}\,\Pi_\varkappa(x, y, \tau)\right). \tag{64}$$

Решение задачи (57), (58) запишем в виде:

$$\Pi_i(x, y, \tau) =$$
$$= -\Phi(x, y, \tau)\Phi^{-1}(x, y, 0)\bar{u}_i(x, y, 0) + \int_0^\tau \Phi(x, y, \tau)\Phi^{-1}(x, y, s)\pi_i(x, y, s, \varepsilon)ds, \tag{65}$$

где

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau} = -h(x, y, 0)\left(\Pi_0^3 + 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0^2 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x, y, 0)\Pi_0\right). \tag{66}$$

Так как

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -h(x, y, 0)\left(3\Pi_0^2 + 6\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0 + 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2(x, y, 0)\right)\Phi,$$

то $\Phi(x, y, \tau)$ можно записать в виде

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi(x, y, 0)\exp\Big(-h(x, y, 0)\int_0^\tau\Big(3\Pi_0^2(x, y, s) + 6\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1(x, y, 0)\Pi_0(x, y, s)\Big)ds -$$
$$-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h(x, y, 0)\bar{u}_1^2(x, y, 0)\tau\Big). \tag{67}$$

Из (66) следует, что $\Phi(x,y,\tau)$ удовлетворяет неравенству:

$$|\Phi(x,y,\tau)| \le c\Pi_0(x,y,\tau), \quad (x,y)\in\bar{g}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{68}$$

В силу (68) и (63) первое слагаемое в выражении (65) для $\Pi_i(x,y,\tau)$ имеет оценку вида (60). Покажем, что второе слагаемое имеет такую же оценку.

Используя (64), получаем:

$$\begin{gathered}\left|\int_0^\tau \Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)\pi_i(x,y,s,\varepsilon)ds\right| \le \\ \le c\int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\Pi_\varkappa^3(x,y,s)ds + \\ +c\int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\varepsilon^{\frac{1}{3}}\Pi_\varkappa^2(x,y,s)ds + \\ +c\int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\varepsilon^{\frac{2}{3}}\Pi_\varkappa(x,y,s)ds = \\ = c\left(I_1+I_2+I_3\right).\end{gathered}$$

Оценим в отдельности каждую из функций I_i $(i=1,2,3)$.

В силу (66), (67) и (61) для I_1 получаем (для краткости записи пишем h вместо $h(x,y,0)$, $\bar{u}_1$ вместо $\bar{u}_1(x,y,0)$, $\Phi(0)$ вместо $\Phi(x,y,0)$, Π_0 вместо $\Pi_0(x,y,s)$ и $\Pi_0(x,y,\xi)$ в зависимости от переменной, по которой интегрируем):

$$\begin{gathered}I_1 = \int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\Pi_\varkappa^3(x,y,s)ds = \\ = h\Pi_0(x,y,\tau)\left(\Pi_0^2(x,y,\tau)+3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\tau)+3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2\right)\times \\ \times\int\limits_0^\tau |\Phi(0)|^{-1}\exp\left(h\int\limits_0^s\left(3\Pi_0^2+6\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0\right)d\xi+3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)\times \\ \times\exp\left(-h\int\limits_0^s\left(3\Pi_0^2+9\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0\right)d\xi-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa s\right)ds \le \\ \le c\Pi_0(x,y,\tau)\Big[(\Pi_0^2(x,y,\tau)+3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\tau)+3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2)\times \\ \times\int\limits_0^\tau \exp\Big(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\Big)ds\Big].\end{gathered}$$

Докажем теперь, что каждое слагаемое в квадратных скобках является ограниченной функцией.

Первое слагаемое:

$$\Pi_0^2(x,y,\tau)\int\limits_0^\tau \exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi - 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds \le$$

$$\le \bar{\Pi}_0^2(x,y,\tau)\int\limits_0^\tau \exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi - 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds \le$$

$$\le c\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}\exp\left(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2\tau\right)}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}+1-\exp\left(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2\tau\right)}\int\limits_0^\tau \exp\left(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds \le$$

$$\le c_1\frac{1-\exp\left(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2\tau\right)}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}+1-\exp\left(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2\tau\right)} \le c_2;$$

второе слагаемое:

$$3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\tau)\int\limits_0^\tau \exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi - 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds \le$$

$$\le \frac{1}{h}\int\limits_0^\tau \left(3\varepsilon^{\frac{1}{3}}h\bar{u}_1\Pi_0(x,y,s)\right)\exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi\right)ds =$$

$$= -\frac{1}{h}\int\limits_0^\tau d\left(\exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(1-\exp\left(-h\int\limits_0^\tau 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi\right)\right) \le c_3;$$

третье слагаемое:

$$3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2\int\limits_0^\tau \exp\left(-h\int\limits_0^s 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}\bar{u}_1\Pi_0(x,y,\xi)d\xi - 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds \le$$

$$\le 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}\bar{u}_1^2\int\limits_0^\tau \exp\left(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)ds = \frac{1}{h}\left(1-\exp\left(-3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2\tau\right)\right) \le c_4.$$

Из этих неравенств для трёх слагаемых следует оценка для I_1:

$$I_1 \le c\Pi_0(x,y,\tau).$$

Перейдём к оценке I_2:

$$I_2 = \int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\varepsilon^{\frac{1}{3}}\Pi_\varkappa^2(x,y,s)ds \leq c\Pi_0(x,y,\tau)\int_0^\tau \varepsilon^{\frac{1}{3}}\frac{\Pi_\varkappa^2(x,y,s)}{\Pi_0(x,y,s)}ds.$$

Так как (см. (61), (62) и (54))

$$\frac{\Pi_\varkappa^2(x,y,s)}{\Pi_0(x,y,s)} = \frac{\Pi_\varkappa^2(x,y,s)}{\Pi_0^2(x,y,s)}\Pi_0(x,y,s) \leq \exp\left(2\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left(h\bar{u}_1^2 - \varkappa\right)s\right)\bar{\Pi}(x,y,s) \leq$$

$$\leq c\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left(h\bar{u}_1^2 + 2\varkappa\right)s\right)}{\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-6\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\bar{u}_1^2 s\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq c\frac{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1 s\right)}{\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1 s\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

где $\varkappa_1 = h\bar{u}_1^2 + 2\varkappa$, то

$$\int_0^\tau \varepsilon^{\frac{1}{3}}\frac{\Pi_\varkappa^2(x,y,s)}{\Pi_0(x,y,s)}ds \leq c\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1 s\right)}{\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1 s\right)\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2c}{\varkappa_1}\left[\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - \exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1 s\right)\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^\tau \leq c_5.$$

Поэтому

$$I_2 \leq c\Pi_0(x,y,\tau).$$

И, наконец, получим оценку для I_3:

$$I_3 = \int_0^\tau |\Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)|\varepsilon^{\frac{2}{3}}\Pi_\varkappa(x,y,s)ds \leq$$

$$\leq c\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\int_0^\tau \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{\Pi_0(x,y,\tau)}{\Pi_\varkappa(x,y,\tau)}\frac{\Pi_\varkappa(x,y,s)}{\Pi_0(x,y,s)}ds \leq$$

$$\leq c\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\int_0^\tau \varepsilon^{\frac{2}{3}}\exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left(h\bar{u}_1^2 - \varkappa\right)(\tau - s)\right)ds =$$

$$= \frac{c}{\varkappa_1}\Pi_\varkappa(x,y,\tau)\left(1 - \exp\left(-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varkappa_1\tau\right)\right) \leq c_6\Pi_\varkappa(x,y,\tau),$$

где $\varkappa_1 = h\bar{u}_1^2 - \varkappa > 0$.

Следовательно,

$$\left|\int_0^\tau \Phi(x,y,\tau)\Phi^{-1}(x,y,s)\pi_i(x,y,s,\varepsilon)ds\right| \leq c(I_1 + I_2 + I_3) \leq c\Pi_\varkappa(x,y,\tau).$$

Таким образом, $\Pi_i(x,y,\tau)$ имеет оценку (60). Оценка вида (60) для $\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial x^2}(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial y^2}(x,y,\tau)$ при $i = 1,2,\ldots$ получается таким же образом, как была получена оценка для $\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}(x,y,\tau)$ в п. 2.3. Стоит лишь отметить, что в состав $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ при $i \geqslant 4$ мы включаем слагаемое $\varepsilon^{\frac{2}{3}}\Delta\Pi_{i-4}$, следовательно, после дифференцирования дважды по x или по y уравнения (57), в состав неоднородности уравнения войдут слагаемые, содержащие производные третьего и четвёртого порядков функций $\Pi_{i-4}(x,y,\tau)$. Оценки вида (60) для этих производных получаются аналогично тому, как были получены оценки для производных $\frac{\partial\Pi_0}{\partial x}(x,y,\tau)$ и $\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial x^2}(x,y,\tau)$ в п. 2.3. Лемма 2 доказана.

Замечание. Мы рассматриваем случай, когда $\bar{f}_1(x,y,t) > 0$ в области $\bar{\Omega}$. Если $\bar{f}_1(x,y,t) < 0$ в области $\bar{\Omega}$, то $\Pi^0(x,y) < 0$ (см. условие A_4'), $\bar{u}_1(x,y,t) < 0$ (см. (48)), поэтому $\Pi_0(x,y,\tau) < 0$ при $\tau \geqslant 0$, и все слагаемые в круглых скобках в правой части уравнения (51) отрицательны. В силу этого оценки сверху и снизу для $\Pi_0(x,y,\tau)$ и оценки вида (60) получаются таким же образом, как в рассматриваемом случае.

Оценки (60) и тот факт, что функция $\Pi_\varkappa(x,y,\tau)$ ведет себя таким же образом, как и $\Pi_0(x,y,\tau)$, означают, что все члены погранслойного ряда $\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)$ характеризуются одинаковым поведением (таким же, как описанное выше поведение $\Pi_0(x,y,\tau)$), т.е в первой зоне пограничного слоя они убывают с ростом τ степенным образом, затем во второй (переходной) зоне происходит изменение масштаба погранслойной переменной, и, наконец в третьей зоне убывание функций Π_i имеет экспоненциальный характер: $\Pi_i = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp(-\varkappa\tilde{\tau})\right)$, $\tilde{\tau} = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}$.

3.4. Для построения ряда

$$Q(\rho,l,t,\varepsilon) = \varepsilon^{2/3}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/3}Q_i(\rho,l,t)$$

перейдем в окрестности границы ∂g области g к новым (локальным) координатам (аналогичным образом, как это было сделано в п. 2.4.). Коэффициент растяжения погранслойной переменной ρ возьмем равным $\varepsilon^{2/3}$ (а не $\varepsilon^{3/4}$, как в случае двукратного корня вырожденного уравнения (см. раздел 2)), т. е. $\rho = \frac{r}{\varepsilon^{2/3}}$.

В переменных ρ, l оператор $\varepsilon^2\Delta$ имеет вид

$$\varepsilon^2\Delta = \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \varepsilon^2\theta(\varepsilon^{2/3}\rho,l)\frac{\partial^2}{\partial l^2} + \varepsilon^{\frac{4}{3}}\vartheta(\varepsilon^{2/3}\rho,l)\frac{\partial}{\partial\rho} + \varepsilon^2\phi(\varepsilon^{2/3}\rho,l)\frac{\partial}{\partial l} = \\ = \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{2j+2}{3}}L_j,$$

где функции θ, ϑ, ϕ выражаются такими же формулами, как в п. 2.4, L_i — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от ρ, l, содержащие операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$.

С помощью равенства

$$\varepsilon^{\frac{2}{3}}\,\frac{\partial^2 Q}{\partial\rho^2} = -Qf - \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{\frac{2j+2}{3}}L_jQ + \varepsilon^2\frac{\partial Q}{\partial t},$$

в котором

$$Qf = f(\bar{u}(\varepsilon^{2/3}\rho, l, t, \varepsilon) + Q(\rho, l, t, \varepsilon), \varepsilon^{2/3}\rho, l, t, \varepsilon) - f(\bar{u}(\varepsilon^{2/3}\rho, l, t, \varepsilon), \varepsilon^{2/3}\rho, l, t, \varepsilon),$$

для функций $Q_i(\rho, l, t)$ стандартным образом получаются задачи (l, t входят как параметры, $0 \le l \le l_0,\ 0 \le t \le T$):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \rho^2} - \beta^2(l,t) Q_i = q_i(\rho, l, t), \quad \rho > 0,\\ \frac{\partial Q_i}{\partial \rho}(0, l, t) = -\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial r}(0, l, t), \quad Q_i(\infty, l, t) = 0,\end{gathered} \tag{69}$$

где $\beta(t) = [3h(0, l, t)\bar{u}_1^2(0, l, t)]^{1/2} > 0$, а $q_i(\rho, l, t)$ рекуррентно выражаются через $Q_j(\rho, l, t)$ с номерами $j < i$, в частности $q_0(\rho, l, t) = 0$.

Все функции $Q_i(\rho, l, t)$ можно последовательно найти в явном виде, в частности, $Q_0(\rho, l, t)$ выражается формулой (29), все $Q_i(\rho, l, t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $\rho \longrightarrow \infty$.

3.5. Угловой погранслойный ряд построим в виде

$$P(\rho, l, \tau, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/3} P_i(\rho, l, \tau).$$

Уравнения для функций $P_i(\rho, l, \tau)$ извлекаются из равенства

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \varepsilon^{2/3}\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = Pf + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{2j+2}{3}} L_j P \tag{70}$$

и имеют вид (l входит как параметр, $0 \le l \le l_0$):

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\ \frac{\partial^2 P_i}{\partial \rho^2} + \alpha(0, l, \tau, \varepsilon) P_i = p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon), \quad \rho > 0,\ \tau > 0, \tag{71}$$

а начальные и граничные условия зададим в виде

$$P_i(\rho, l, 0) = \begin{cases} -Q_{i-1}(\rho, l, 0),\ i \geqslant 1, \\ 0,\ i = 0. \end{cases} \tag{72}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho}(0, l, \tau) = \begin{cases} -\frac{\partial \Pi_{i-1}}{\partial r}(0, l, \tau),\ i \geqslant 1, \\ 0,\ i = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Коэффициент $\alpha(0, l, \tau, \varepsilon)$ определен формулой (59), а функции $p_i(\rho, l, \tau, \varepsilon)$ рекуррентно выражаются через $P_j(\rho, l, \tau)$ с номерами $j < i$, а также через Π_j и Q_j с номерами $j \le i$, в частности,

$$\begin{aligned}&p_0(\rho, l, \tau, \varepsilon) = \\ &= -3\varepsilon^{\frac{1}{3}} h(0, l, 0)\Pi_0^2(0, l, \tau) Q_0(\rho, l, 0) - 6\varepsilon^{\frac{2}{3}} h(0, l, 0)\bar{u}_1(0, l, 0)\Pi_0(0, l, \tau) Q_0(\rho, l, 0).\end{aligned}$$

Отметим, что начальное (72) и граничное (73) условия согласованы в точках кривой $\{\partial g \times (t=0)\}$. При $i=0$ это следует непосредственно из (72) и (73), а при $i=1$ имеем равенства (см. (69)):

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\,P_1(\rho,l,0)|_{\rho=0} = -\frac{\partial Q_0}{\partial \rho}(0,l,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0,l,0)$$

и (см. (73), (47) и (52))

$$\frac{\partial P_1}{\partial \rho}(0,l,0) = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}(0,l,0) = -u_x^0(0,l) + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0,l,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(0,l,0),$$

которые и означают согласованность начального и граничного условий (72) и (73) при $i=1$.

Нетрудно проверить согласованность начального и граничного условий при любом $i>1$.

При формировании правых частей $p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon)$ уравнений (71) при $i=1,2,\dots$ нужно включать в состав $p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon)$ не только коэффициенты при $\varepsilon^{(i+1)/3}$ в разложении Pf по степеням $\varepsilon^{1/3}$, но также некоторые коэффициенты при $\varepsilon^{(i+2)/3}$ (умноженные на $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$) и некоторые коэффициенты при $\varepsilon^{(i+3)/3}$ (умноженные на $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$), аналогично тому, как это делалось при формировании правых частей $\pi_i(x,y,\tau,\varepsilon)$ уравнений (57), и после этого заменить $\tilde{\tau}$ на $\varepsilon^{2/3}\tau$. Кроме того, при $i \geqslant 2$ в состав $p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon)$ нужно включить слагаемые $\varepsilon^{2/3}\sum_{2j+k=i} L_j P_k$ при $j \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, извлекаемые из последнего члена в правой части (70). Это позволяет получить для функций $p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon)$ оценку

$$|p_i(\rho,l,\tau,\varepsilon)| \le c\left[\Pi_\varkappa^3(0,l,\tau) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\Pi_\varkappa^2(0,l,\tau) + \varepsilon^{\frac{2}{3}}\Pi_\varkappa(0,l,\tau)\right]\exp(-\varkappa\rho), \qquad (74)$$

что в свою очередь обеспечивает единообразную оценку угловых функций $P_i(\rho,l,\tau)$, $i=0,1,2,\dots$:

$$|P_i(\rho,l,\tau)| \le c\Pi_\varkappa(0,l,\tau)\exp(-\varkappa\rho), \quad i=0,1,2,\dots,\ \rho \geqslant 0, \tau \geqslant 0.$$

Например, при таком подходе функция $p_1(\rho,l,\tau,\varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{aligned} p_1(\rho,l,\tau,\varepsilon) = -3h\left[2\Pi_0\Pi_1 P_0 + P_0^2\Pi_0\right] - 3\varepsilon^{\frac{1}{3}}h\left[\bar{u}_1 P_0^2 + 2\Pi_0\Pi_1 Q_0 + \Pi_0^2 Q_1 + \right.\\ \left. +2\bar{u}_2 P_0\Pi_0 + 2\bar{u}_1 P_0\Pi_1 + 2\Pi_0 Q_0 P_0\right] - 3\varepsilon^{\frac{2}{3}}h\left[\Pi_0 Q_0^2 + 2\bar{u}_1\bar{u}_2 P_0 + 2\bar{u}_1 P_0 Q_0 + 2\bar{u}_1\Pi_0 Q_1 + \right.\\ \left. + 2\bar{u}_2 Q_0\Pi_0 + 2\bar{u}_1 Q_0\Pi_1 - \frac{1}{3}h^{-1} f_{1u}(\varphi(0,l,0) + \Pi_0(0,l,\tau),0,l,0,0)P_0\right], \quad (75) \end{aligned}$$

где $h=h(0,l,0)$, $\bar{u}_1=\bar{u}_1(0,l,0)$, $\bar{u}_2=\bar{u}_2(0,l,0)$.

В силу (74) для функций $P_i(\rho,l,\tau)$, $i=0,1,2,\dots$, получается оценка вида

$$|P_i(\rho,l,\tau)| \le c\Pi_\varkappa(0,l,\tau)\exp(-\varkappa\rho).$$

Нетрудно показать, что такие же оценки имеют производные $\frac{\partial P_i}{\partial \rho}$, $\frac{\partial P_i}{\partial l}$, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial l^2}$.

3.6. Теорема об асимптотике решения.

Теорема 2. *Если выполнены условия A_1'–A_4', то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x,y,t,\varepsilon)$, для которого построенный ряд (5) является асимптотическим рядом, т. е. для любого целого $n \geq 0$ справедливо равенство*

$$u(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right) := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/3}(\bar{u}_i(x,y,t) + \Pi_i(x,y,\tau)) +$$

$$+ \varepsilon^{2/3} \sum_{i=0}^{n-2} \varepsilon^{i/3} Q_i(\rho,l,t) + \varepsilon^{1/3} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i/3} P_i(\rho,l,\tau) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}\right), \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega}. \quad (76)$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, т. е. путём построения подходящих нижнего и верхнего решений, которые можно взять в виде

$$\underline{U}(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) - \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} z(r,\varepsilon), \quad \overline{U}(x,y,t,\varepsilon) = U_n(x,y,t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} z(r,t),$$

где $z(r,\varepsilon) = M + \exp\left(-k\frac{r}{\varepsilon^{2/3}}\right)\sigma(r)$, $\sigma(r)$ — срезающая функция.

Как и при доказательстве теоремы 1, нетрудно доказать, что для достаточно больших положительных чисел M и k и достаточно малых ε функции $\underline{U}$ и $\overline{U}$ являются нижним и верхним решениями задачи (1)–(3), и, значит, существует решение $u(x,y,t,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам (40), откуда и следует равенство (75).

4. Заключение

Рассмотренные в статье сингулярно возмущенные параболические начально-краевые задачи относятся к тому случаю, когда соответствующее вырожденное уравнение, получающееся из исходного уравнения, если положить малый параметр равным нулю, имеет двукратный или трёхкратный корень. Это обстоятельство приводит к существенным отличиям в асимптотике погранслойного решения задачи от случая простого корня вырожденного уравнения. Перечислим ещё раз основные отличия (они отмечались по ходу построения асимптотики).

1. Асимптотическое разложение решения ведётся по дробным степеням малого параметра, а не по целым степеням, как в случае простого корня. Эти дробные степени и также масштабы погранслойных переменных зависят от кратности корня.

2. Известный алгоритм А.Б. Васильевой [8,1] построения погранслойной части асимптотики в случае простого корня вырожденного уравнения становится непригодным и требует принципиальной модификации. В первую очередь это относится к П-функциям, описывающим погранслойное поведение решения

в окрестности начального момента времени. Претерпевает также существенное изменение стандартный алгоритм построения угловых погранслойных P-функций [9-11]. Как П-функции, так и P-функции, характеризуются различным поведением в трёх зонах пограничного слоя, а погранслойная временная переменная имеет разные масштабы в разных зонах. В отличие от случая простого корня вырожденного уравнения эталонной (оценочной) функцией для П-функций является теперь не $\exp(-\varkappa\tau)$, где τ — погранслойная переменная, а функция $\Pi_{\varkappa}(\tau)$ (см. (21) и (60)), дающая правильную оценку характера убыванияП-функций в разных зонах. Достоинство предложенного алгоритма построения П- и P-функций состоит в том, что он даёт возможность построить пограничные функции не раздельно по зонам пограничного слоя (как это делается в известном методе сращивания асимптотических разложений [5]), а единые пограничные функции, пригодные во всех зонах пограничного слоя.

3. В отличие от случая простого корня вырожденного уравнения принципиальную роль в вопросах существования погранслойного решения и построения его асимптотики играют малые члены порядка ε, входящие в правую часть уравнения (условия A_1 в п. 2.1 и A_1' в п. 3.1).

4. Обоснование построенной асимптотики проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого в сингулярно возмущенных задачах с кратными корнями вырожденного уравнения также имеет определенные особенности.

Отметим, что ряд других сингулярно возмущенных задач с кратными корнями вырожденного уравнения рассматривались в работах [12-17].

Дальнейшим этапом исследования сингулярно возмущенных задач указанного типа является рассмотрение систем уравнений в частных производных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк. 1990.

2. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. Об одном сингулярно возмущённом уравнении параболического типа // Вестник Моск. ун-та. Сер. вычисл. математики и киберн. 1973. №2. С. 49–56.

3. Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F. Singularly perturbed differential equations of parabolic type // Lecture Notes in Mathematics 985, Asymptotic Analysis II. 1983. Springer-Verlag. pp. 38–75.

4. Бутузов В. Ф., Бычков А. И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, №10. С. 1295–1307.

5. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
6. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных// Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №4, С. 719–722.
7. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press. 1992.
8. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновен-ных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, №3. С. 15–86.
9. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, №9. С. 1654–1660.
10. Бутузов В. Ф. Угловой погранслой в сингулярно возмущённых задачах с частными производными // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, №10. С. 1848–1862.
11. Денисов И. В. Угловой погранслой в нелинейных сингулярно возмущённых эллиптических задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. №1. С. 62–79.
12. Бутузов В. Ф. О периодических решениях сингулярно возмущённых параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. №1. С. 44–55.
13. Бутузов В. Ф. Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущённых задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. замет-ки. 2013. Т. 94, вып. 1. С. 68–80.
14. Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schnieder K. R. On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation // Nonlinear Analysis. 83. (2013). pp. 1–11.
15. Белошапко В. А., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенная эллиптическая задача в случае кратного корня вырожденного уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, №8. С. 65–75.
16. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, №2. С. 175–186.
17. Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенная краевая задача с многозначным внутренним переходным слоем // Моделирование и анализ информ. систем. 2015. Т. 22, №1. С. 5–22.

REFERENCES

1. Vasil'eva, A. B. & Butuzov, V. F. 1990, "Asymptotic Methods in the Singular Perturbation Theory", *Moscow: Vyssh. Shkola.* (In Russian)

2. Butuzov V. F. & Nesterov A. V. 1973, "On a singularly perturbed parabolic equation", *Vestnik Moskovskogo Universiteta.*, vol. 2, pp. 49–56. (In Russian)

3. Vasil'eva, A. B. & Butuzov, V. F. 1983, "Singularly perturbed differential equations of parabolic type", *Lecture Notes in Mathematics 985, Asymptotic Analysis II. Springer-Verlag*, pp. 38–75.

4. Butuzov V. F. & Bychkov A. I. 2013, "Asymtotics of the Solution of an Initial-Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Parabolic Equation in the Case of Double Root of the Degenerate Equation", *Differential Equations*, vol. 49, pp. 1–13. (English. Russian original)

5. Il'in A. M. 1989, "Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems", *Nauka, Moscow.* (In Russian)

6. Nefedov N. N. 1995, "The method of differential inequalities for some classes of nonlinear singularly perturbed problems in partial derivatives", *Differential Equations*, vol. 31, no. 4, pp. 719–722. (In Russian)

7. Pao C. V. 1992, "Nonlinear parabolic and elliptic equations", *New York: Plenum Press.*

8. Vasil'eva, A. B. 1963, "The asymptotic behavior of solutions of some problems for nonlinear ordinary differential equations with a small parameter at the highest derivative", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 18, no. 3. pp. 15–86. (In Russian)

9. Butuzov V. F. 1973, "The asymptotic solution of the equation $\mu^2\Delta u - k^2(x,y)u = = f(x,y)$ in a rectangular area", *Differential Equations*, vol. 9, no. 9. pp. 1654–1660. (In Russian)

10. Butuzov V. F. 1979, "The angular boundary layer in singularly perturbed problems with partial derivatives", *Differential Equations*, vol. 15, no. 10. pp. 1848–1862. (In Russian)

11. Denisov I. V. 2008, "Corner boundary layer in nonlinear singularly perturbed elliptic problems", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 48, no. 1. pp. 62–79. (In Russian)

12. Butuzov V. F. 2011, "On Periodic Solutions to Singularly Perturbed Parabolic Problems in the Case of Multiple Roots of the Degenerate Equation", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 51, no. 1, pp. 44–55. (English. Russian original)

13. Butuzov V. F. 2013, “On Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation“, *Mathematical Notes*, vol. 94, no. 1. pp. 68–80. (English. Russian original)

14. Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L. & Schnieder K. R. 2013, “On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation“, *Nonlinear Analysis*, vol. 83, pp. 1–11.

15. Beloshapko V. A. & Butuzov V. F. 2013, “A Singularly Perturbed Elliptic Problem in the Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation“, *Differential Equations*, vol. 53, no. 8, pp. 65–75. (English. Russian original)

16. Butuzov V. F. 2014, “Asymptotics of the Solution of a System of Singularly Perturbed Equations in the Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation“, *Differential Equations*, vol. 50, no. 2, pp. 175–186. (English. Russian original)

17. Butuzov V. F. 2015, “A singularly perturbed boundary value problem with a multi-valued internal transition layer“, *Modeling and Analysis of Information Systems (MAIS)*, vol. 22, no. 1, pp. 5–22. (In Russian)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Поступило 30.10.15.