

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349

Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация

Для гипопругих анизотропных материалов выписаны определяющие соотношения нелинейной упругости, устанавливающие связь между обобщенными яуманновскими производными тензора напряжений и неголономной меры деформаций, введенной в работах А.А. Маркина. Связь конкретизирована для анизотропных материалов с кубической симметрией свойств. Соотношения записаны в проекциях в упругие собственные подпространства кубического материала. Проведен анализ взаимного влияния процессов конечного деформирования, принадлежащих различным собственным подпространствам.

Рассмотрены процессы деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, положение которых относительно главных осей анизотропии не изменяется. Для таких процессов выписаны упругие потенциалы для двух моделей материалов: общей, содержащей девять упругих констант, и модели, удовлетворяющей обобщению частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, содержащей шесть констант.

Приведены результаты решения задачи о распространении акустических волн в гипопругих анизотропных материалах с кубической симметрией свойств. В качестве начальных деформаций материала рассмотрены деформации, целиком расположенные в его упругих собственных подпространствах: чисто объемная деформация, растяжение-сжатие в главных осях анизотропии, чистый сдвиг в плоскости главных осей анизотропии. Предварительные конечные чисто объемные деформации не оказывают влияния на форму угловых зависимостей фазовых скоростей распространения волн в вертикальной плоскости, а влияют только на величины фазовых скоростей. При предварительном формоизменении материал приобретает дополнительную анизотропию, а форма угловых зависимостей фазовых скоростей изменяется. Результаты показывают, что в некоторых случаях шестиконстантная модель материала не прогнозирует изменение скоростей распространения поперечных волн при начальных конечных деформациях.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, анизотропные материалы, гипопругие материалы, частный постулат А. А. Ильюшина.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипопругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 334–349.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-334-349

Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich

Sokolova Marina Yur'evna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitriy Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract

For hypoelastic anisotropic materials, the constitutive relations of nonlinear elasticity are written out. The relations establish a connection between the generalized Yaumann derivatives of the stress tensor and the nonholonomic strain measure introduced in the works of A. A. Markin. The relation is concretized for anisotropic materials with cubic symmetry of properties. The relations are written in projections into elastic eigen subspaces of a cubic material. The analysis of the mutual influence of finite deformation processes belonging to different eigen subspaces is carried out.

Deformation processes in which the main axes of strains coincide with the same material fibers, whose position relative to the main axes of anisotropy does not change, are considered. Elastic potentials for such processes are written out for two material models: a general one containing nine elastic constants, and a model satisfying the generalization of A. A. Ilyushin particular postulate to anisotropic materials and containing six constants.

The results of solution of the problem of acoustic wave propagation in hypoelastic anisotropic materials with cubic symmetry of properties are presented. As initial strains of a material, deformations located entirely in its elastic eigen subspaces are considered: purely volumetric strain, tension-compression in the main axes of anisotropy, pure shear in the plane of the main axes of anisotropy. Preliminary finite purely volumetric deformations do not affect the shape of the angular dependences of the phase velocities of wave propagation in the vertical plane, but only affect the values of the phase velocities. At preliminary shaping, the material acquires additional anisotropy, and the shape of the angular dependencies of the phase velocities changes. The results show that in some cases, the six-constant model of the material does not predict a change in the propagation velocities of transverse waves at initial finite strains.

Keywords: acoustic waves, finite strains, phase velocities of wave propagation, anisotropic materials, hypoelastic materials, A. A. Ilyushin particular postulate.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, 2024. "Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 334–349.

Введение

Задача о распространении акустических волн в телах из нелинейно упругих анизотропных материалов лежит в основе динамических методов определения констант таких материалов. В работах [1, 2] приведены основные соотношения для определения констант материалов с кубической симметрией свойств по измеренным фазовым скоростям их распространения. В этих работах полагается, что рассматриваемые материалы являются гиперупругими с упругим потенциалом полиномиального типа, построенным по тензору деформаций Коши-Грина.

Тип симметрии свойств анизотропного материала существенно влияет на выражения для фазовых скоростей распространения волн. Анизотропные материалы, относящиеся по типу симметрии свойств к материалам кубической сингонии, наиболее распространены как среди кристаллов, так и среди искусственно созданных композитов. Упругие свойства кубических материалов удовлетворяют условиям симметрии, присущей точечной группе объемно- или гранецентрированного куба. Для кубического кристалла точечные группы симметрии характеризуются наличием трех поворотных осей четвертого порядка, четырех поворотных осей третьего порядка, и шести осей симметрии второго порядка [3]. Модели линейной и нелинейной упругости кубических материалов рассмотрены в работах [4, 5, 6, 7]. Вопросам распространения акустических волн в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств посвящены работы [7, 8].

В данной работе рассматриваются гипопругие анизотропные материалы, в которых постулируется существование связи между объективной скоростью изменения тензора напряжений и тензором деформации скорости. В общем случае для таких материалов упругий потенциал не может быть записан. В статье рассматриваются условия, накладываемые на тензоры упругости, при выполнении которых определяющие соотношения могут быть проинтегрированы, и может быть записан упругий потенциал. Эти условия связаны с использованием гипотезы о вращении главных осей анизотропии при конечных деформациях, предложенной в работе [3].

Ранее в работах [9, 10] в качестве гипотезы, используемой при построении связи между напряжениями и деформациями, было предложено обобщение частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы. В соответствии с этим обобщением проекции тензоров напряжений и деформаций в каждое упругое собственное подпространство анизотропного материала должны быть соосны. Принятие данной гипотезы позволяет существенно сократить число констант, входящих в определяющие соотношения [10]. В данной статье на примере решения задачи о распространении акустических волн в анизотропном материале с кубической симметрией свойств проведен анализ влияния принятия данной гипотезы на результаты вычисления фазовых скоростей распространения продольных и поперечных волн.

1. Гипопругие анизотропные среды

При построении моделей гипопругих анизотропных сред в качестве меры деформаций используем неголономную меру деформаций $\mathbf{Z}$, коротационная производная которой равна тензору деформации скорости $\mathbf{W}$ [9]. Коротационной производной тензора называется его производная относительно ортогонального базиса $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, вращающегося со скоростью $\Omega_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$, где $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ — ортогональный тензор, в каждый момент времени определяющий положение вращающегося базиса относительно неподвижного $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}(t). \quad (1.1)$$

Скорость изменения тензора $\mathbf{Z}$ относительно базиса $\mathbf{n}_i$ связана с абсолютной производной (по времени t) тензора $\mathbf{Z}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Q}^{-1}$ соотношением $\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{Z}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}$, которое можно преобразовать к виду $\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Z}} + \Omega_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \cdot \Omega_{\mathbf{Q}}$. Рассматриваемые неголономные меры деформаций

определяются из дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{Z}}^{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}. \quad (1.2)$$

При описании конечных деформаций анизотропных материалов наиболее простые соотношения получаются, если процесс рассматривается в главных осях анизотропии [9]. При деформации анизотропных материалов главные оси анизотропии могут поворачиваться, образуя ортонормированный триэдр. Такой подход к описанию конечных деформаций анизотропных материалов был предложен в работах [3, 9]. В общем случае можно считать, что триэдр главных осей анизотропии изменяет ориентацию в процессе конечного деформирования, и в каждый момент процесса его ориентация определяется ортогональным тензором $\mathbf{Q}^a(t)$:

$$\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{Q}^a(t), \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{Q}_i|_{t=t_0}$ — тройка главных осей анизотропии в начальный момент процесса.

Для записи определяющих соотношений в главных осях анизотропии в качестве меры конечных деформаций выберем неголономную меру $\mathbf{Z}$, для которой $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{Q}^a(t)$. При этом естественно считать, что $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{e}_i$, т.е. в отсчетной конфигурации неподвижный базис совпадает с главными осями анизотропии. В работах [3, 9] предполагалось, что в процессах конечного деформирования положение осей анизотропии определяется ортогональным тензором $\mathbf{R}$, входящим в полярное разложение аффинора деформаций [9]. В этом случае положение главных осей анизотропии определяется выражением

$$\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{R}(t). \quad (1.4)$$

В случае, когда $\mathbf{Q}^a(t) = \mathbf{R}(t)$, тройка главных осей анизотропии совпадает с полярным базисом $\mathbf{a}_i = \mathbf{n}_i$, а в качестве коротационной производной меры деформаций $\mathbf{Z}$ следует выбрать обобщенную яуманновскую производную этого тензора [9, 11]. Сама неголономная мера деформаций в этом случае совпадает с мерой деформаций $\mathbf{K}$, введенной в работе [11]:

$$\mathbf{K}^\Delta \equiv \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}, \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ — тензор спина, $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}$ — тензор деформации скорости.

Тензоры $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ — левая мера искажений и $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию, входят в полярное разложение аффинора деформаций

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}$ — радиус-векторы произвольной точки среды в отсчетной и текущей конфигурациях.

Определяющие соотношения для гипотупругой анизотропной среды представим в виде связи между обобщенными яуманновскими производными тензора напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ и меры деформаций $\mathbf{K}$ (1.5). Обобщенный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ связан с тензором истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ известным соотношением $\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{S}$, где $J = \det \boldsymbol{\Phi}$ характеризует относительное изменение объема, и является энергетически сопряженным с мерой деформаций $\mathbf{K}$ через выражение для удельной (отнесенной к начальному объему) потенциальной энергии деформаций $dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot d\mathbf{K}^\Delta$.

Запишем нелинейную связь между производными $\boldsymbol{\Sigma}^\Delta$ и $\mathbf{K}^\Delta = \mathbf{W}$ в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma}^\Delta = \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{K}^\Delta, \quad (1.7)$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{K})$ — обобщенный тензор жесткости материала, который рассматривается как функция тензора деформаций $\mathbf{K}$.

Представим обобщенный тензор жесткости анизотропного материала в виде

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ — тензоры четвертого и шестого рангов [9], компоненты которых в базисе главных осей анизотропии обладают свойствами симметрии

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \\ L_{ijklmn} &= L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{klijmn} = L_{mnijkl} = L_{ijmnlk}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полагая компоненты (1.9) постоянными во вращающемся (полярном) базисе (1.1), приходим к требованию:

$$\mathbf{N}^\Delta \equiv 0, \quad \mathbf{L}^\Delta \equiv 0,$$

при выполнении которого соотношения (1.7) могут быть проинтегрированы и представлены в виде:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}, \quad (1.10)$$

а выражение для упругой потенциальной энергии деформаций принимает вид [12]:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{6} \mathbf{L} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}. \quad (1.11)$$

Как и в работах [9, 13, 14], используем представления тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ в виде разложений по собственным базисным тензорам

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \mathbf{N}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} b_\alpha \mathbf{B}^{(\alpha)}, \quad (1.12)$$

где m — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{N}$, совпадающее с количеством независимых констант упругости второго порядка, n — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$, совпадающее с числом независимых констант упругости третьего порядка, $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ — собственные базисные тензоры упругости, различные для материалов с различным типом симметрии упругих свойств.

2. Анизотропные материалы с кубической симметрией свойств

В качестве примера анизотропного материала рассмотрим материалы, по типу симметрии относящиеся к кубической кристаллографической сингонии. Такие материалы будем в дальнейшем называть кубическими. Для таких материалов в работах [9, 12] определены собственные базисные тензоры упругости $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$. Эти тензоры представляются через базисные тензоры различных рангов, построенных на основании канонического тензорного базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где векторы $\mathbf{a}_i$ направлены вдоль главных осей анизотропии материала. Их положение в каждый момент времени определяется соотношением (1.4).

По тензорам (2.1) построены базисные тензоры четвертого $\mathbf{I}^{\alpha\beta}$ и шестого $\mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma}$ рангов

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha), \quad \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha),$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$.

Для кубических материалов $m = 3$, $n = 6$, а собственные базисные тензоры упругости имеют вид

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \quad \mathbf{N}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \quad \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}), \quad \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{I}^{345}.$$

Из представлений (2.2) следует, что тензор упругости кубических материалов имеет три собственных подпространства: одномерное (1D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(1)}$, двумерное (2D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(2)}$ и трехмерное (3D) с базисным тензором $\mathbf{N}^{(3)}$.

Далее будем рассматривать только такие процессы конечного деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. Известно [9], что в этом случае неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ совпадает с тензором логарифмических деформаций Генки $\mathbf{H}$. Найдем проекции тензора деформаций $\mathbf{H}$ в собственные подпространства тензора упругости, характеризующие собственные упругие состояния материала:

$$\begin{aligned} 1D: \quad \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0, \\ 2D: \quad \mathbf{H}^{(2)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2, \\ 3D: \quad \mathbf{H}^{(3)} &= \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{N}^{(3)} = h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где обозначено $h_i = \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{I}^i$.

С учетом свойств тензора логарифмических деформаций Генки $\mathbf{H}$ [9] из соотношений (2.4) и (2.1) следует, что собственными упругими состояниями кубического материала являются чисто объемное деформирование, соответствующее собственному подпространству 1D, формоизменение в главных осях тензора деформаций, соответствующее собственному подпространству 2D, и чистые сдвиги в подпространстве 3D.

Квадраты тензоров $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(3)}$ имеют следующие представления [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{H}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} h_0^2 \mathbf{I}^0, \\ \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{H}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (h_1^2 + h_2^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_2^{(2)}, \quad \mathbf{Q}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (h_1^2 - h_2^2) \mathbf{I}^1 - \sqrt{\frac{2}{3}} h_1 h_2 \mathbf{I}^2, \\ \mathbf{H}^{(3)} \cdot \mathbf{H}^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (h_3^2 + h_4^2 + h_5^2) \mathbf{I}^0 + \mathbf{Q}_2^{(3)} + \mathbf{Q}_3^{(3)}, \\ \mathbf{Q}_2^{(3)} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} (2h_3^2 - h_4^2 - h_5^2) \mathbf{I}^1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} (h_4^2 - h_5^2) \mathbf{I}^2, \\ \mathbf{Q}_3^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} h_4 h_5 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_3 h_5 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_3 h_4 \mathbf{I}^5. \end{aligned}$$

На основании соотношений (1.11), (1.12), (2.2) и (2.3) для кубического материала получено выражение для удельной потенциальной энергии деформаций

$$W = \frac{1}{2} (N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(3)})) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{18\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \left(3b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + 2b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 2b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) + \\
& + \frac{1}{24} (3b_4 - 8b_5) J_3(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} (b_6 - 2b_5) J_3(\mathbf{H}^{(3)}) + \frac{1}{3} b_5 J_3(\mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Используемые в выражении (2.5) инварианты тензоров (2.4) вычисляются по соотношениям $J_1(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \mathbf{H}^{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{E}$; $J_2(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \mathbf{H}^{(\alpha)} \cdot \cdot \mathbf{H}^{(\alpha)}$; $J_3(\mathbf{H}^{(\alpha)}) = \det(\mathbf{H}^{(\alpha)})$. В выражении для упругого потенциала (2.5) $J_3(\mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{H}^{(3)})$ — смешанный инвариант тензоров $\mathbf{H}^{(2)}$ и $\mathbf{H}^{(3)}$, присутствие которого позволяет учитывать взаимное влияние процессов, происходящих в собственных подпространствах $2D$ и $3D$.

Связь между напряжениями и деформациями в собственных подпространствах (2.4) для кубического материала имеет вид:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} &= \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} \left(b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) \right] \mathbf{I}^0, \\
\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} &= \left(N_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_2 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)} + \frac{1}{3} b_4 \mathbf{Q}_2^{(2)} + \frac{1}{3} b_5 \mathbf{Q}_3^{(2)}, \\
\boldsymbol{\Sigma}^{(3)} &= \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_3 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(3)} + \frac{2}{3} b_5 \mathbf{P}^{(3)} + \frac{1}{6} b_6 \mathbf{Q}_3^{(3)},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где тензор $\mathbf{P}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} h_1 h_3 \mathbf{I}^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} h_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 \right) h_4 \mathbf{I}^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} h_2 \right) h_5 \mathbf{I}^5$ обладает свойством: $\mathbf{H}^{(3)} \cdot \cdot \mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{H}^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{Q}_2^{(3)}$.

Анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью анизотропного материала с полиномиальным упругим потенциалом (2.5) при малых деформациях, проведен в работе [15]. Для конечных деформаций, принадлежащих первому собственному подпространству, когда $\mathbf{H}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0$, $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{H}^{(3)} \equiv \mathbf{0}$, возникают только гидростатические напряжения $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) \right] \mathbf{I}^0$, нелинейно зависящие от чисто объемных деформаций h_0 . Если деформации принадлежат второму собственному подпространству, т.е. $\mathbf{H}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2$ и $\mathbf{H}^{(3)} \equiv \mathbf{0}$, то возникают напряжения $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{6} b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = N_2 \mathbf{H}^{(2)} + \frac{1}{3} b_4 \mathbf{Q}_2^{(2)}$, которые сводятся к нормальным напряжениям на площадках, ортогональных главным осям анизотропии, и содержат гидростатическую составляющую. Касательные напряжения на таких площадках не возникают. Напряжения $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}$ оказываются несоосными тензору деформаций $\mathbf{H}^{(2)}$. Когда деформации целиком принадлежат третьему собственному подпространству, $\mathbf{H}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{H}^{(3)} = h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5$, т.е. являются деформациями чистого сдвига, возникают напряжения $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\Sigma}^{(3)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)} = \frac{1}{6} b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \mathbf{I}^0$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)} = \frac{1}{3} b_5 \mathbf{Q}_2^{(3)}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(3)} = N_3 \mathbf{H}^{(3)} + \frac{1}{6} b_6 \mathbf{Q}_3^{(3)}$. Это значит, что на площадках, перпендикулярных главным осям анизотропии, возникают нормальные напряжения второго порядка относительно сдвиговых деформаций. Напряжения в третьем собственном подпространстве $\boldsymbol{\Sigma}^{(3)}$ несоосны с тензором деформаций $\mathbf{H}^{(3)}$.

В работе [10] было сформулировано обобщение частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы, имеющие неодномерные собственные подпространства, в соответствии с которым тензоры напряжений $\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)}$ и деформаций $\mathbf{H}^{(\alpha)}$ в каждом собственном подпространстве соосны. Для того, чтобы модель материала удовлетворяла этой гипотезе, необходимо, чтобы упругий потенциал не зависел от третьих инвариантов тензоров деформаций $\mathbf{H}^{(\alpha)}$. В частности, модель (2.5) удовлетворяет обобщению частного постулата на анизотропные материалы, если коэффициенты b_4 , b_5 , b_6 положить равными нулю. Получим модель кубического

материала с шестью упругими константами

$$W = \frac{1}{2} \left(N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + N_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) + \frac{1}{18\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \left(3b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + 2b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 2b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right). \quad (2.7)$$

Связь между напряжениями и деформациями в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)} &= \left[N_1 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6} \left(b_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + b_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + b_3 J_2(\mathbf{H}^{(3)}) \right) \right] \mathbf{I}^0, \\ \Sigma^{(2)} &= \left(N_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_2 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)}, \\ \Sigma^{(3)} &= \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} b_3 J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(3)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В модели (2.8) во втором и третьем собственных подпространствах тензоры напряжений и деформаций оказываются соосными.

Отметим, что кубические материалы по своим упругим свойствам близки к изотропным материалам. При чисто объемных деформациях в материалах обоих типов возникают только гидростатические напряжения. При таких деформациях эти материалы неразличимы. Из модели нелинейной упругости для кубического материала можно получить модель изотропного материала, если в соотношениях (2.5), (2.6) установить следующие соотношения между константами: $2N_2 = N_3$, $b_2 = b_3$, $3b_4 = 2b_5 = b_6$.

3. Акустические волны в анизотропных материалах с кубической симметрией свойств

Рассмотрим распространение акустических волн в кубических материалах, модели которых определяются соотношениями (2.6) и (2.8). Следуя общепринятому подходу [4, 5, 6, 7], распространение акустических волн будем рассматривать как процесс наложения малых возмущений перемещений на некоторое начальное состояние материала, характеризующееся однородными полями конечных деформаций ($\mathbf{H}_i$) и напряжений (Σ_i).

В начальном состоянии на поле перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i)$ накладываются малые возмущения $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i)\delta t$. Будем считать, что градиенты возмущений также малы, а перемещения в конечном (возмущенном) состоянии определяются выражением

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t_f) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t). \quad (3.1)$$

Динамические уравнения распространения возмущений перемещений в гипотупругой среде имеют вид

$$\nabla^i \delta\mathbf{K}_i \cdots \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta\mathbf{u}) = \rho_0 \delta\ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.2)$$

где ρ_0 — плотность материала в естественном (недеформированном) состоянии.

В уравнениях (3.2) $\delta\mathbf{K}_i \equiv \delta\mathbf{H}_i$ — вариация тензора деформаций, соответствующая возмущению перемещений $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$. В соответствии с (1.5) вариация тензора деформаций определяется выражением

$$\delta\mathbf{K}_i = \mathbf{W}\delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^i) \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \delta\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}\nabla^i). \quad (3.3)$$

Тензор четвертого ранга $\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i)$ имеет смысл обобщенного тензора жесткости материала. Для модели материала (2.6) при рассмотрении процессов, в которых $\mathbf{K}_i \equiv \mathbf{H}_i$, обобщенный тензор жесткости имеет вид:

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_{\alpha} \mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=3} \sum_{\beta=1}^{\beta=6} b_{\beta} \mathbf{H}_i^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}. \quad (3.4)$$

Для модели материала (2.8) в представлении (3.4) требуется изменять β от 1 до 3.

Рассмотрим возмущение поля перемещений, связанное с прохождением плоской монохроматической волны:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i + \omega \tau)), \quad \tau = t - t_i, \quad (3.5)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины, k — волновое число, ω — частота, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

По полю перемещений (3.5) определим вариацию (3.3) тензора деформаций ($\delta \mathbf{K}_i = \delta \mathbf{H}_i$ в рассматриваемых изотропных процессах):

$$\delta \mathbf{H}_i = \frac{1}{2} i k (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n})$$

и ее градиент, входящий в (3.2),

$$\nabla^i \delta \mathbf{H}_i = -\frac{1}{2} k^2 \mathbf{n} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n}). \quad (3.6)$$

Динамические уравнения (3.2) после подстановки в них соотношений (3.1) и (3.6) преобразуются к виду

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p},$$

где $\mathbf{A}$ — акустический тензор среды, $c = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды с предварительными деформациями $\mathbf{H}_i$ определяется выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) - \Sigma_i \cdot \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n}$ — обобщенный тензор Кристоффеля.

Тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ определяются свойствами среды и зависят как от направления распространения волны, так и от предварительных деформаций $\mathbf{H}_i$. Из уравнений (3.7) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$, а вектор поляризации — его собственным вектором.

При отсутствии предварительных деформаций, когда начальное состояние совпадает с естественным, в кубическом материале наряду с продольной волной распространяются две поперечные волны с взаимно перпендикулярными векторами поляризации и различными скоростями. Скорости их распространения зависят от свойств материала и от направления распространения волны $\mathbf{n}$. Выражения для фазовых скоростей распространения акустических волн в кубическом материале для волны, распространяющейся вдоль главной оси анизотропии $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$, имеют вид

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} (N_1 + 2N_2), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{N_3}{2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим предварительные деформации кубического материала, расположенные в его упругих собственных подпространствах. В первом случае начальное состояние определим полем перемещений $\mathbf{u}_i = (\lambda(t_i) - 1) \mathbf{x}_i$, где λ — кратность удлинений при объемной деформации. В этом случае тензор логарифмических деформаций имеет диадное разложение

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) = h_0 \mathbf{I}^0, \quad h_0 = \sqrt{3} \ln \lambda,$$

и расположен в первом упругом собственном подпространстве. Напряжения, определяемые по формулам (2.6), равны

$$\Sigma_i = \left(N_1 h_0 + \frac{1}{2} b_1 h_0^2 \right) \mathbf{I}^0. \quad (3.9)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. Акустический тензор (3.7) с учетом выражений (3.4) и (3.9) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2} h_0 \right) h_0 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3} b_3 h_0 \right) (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Акустический тензор (3.10) имеет два различных собственных значения, которые определяют скорости распространения продольной c_l и поперечных $c_{t1} = c_{t2}$ волн. Ось анизотропии $\mathbf{a}_1$ является акустической осью кубического материала. Выражения для скоростей распространения волн имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 c_l^2 = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2} h_0 \right) h_0 \right), \\ \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = & \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3} b_3 h_0 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Фазовые скорости (3.11) не содержат константы b_4, b_5, b_6 , поэтому при использовании модели кубического материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, при предварительной чисто объемной деформации скорости распространения продольных и поперечных волн также определяются выражениями (3.11).

На рис. 1 приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$ (всестороннее сжатие). Здесь же пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей для случая, когда предварительные деформации отсутствуют. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.11), на рис. 1 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. Графики построенных угловых зависимостей показывают, что всестороннее сжатие не приводит к изменению формы построенных кривых.

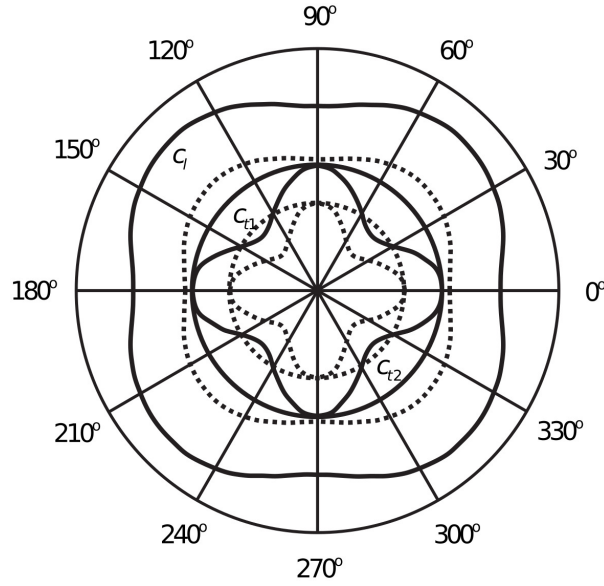


Рис. 1: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном всестороннем сжатии

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) = h_2 \mathbf{I}^2, \quad h_2 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен во втором упругом собственном подпространстве кубического материала и определяет состояние растяжения–сжатия в главных осях анизотропии. При таком деформированном состоянии напряжения (2.6) определяются выражениями

$$\Sigma_i = \frac{1}{6} b_2 h_2^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{2\sqrt{6}} b_4 h_2^2 \mathbf{I}^1 + N_2 h_2 \mathbf{I}^2. \quad (3.12)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. На основании соотношений (3.4), (3.7) и (3.12) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - b_4 \right) h_2^2 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (3.13) в кубическом материале, определяемом моделью (2.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - b_4 \right) h_2^2 \right) \quad (3.14)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_1$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right) \quad (3.15)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_2$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{3\sqrt{2}} b_5 h_2 \right). \quad (3.16)$$

Выражения для фазовых скоростей (3.14)–(3.16) содержат константы b_4 и b_5 , поэтому при использовании модели кубического материала, удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_2}{2\sqrt{3}} h_2^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_3. \quad (3.17)$$

Выражения (3.17) показывают, что в этом случае не прогнозируется изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 2, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей при отсутствии предварительных деформаций. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.14)–(3.17), на рис. 2 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. На рис. 2,а графики построены для модели материала (2.6), а на рис. 2,б — для модели материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы.

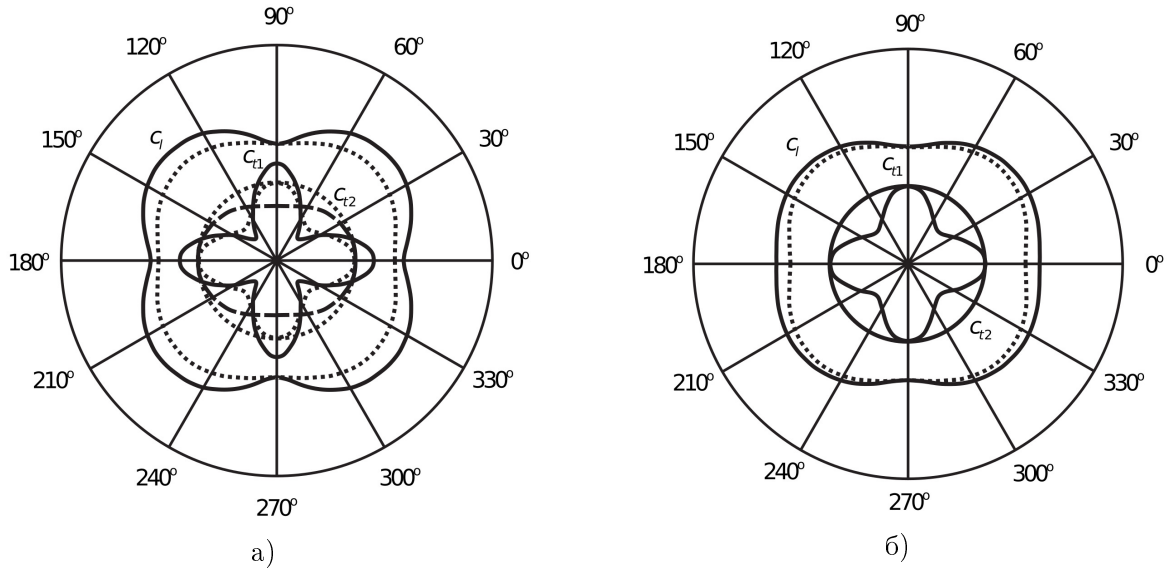


Рис. 2: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном растяжении-сжатии в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) = h_3 \mathbf{I}^3, \quad h_3 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен в третьем упругом собственном подпространстве кубического материала и определяет состояние чистого сдвига в главных осях анизотропии. При таком деформированном состоянии напряжения (2.6) определяются выражениями

$$\Sigma_i = \frac{1}{6} b_3 h_3^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{3\sqrt{6}} b_5 h_3^2 \mathbf{I}^1 + N_3 h_3 \mathbf{I}^3. \quad (3.18)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$. На основании соотношений (3.4), (3.7) и (3.18) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \left(\frac{b_3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}b_5 \right) h_3^2 \right) \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + \\ & + \frac{1}{2} N_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) + \frac{1}{12\sqrt{2}} b_6 h_3 (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (3.19) в кубическом материале, определяемом моделью (2.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{a}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \left(\frac{b_3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{3}b_5 \right) h_3^2 \right) \quad (3.20)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 + \frac{1}{6\sqrt{2}} b_6 h_3 \right) \quad (3.21)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_3 - \frac{1}{6\sqrt{2}} b_6 h_3 \right). \quad (3.22)$$

Выражения для фазовых скоростей (3.20)–(3.21) содержат константы b_5 и b_6 , поэтому при использовании модели кубического материала, удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_3}{2\sqrt{3}} h_3^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_3. \quad (3.23)$$

Выражения (3.23) показывают, что и в случае, когда начальные деформации лежат в третьем упругом собственном подпространстве, модель материала (2.8) не прогнозирует изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 3, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,975$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости фазовых скоростей при отсутствии предварительных деформаций. Фазовые скорости, вычисляемые по формулам (3.21)–(3.23), на рис. 3 соответствуют значению угла $\varphi = 90^\circ$. На рис. 3,а графики построены для модели материала (2.6), а на рис. 3,б — для модели материала (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы.

Выражения для фазовых скоростей в (3.8), (3.11), (3.14)–(3.16), (3.20)–(3.22) достаточны для определения всех девяти констант модели (2.6) по измеренным скоростям распространения продольных и поперечных волн. Выражения (3.8), (3.11), (3.17), (3.23), полученные для модели (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, также пригодны для идентификации этой модели по результатам динамических экспериментов.

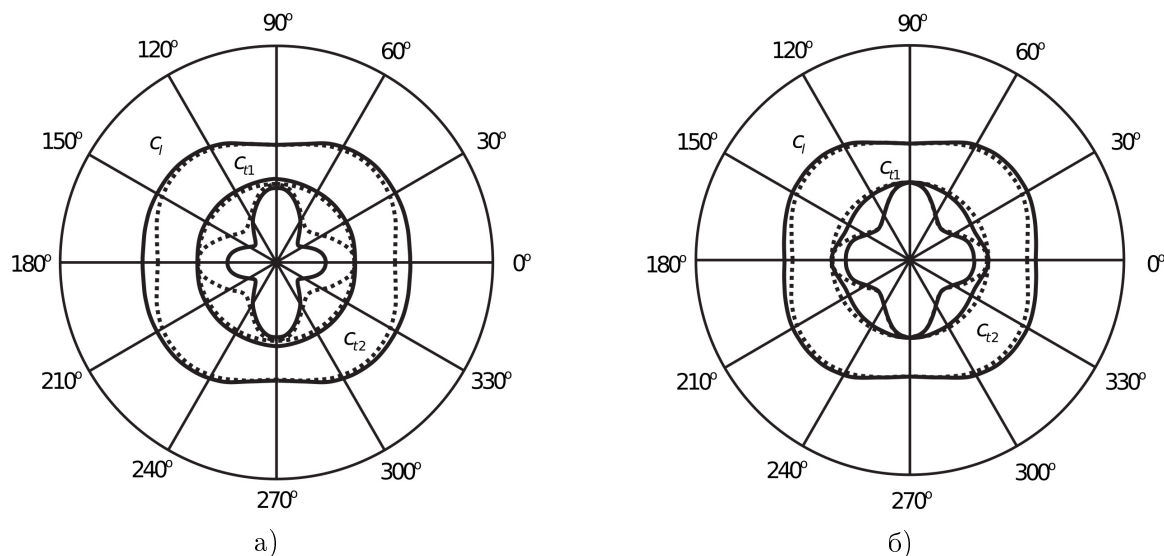


Рис. 3: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$, $c_{t1}(\varphi)$ и $c_{t2}(\varphi)$ при предварительном чистом сдвиге в плоскости $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$

4. Выводы

Для двух моделей гипопругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств проведен анализ влияния предварительных конечных деформаций на скорости распространения акустических волн. Показано, что при предварительных чисто объемных деформациях, когда тензоры деформаций и напряжений расположены в первом упругом собственном подпространстве кубического материала, принятие гипотезы о справедливости обобщения частного постулата на анизотропные материалы не влияет на результаты расчетов фазовых скоростей распространения акустических волн. При деформациях, расположенных во втором и третьем упругих собственных подпространствах, при расчете по модели (2.6), содержащей девять упругих постоянных материала, материал приобретает дополнительную акустическую анизотропию, что проявляется в изменении формы графиков угловых зависимостей фазовых скоростей продольной и поперечных волн. При расчете по модели (2.8), удовлетворяющей обобщению частного постулата на анизотропные материалы, для волн, распространяющихся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{a}_3$, не удастся описать изменение фазовых скоростей распространения поперечных волн.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thurston R. N., Brugger K. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media // Phys. Rev. 1964. Vol 133. P. A1604–A1610.
2. Brugger K. Pure modes for elastic waves in crystals // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. № 3. P. 759-768.
3. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
4. Knowles K. M. The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain // Journal of Elasticity. 2016. Vol. 124. P. 1-25.
5. Duffy T. S. Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // American Mineralogist. 2018. Vol. 103. No. 6. P. 977-988.

6. Kambouchev N., Fernandez J., Radovitzky R. A polyconvex model for materials with cubic symmetry // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2007. Vol. 15. N. 5. P. 451-468.
7. Kube C.M., Turner J.A. Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals // *Journal of Elasticity*. 2016. Vol. 122. N. 2. P. 157-177.
8. Kube C.M. Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2017. Vol. 141, № 6.
9. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
10. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2011. № 1. С. 38-45.
11. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // *Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки*. 1987. № 2. С. 49-53.
12. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Нелинейная упругость кубических кристаллов // *Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2021 года)* / Под ред. проф. Г. Л. Бровко, проф. Д. В. Георгиевского, проф. И. Н. Молодцова. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021. С. 100-110.
13. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // *Динамика твердого деформируемого тела. Сибирское отделение АН СССР. Ин-т гидродинамики*. 1984. В. 66. С. 113-125.
14. Рыхлевский Я. О законе Гука // *Прикладная математика и механика*. 1984. Т. 48. В. 3. С. 420-435.
15. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 103-116.
16. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / В двух томах. Киев: Наукова Думка, 1986.
17. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.

REFERENCES

1. Thurston, R. N. & Brugger, K. 1964. "Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude waves in homogeneously stressed media", *Phys. Rev.*, vol 133, pp. A1604–A1610.
2. Brugger, K. 1965, "Pure modes for elastic waves in crystals", *J. Appl. Phys.*, vol. 36, no. 3, pp. 759-768.
3. Chernykh, K. F. 1988. "Introduction to anisotropic elasticity", *Nauka, Moscow*. [in Russian].
4. Knowles, K. M. 2016. "The biaxial moduli of cubic materials subjected to an equi-biaxial elastic strain", *J. Elast.*, vol. 124, p. 1-25.

5. Duffy, T. S. 2018. "Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry", *American Mineralogist*, vol. 103, no. 6, p. 977-988.
6. Kambouchev, N., Fernandez, J. & Radovitzky, R. 2007. "A polyconvex model for materials with cubic symmetry", *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, n. 5, p. 451-468.
7. Kube, C.M. & Turner, J.A. 2016. "Estimates of nonlinear elastic constants and acoustic nonlinearity parameters for textured polycrystals", *J. Elast.*, vol. 122, no. 2, pp. 157-177.
8. Kube, C.M. 2017. "Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 141, no. 6.
9. Markin, A.A. & Sokolova, M.Yu. 2015. "Thermomechanics of elastoplastic deformation", *Cambridge International Science Publishing, Cambridge*.
10. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V. 2011. "A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations", *Mech. Solids*, vol. 46, no. 1, p. 30-35.
11. Markin, A.A. & Tolokonnikov, L.A. 1987. "Measures of the finite deformation processes", *News of the North Caucasus Scientific Center of Higher Education. Natural Sciences*, n. 2, p. 49-53 [in Russian].
12. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V. 2021. "Nonlinear elasticity of cubic crystals", *Elasticity and anelasticity. Proceedings of the International scientific symposium on problems of the mechanics of deformable bodies dedicated to the 110th anniversary from the birthday of A.A. Ilyushin (Moscow, January 20-21, 2021)*. Edited by Prof. G.L. Brovko, Prof. D.V. Georgievskii, Prof. I.N. Molodtsov. Moscow, Moscow University Press, p. 100-110 [in Russian].
13. Ostrosablin, N.I. 1984. "On the structure of the elastic moduli tensor. Eigen elastic states", *Dynamics of a solid deformable body*, vol. 66, p. 113-125 [in Russian].
14. Rykhlevsky, J. 1984. "About Hooke's Law", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 48, n. 3, p. 420-435 [in Russian].
15. Sokolova, M.Yu. & Khristich, D.V., 2021. "Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, no. 70, p. 103-116 [in Russian].
16. Guz', A.N. 1986. "Elastic waves in bodies with initial stresses", in two volumes, *Naukova Dumka, Kiev*, [in Russian].
17. Lurie, A.I. 2012. "Non-linear theory of elasticity", *North Holland*.

Получено: 27.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024