

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-318-333

Акустические волны в гипотупругих телах. I. Изотропные материалы¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация

Рассматриваются две модели гипотупругих изотропных материалов, основанные на использовании неголономной меры деформаций, обобщенная яуманновская производная от которой совпадает с тензором деформации скорости. Сформулированы условия, при выполнении которых в таких моделях существует упругий потенциал деформаций. Упругий потенциал и определяющие соотношения выписаны в терминах упругих собственных подпространств изотропного материала. Модели различаются числом упругих констант. Показано, что четырехконстантная модель удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии А.А. Ильюшина, а пятиконстантная — не удовлетворяет. Получено уравнение распространения акустических волн в таких материалах.

Исследовано влияние использования частного постулата изотропии в качестве гипотезы на результаты решения динамических задач. Для двух моделей определены фазовые скорости распространения акустических волн при различных видах начальных деформаций. При предварительных чисто объемных деформациях расчеты по пятиконстантной и четырехконстантной моделям дают одинаковый результат. При деформациях, расположенных в девиаторном подпространстве, тензор напряжений имеет составляющую, расположенную в первом упругом собственном подпространстве, а его проекция во второе подпространство при использовании пятиконстантной модели несоосна девиатору деформаций. При этом начально изотропный материал приобретает анизотропию в отношении акустических свойств. Модель материала, удовлетворяющая частному постулату изотропии, в рассматриваемом случае также описывает анизотропию скоростей распространения продольных волн.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, изотропные материалы, гипотупругие материалы, частный постулат изотропии.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич. Акустические волны в гипотупругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 318–333.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-318-333

Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich

Sokolova Marina Sokolova — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitriy Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract

Two models of hypoelastic isotropic materials based on the use of a nonholonomic strain measure, the generalized Yaumann derivative of which coincides with the strain rate tensor, are considered. The conditions under which elastic strain potential exists in such models are formulated. The elastic potential and the constitutive relations are written in terms of elastic eigen subspaces of an isotropic material. The models differ in the number of elastic constants. It is shown that the four-constant model satisfies the requirements of A.A.Ilyushin particular postulate of isotropy, and the five-constant model does not satisfy them. The equation of acoustic wave propagation in such materials is obtained.

The influence of the use of the particular isotropy postulate as a hypothesis on the results of dynamic problems solution is investigated. The phase velocities of acoustic wave propagation under various types of initial strains are determined for two models. At preliminary purely volumetric strains, calculations using five-constant and four-constant models give the same result. For strains located in the deviatoric subspace, the stress tensor has a component located in the first elastic eigen subspace, and its projection into the second subspace when using the five-constant model is misaligned to the strain deviator. At the same time, the initially isotropic material acquires anisotropy with respect to acoustic properties. The material model satisfying the particular postulate of isotropy in the case under consideration also describes the anisotropy of longitudinal waves propagation velocities.

Keywords: acoustic waves, finite strains, phase velocities of wave propagation, isotropic materials, hypoelastic materials, particular postulate of isotropy.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, 2024. "Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 318–333.

Введение

Распространение акустических волн в телах из упругих изотропных материалов является одной из важнейших динамических задач нелинейной теории упругости, которая находит широкое применение как в технике, например, для проведения неразрушающего контроля изделий [1, 2], так и в медицине при проведении ультразвуковых исследований [3]. Следует отметить огромное число публикаций по этой теме. Полный обзор этих публикаций не является целью работы.

Динамические уравнения распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями (напряжениями) рассмотрены в классических работах [4, 5, 6], а также в многочисленных публикациях более позднего периода, например, [7, 8, 9, 10, 11]. Авторы этих работ считают среду гиперупругой, т.е. принимают гипотезу о существовании упругого потенциала. Чаще всего используется упругий потенциал полиномиального вида, построенный по тензору деформаций Коши-Грина, что для изотропного материала является моделью Мурнагана [6]. Для таких моделей эксперименты по определению скоростей распространения акустических волн являются хорошо проверенным способом определения констант модели [3, 10, 12]. В силу свойств тензора деформаций Коши-Грина часто бывает затруднительно трактовать физический смысл решения рассматриваемой динамической задачи.

Одним из возможных подходов к построению моделей нелинейно упругих материалов является установление связи между скоростями изменения напряжений и деформаций, т.е. использование модели так называемого гипотупругого материала [13]. В данной статье модель гипотупругого изотропного материала строится с использованием неголономной меры деформаций, введенной в работах А.А. Маркина [14, 15]. Соотношения модели записываются через инварианты проекций тензора деформаций в собственные упругие подпространства изотропного материала, понятие о которых использовалось в работах [15, 16, 17]. Это позволяет провести анализ нелинейных эффектов, описываемых моделью.

Будут рассмотрены такие конечные деформации материала, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. Известно, что в этом случае неголономная мера деформаций совпадает с мерой логарифмических деформаций Генки [14, 15]. В статье показано, что при таких деформациях для гипотупругого материала в некоторых случаях может быть определен потенциал деформаций. Рассмотрены модели изотропного гипотупругого материала двух типов: пятиконстантная, не удовлетворяющая частному постулату изотропии материала А.А. Ильюшина, и четырехконстантная, удовлетворяющая требованиям этого постулата. Одним из следствий гипотезы, называемой частным постулатом изотропии, является соосность девиаторов тензоров напряжений и деформаций, которая нарушается в модели Мурнагана и подобных ей. В данной статье будет проведен анализ вопроса о влиянии выбора модели гипотупругого материала на решение динамической задачи об определении фазовых скоростей распространения акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями разных видов.

1. Кинематика конечных деформаций

Введем в рассмотрение отсчетную конфигурацию с декартовой системой координат $Ox^1x^2x^3$ и ортонормированным векторным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (точкой обозначено скалярное произведение). Положение каждой материальной точки в этой конфигурации определяется радиус-вектором $\mathbf{x}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i$. Полагаем, что в отсчетной конфигурации перемещения, деформации и напряжения в материале отсутствуют. Переход к текущей конфигурации определяется полем перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$. Тензор-аффино деформаций Φ связан с полем перемещений выражением

$$\Phi = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}$ — набла-оператор отсчетной конфигурации.

Представление тензора-аффина деформаций в виде произведения симметричного и ортогонального тензора называют его полярным разложением:

$$\Phi = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T, \mathbf{V} = \mathbf{V}^T$ — левая и правая меры искажений, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию.

В качестве меры конечных деформаций будем использовать неголономную меру деформаций $\mathbf{K}$, введенную в работах А.А. Маркина [14, 15]. Эта мера определяется из дифференциального уравнения, связывающего обобщенную яуманновскую производную тензора $\mathbf{K}$ с тензором деформации скорости $\mathbf{W}$ [15]:

$$\mathbf{K}^\Delta \equiv \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W}, \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}$ — тензор спина, $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}$ — тензор деформации скорости, точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Выбор этой меры обусловлен ее свойствами. Во-первых, первый инвариант этой меры связан только с изменением объема материальной частицы, а ее девиатор — с чистым формоизменением. Во-вторых, мера $\mathbf{K}$ энергетически сопряжена с обобщенным тензором напряжений $\boldsymbol{\Sigma} = J\mathbf{S}$, где $J = \det \boldsymbol{\Phi}$ характеризует относительное изменение объема, $\mathbf{S}$ — тензор истинных напряжений Коши, так что дифференциал удельной (отнесенной к начальному объему) потенциальной энергии деформаций W представляется в виде

$$dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot d^\Delta \mathbf{K}. \quad (1.4)$$

Обобщенная яуманновская производная тензора $\mathbf{K}$ определяется относительно вращающегося со скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ ортонормированного базиса $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, положение которого относительно неподвижного базиса отсчетной конфигурации $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяется с помощью ортогонального тензора, входящего в полярное разложение аффинора деформаций:

$$\mathbf{n}_i(t) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}(t). \quad (1.5)$$

Как и любая неголономная мера деформаций, мера деформаций $\mathbf{K}$ имеет недостаток, а именно не выражается через перемещения частиц среды в текущей конфигурации. Исключения составляют так называемые изотропные процессы деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами. В этом случае отсутствуют повороты среды как жесткого целого, т.е. $\mathbf{R} \equiv \mathbf{E}$, и равна нулю скорость вращения материальных волокон, т.е. тензор вихря $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R} + \boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{0}$. В таких процессах неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ совпадает с логарифмическим тензором деформаций Генки $\mathbf{K} \equiv \mathbf{H} = \ln \mathbf{U}$, однозначно определяемым текущей конфигурацией [14, 15].

2. Динамические уравнения распространения акустических волн

Рассмотрим три состояния среды: естественное состояние, в котором деформации и напряжения отсутствуют, начальное состояние с однородным полем конечных деформаций и конечное состояние, переход к которому от начального состояния связан с возмущением поля перемещений. Будем считать, что естественное состояние совпадает с отсчетной конфигурацией. Переход к начальному состоянию связан с полем перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i)$ и характеризуется однородной деформацией $\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_i$ и тензором напряжений $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(t_i)$. Переход от естественного состояния к начальному считаем квазистатическим, поэтому выполняются условия равновесия:

$$\nabla^i \cdot \mathbf{S}_i \equiv \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_i \equiv \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

где $\nabla^i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}$ — набла-оператор начального состояния.

В начальном состоянии на поле перемещений $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i, t_i)$ накладываются малые возмущения $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i) \delta t$. Будем считать, что градиенты возмущений также малы, а перемещения в конечном (возмущенном) состоянии определяются выражением

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t_f) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t_i) + \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t). \quad (2.2)$$

В конечном состоянии выражение для аффинора деформаций имеет вид

$$\Phi_f = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_f = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_i + \nabla^0 \delta \mathbf{u}.$$

Учитывая связь между операторами Гамильтона в естественном и начальном состояниях $\nabla^i(\cdot) = \Phi_i^{-1} \cdot \nabla^0(\cdot)$ и выражение (1.1), получим представление для аффинора деформаций в конечном состоянии:

$$\Phi_f = \Phi_i \cdot (\mathbf{E} + \nabla^i \delta \mathbf{u}). \quad (2.3)$$

В силу предположения о малости градиентов возмущений перемещений в дальнейших преобразованиях слагаемыми, содержащими $\nabla^i \delta \mathbf{u}$ во второй и более высоких степенях, будем пренебрегать.

Запишем уравнения движения среды в конечном (возмущенном) состоянии:

$$\nabla^f \cdot \mathbf{S}_f = \rho_f \ddot{\mathbf{u}}_f$$

или, учитывая связь между тензорами напряжений $\mathbf{S}$ и Σ , в виде:

$$\nabla^f \cdot J_f^{-1} \Sigma_f = \rho_f \ddot{\mathbf{u}}_f. \quad (2.4)$$

Разложим тензор напряжений Σ_f в окрестности начального состояния по степеням тензора деформаций $\mathbf{K}$:

$$\Sigma_f = \Sigma_i + \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} \cdot (\mathbf{K}_f - \mathbf{K}_i) + O(\|\nabla^i \delta \mathbf{u}\|), \quad (2.5)$$

где $\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_i} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i)$ — тензор четвертого ранга, имеющий смысл обобщенного тензора жесткости материала.

Пренебрегая членами высших порядков малости, запишем (2.5) в виде

$$\Sigma_f = \Sigma_i + \delta \Sigma_i, \quad \delta \Sigma_i = \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) \cdot \delta \mathbf{K}_i. \quad (2.6)$$

В соответствии с определением неголономной меры деформаций (1.3) и представлением тензора деформации скорости $\mathbf{W}$ через поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i)$ [6, 15] выражение для вариации тензора $\mathbf{K}_i$ имеет вид:

$$\delta \mathbf{K}_i = \mathbf{W} \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla^i) \delta t = \frac{1}{2} (\nabla^i \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \nabla^i). \quad (2.7)$$

С учетом представлений (2.6) и (2.7) уравнения движения (2.4) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \nabla^i \cdot \delta \Sigma_i - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta \mathbf{u}) &= \rho_0 \delta \ddot{\mathbf{u}}_f, \\ \nabla^i \delta \mathbf{K}_i \cdot \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_i) - \Sigma_i \cdot \nabla^i (\nabla^i \cdot \delta \mathbf{u}) &= \rho_0 \delta \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) являются динамическими уравнениями распространения малых возмущений перемещений, линеаризованными в предположении, что $\|\nabla^i \delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0$. Применение этих уравнений в конкретной среде требует конкретизации среды, т.е. установления связи между напряжениями и деформациями в ней.

3. Определяющие соотношения для гипотупругой среды

Материал называют гипотупругим, если определяющие соотношения в нем связывают скорости изменения напряжений со скоростями изменения деформаций [13, 14, 15]. Представим нелинейную связь между объективными производными тензоров Σ и $\mathbf{K}$ в виде:

$$\Sigma^\Delta = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta + \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ — тензоры четвертого и шестого рангов [15], компоненты которых в декартовом базисе обладают свойствами симметрии

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \\ L_{ijklmn} &= L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{klijmn} = L_{mnijkl} = L_{ijmnlk}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полагая компоненты (3.2) постоянными во вращающемся (полярном) базисе (1.5), приходим к требованию:

$$\mathbf{N}^\Delta \equiv 0, \quad \mathbf{L}^\Delta \equiv 0. \quad (3.3)$$

При выполнении условий (3.3) соотношения (3.1) могут быть проинтегрированы:

$$\Sigma = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \mathbf{K}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) представляют собой определяющие соотношения для гипотупругого материала, записанные в терминах неголономной меры деформаций $\mathbf{K}$. Эти соотношения можно рассматривать и как следствие предположения о существовании упругого потенциала $W(\mathbf{K})$, который можно представить в полиномиальной форме:

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{N} \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{6} \mathbf{L} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K}, \quad (3.5)$$

тогда в соответствии с (1.4) обобщенный тензор напряжений определяется выражением:

$$\Sigma = \frac{\partial W}{\partial \Delta \mathbf{K}}. \quad (3.6)$$

При бесконечно малых деформациях, когда $\mathbf{K} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla^0 \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla^0) \rightarrow \mathbf{0}$, определяющие соотношения (3.4) совпадают с соотношениями модели Мурнагана [6, 19]

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{L} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

поэтому тензор $\mathbf{N}$ можно рассматривать как тензор упругости материала второго порядка, а тензор $\mathbf{L}$ — как тензор упругости третьего порядка, а их компоненты являются упругими постоянными материала второго и третьего порядков соответственно.

В работах [15, 16, 17] используются понятия собственных упругих состояний материала, которые представляют собой собственные подпространства тензора $\mathbf{N}$. Тензор упругости $\mathbf{N}$ можно представить разложением по собственным базисным тензорам в виде

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \mathbf{N}^{(\alpha)}, \quad (3.8)$$

где m — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{N}$, совпадающее с количеством независимых констант упругости материала. Тогда обобщенный закон Гука [6, 15] можно записать в терминах собственных упругих состояний в виде

$$\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$ — проекция тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ в соответствующее собственное подпространство с базисным тензором $\mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Базисные тензоры собственных упругих подпространств определены в работах [15, 16, 17]. Эти тензоры нормируются соотношением $\mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{N}^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} \mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Собственные базисные тензоры для тензора шестого ранга $\mathbf{L}$ определяются как такие, что тензор $\mathbf{L}$ может быть представлен разложением

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} b_{\alpha} \mathbf{B}^{(\alpha)}, \quad (3.9)$$

где n — количество различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$, совпадающее с числом независимых констант упругости третьего порядка.

Если представить тензоры напряжений и деформаций разложениями по собственным упругим подпространствам $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \mathbf{S}^{(\alpha)}$, то из соотношений (3.7) следует связь между проекциями напряжений $\mathbf{S}^{(\alpha)}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}$ в собственные подпространства в виде

$$\mathbf{S}^{(\alpha)} = N_{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(\alpha)}, \quad (3.10)$$

которая определяет нелинейную (полиномиальную) связь между напряжениями и малыми деформациями. Пренебрегая в (3.10) членами второго порядка малости, придем к обобщенному закону Гука.

В случае конечных деформаций естественным обобщением соотношений (3.10) на основании (3.4) являются соотношения, связывающие проекции тензоров $\mathbf{K}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ в собственные упругие подпространства материала:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)} = N_{\alpha} \mathbf{K}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{K}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)}, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{K}^{(\alpha)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\boldsymbol{\Sigma}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{N}^{(\alpha)}$.

Соотношения (3.4), связывающие обобщенный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ с неголономной мерой деформаций $\mathbf{K}$, могут быть записаны через обобщенный тензор жесткости $\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{K}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Delta \mathbf{K}^2}$ в виде

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)}, \quad (3.12)$$

причем выражение для тензора жесткости на основании (3.11) имеет вид:

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_{\alpha} \mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{K}^{(\gamma)} \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (3.13)$$

Выражение для потенциала деформаций (3.5) также может быть записано через проекции тензора деформаций в собственные упругие подпространства:

$$W(\mathbf{K}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \left(\frac{1}{2} N_{\alpha} \mathbf{K}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{K}^{(\alpha)} + \frac{1}{6} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \mathbf{K}^{(\gamma)} \mathbf{K}^{(\beta)} \mathbf{K}^{(\alpha)} \right). \quad (3.14)$$

Модель гипотропного материала, представляемая соотношениями (3.12)–(3.14), пригодна для использования как для изотропных, так и для анизотропных материалов с различным типом симметрии свойств. Конкретизация соотношений (3.12)–(3.14) связана с определением собственных базисных тензоров упругости $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\alpha)}$ для материалов различных типов.

4. Конечные деформации изотропного материала

Изотропный материал характеризуется двумя константами упругости второго порядка и тремя константами упругости третьего порядка [6, 19, 20]. Тензор $\mathbf{N}$ имеет два различных собственных значения $N_1 = 3K$, $N_2 = 2G$ (K и G — модуль объемной упругости и модуль сдвига материала) и два собственных подпространства: одномерное, соответствующее чисто объемным деформациям, и пятимерное девиаторное, соответствующее чистому формоизменению.

Упругие собственные подпространства изотропного материала имеют базисные тензоры

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{I}^0 \mathbf{I}^0, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \mathbf{I}^1 \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 \mathbf{I}^2 + \mathbf{I}^3 \mathbf{I}^3 + \mathbf{I}^4 \mathbf{I}^4 + \mathbf{I}^5 \mathbf{I}^5, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{I}^i$ — тензоры канонического базиса [15], диадные разложения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Число различных собственных значений тензора $\mathbf{L}$ для изотропного материала равно трем: b_1, b_2, b_3 . Они связаны с константами упругости третьего порядка [6] ν_1, ν_2, ν_3 соотношениями

$$b_1 = 3\sqrt{3}(\nu_1 + 2\nu_2 - 16\nu_3), \quad b_2 = -12\sqrt{3}\nu_2, \quad b_3 = 4\nu_3.$$

Собственные базисные тензоры $\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{B}^{(3)}$ для изотропного материала приведены в работах [19, 20].

Ограничимся рассмотрением изотропных процессов конечного деформирования, в которых главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, в связи с чем в дальнейших соотношениях в качестве меры деформаций используем тензор Генки $\mathbf{H}$. Вычислим проекции тензора деформаций $\mathbf{H}$ в собственные подпространства тензора упругости, характеризующие собственные упругие состояния материала:

$$\begin{aligned} 1D: \quad \mathbf{H}^{(1)} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}^{(1)} = h_0 \mathbf{I}^0, \\ 5D: \quad \mathbf{H}^{(2)} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}^{(2)} = h_1 \mathbf{I}^1 + h_2 \mathbf{I}^2 + h_3 \mathbf{I}^3 + h_4 \mathbf{I}^4 + h_5 \mathbf{I}^5, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где обозначено $h_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}^i$.

Отметим, что квадрат тензора $\mathbf{H}^{(1)}$ также принадлежит первому собственному подпространству, а квадрат тензора $\mathbf{H}^{(2)}$ имеет составляющие, принадлежащие подпространствам $1D$ и $5D$, которые обозначим соответственно $\mathbf{H}_1^{(2)}$ и $\mathbf{Q}_2^{(2)}$. Подставляя (4.3) в соотношения (3.11), (3.14), запишем представление для потенциала деформаций изотропного материала в терминах собственных упругих состояний:

$$W = \frac{1}{6}N_1 J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{2}N_2 J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{b_1}{3\sqrt{3}} J_1^3(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{\sqrt{3}} J_1(\mathbf{H}^{(1)}) J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + 6b_3 J_3(\mathbf{H}^{(2)}) \right), \quad (4.4)$$

где $J_1(\mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{H}^{(1)} \cdot \mathbf{E}$, $J_2(\mathbf{H}^{(2)}) = \mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{H}^{(2)}$, $J_3(\mathbf{H}^{(2)}) = \det \mathbf{H}^{(2)}$ — инварианты тензоров $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{H}^{(2)}$.

Выражения для напряжений в случае изотропного материала принимают вид:

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)} &= \sqrt{3}\sigma_0\mathbf{I}^0, \\ \Sigma^{(2)} &= \tau_e\mathbf{H}^{(2)} + \tau_q\mathbf{Q}_2^{(2)},\end{aligned}\quad (4.5)$$

где $\sigma_0 = KJ_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_1}{6\sqrt{3}}J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{6\sqrt{3}}J_2(\mathbf{H}^{(2)})$, $\tau_e = 2G + \frac{b_2}{3\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)})$, $\tau_q = b_3$ — материальные функции, обозначения которых совпадают с принятыми в работе [19].

Обобщенный тензор жесткости (3.13) в случае изотропного материала принимает вид

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_{\alpha}\mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\beta=1}^{\beta=3} b_{\beta}\mathbf{H}^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (4.6)$$

Для анализа нелинейных эффектов, описываемых моделью изотропного материала (4.4)–(4.6), рассмотрим деформированные состояния, расположенные в собственных подпространствах тензора упругости. Пусть деформации определяются тензором $\mathbf{H}^{(1)} = h_0\mathbf{I}^0$, $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{0}$. Исходя из геометрического смысла тензора логарифмических деформаций, это состояние является чисто объемной деформацией. Возникающие при этом напряжения $\Sigma^{(1)} = \left[\sqrt{3}KJ_1(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{6}b_1J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) \right] \mathbf{I}^0$ являются гидростатическими, а наличие константы b_1 позволяет учесть нелинейность их изменения. Касательные напряжения при таких деформациях не возникают.

Если деформации определяются только тензором $\mathbf{H}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{0}$, то рассматриваемое состояние является чистым формоизменением. Напряжения в этом случае дают ненулевые проекции в оба упругих собственных подпространства: $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$, причем $\Sigma^{(1)} = \frac{1}{6}b_2J_2(\mathbf{H}^{(2)})\mathbf{I}^0$, $\Sigma^{(2)} = \left(2G + \frac{b_2}{3\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)}) \right) \mathbf{H}^{(2)} + b_3\mathbf{Q}_2^{(2)}$. Модель описывает дилатационные эффекты в материале, связанные с появлением гидростатических напряжений при чистом формоизменении. Напряжения $\Sigma^{(2)}$ оказываются в общем случае несоосными деформациям $\mathbf{H}^{(2)}$.

Несоосность девиаторов напряжений и деформаций указывает на то, что модель (4.4)–(4.6) не удовлетворяет требованиям частного постулата изотропии А.А. Ильюшина [18]. Одним из следствий частного постулата изотропии является независимость упругого потенциала от третьего инварианта деформаций [21].

Рассматриваемая модель материала удовлетворит требованиям частного постулата изотропии при условии равенства нулю коэффициента b_3 . Упругий потенциал такой четырехконстантной модели имеет вид

$$W = \frac{1}{6}N_1J_1^2(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{1}{2}N_2J_2(\mathbf{H}^{(2)}) + \frac{1}{6} \left(\frac{b_1}{3\sqrt{3}}J_1^3(\mathbf{H}^{(1)}) + \frac{b_2}{\sqrt{3}}J_1(\mathbf{H}^{(1)})J_2(\mathbf{H}^{(2)}) \right), \quad (4.7)$$

а связь между напряжениями и деформациями в собственных упругих подпространствах определяется соотношениями:

$$\Sigma^{(1)} = \sqrt{3}\sigma_0\mathbf{I}^0, \quad \Sigma^{(2)} = \tau_e\mathbf{H}^{(2)}, \quad (4.8)$$

причем функции σ_0 и τ_e по-прежнему определяются выражениями (3.4).

Обобщенный тензор жесткости материала (4.6) принимает вид

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_{\alpha}\mathbf{N}^{(\alpha)} + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=2} \sum_{\beta=1}^{\beta=2} b_{\beta}\mathbf{H}^{(\gamma)} \cdot \cdot \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (4.9)$$

Модель материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющая частному постулату изотропии, описывает такие же нелинейные эффекты, что и модель (4.4)–(4.6), однако в этом случае в соответствии

с (4.8) девиаторы напряжений и деформаций соосны. Интерес представляет вопрос, каким образом принятие частного постулата изотропии оказывает влияние на результаты решения динамических задач. Далее этот вопрос проанализирован на примере решения задачи о распространении акустических волн в материале.

5. Плоские гармонические волны в предварительно деформированном изотропном материале

Пусть возмущение поля перемещений из (2.2) связано с прохождением плоской монохроматической волны с полем перемещений

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i + \omega\tau)), \quad \tau = t - t_i, \quad (5.1)$$

где A — амплитуда, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации единичной длины, k — волновое число, ω — частота, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

По полю перемещений (5.1) определим вариацию (2.7) тензора деформаций ($\delta \mathbf{K}_i = \delta \mathbf{H}_i$ в рассматриваемых изотропных процессах):

$$\delta \mathbf{H}_i = \frac{1}{2} i k (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n})$$

и ее градиент, входящий в (2.8),

$$\nabla^i \delta \mathbf{H}_i = -\frac{1}{2} k^2 \mathbf{n} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \mathbf{n}). \quad (5.2)$$

Динамические уравнения (2.8) для изотропных материалов с обобщенным тензором жесткости, определяемым выражениями (4.6) или (4.9), после подстановки в них соотношений (5.1) и (5.2) преобразуются к виду

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{A}$ — акустический тензор среды, $c = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды с предварительными деформациями $\mathbf{H}_i$ определяется выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) - \Sigma_i \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{n}$ — обобщенный тензор Кристоффеля.

Тензоры $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i)$ определяются свойствами среды и зависят как от направления распространения волны, так и от предварительных деформаций $\mathbf{H}_i$. Из уравнений (5.3) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$, а вектор поляризации — его собственным вектором.

При отсутствии предварительных деформаций, когда начальное состояние совпадает с естественным, в изотропном материале в любом направлении распространяются две волны:

продольная со скоростью $c_l = \sqrt{\frac{N_1 + 2N_2}{3\rho_0}}$ и поперечная со скоростью $c_t = \sqrt{\frac{N_2}{2\rho_0}}$.

Рассмотрим предварительные деформации изотропного материала, расположенные в его упругих собственных подпространствах. В первом случае начальное состояние определим полем перемещений $\mathbf{u}_i = (\lambda(t_i) - 1) \mathbf{x}_i$, где λ — кратность удлинений при объемной деформации. В этом случае тензор логарифмических деформаций имеет диадное разложение

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = h_0 \mathbf{I}^0, \quad h_0 = \sqrt{3} \ln \lambda,$$

и расположен в первом упругом собственном подпространстве. Напряжения, определяемые по формулам (4.5), равны

$$\Sigma_i = \left(N_1 h_0 + \frac{1}{2} b_1 h_0^2 \right) \mathbf{I}^0. \quad (5.5)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$. Акустический тензор (5.4) с учетом выражений (4.6) и (5.5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 + \frac{b_1}{2}h_0 \right) h_0 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{3} b_2 h_0 \right) (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Акустический тензор (5.6) имеет два различных собственных значения, которые определяют скорости распространения продольной c_l и поперечных c_t волн:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_l^2 = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 + (b_1 + 2b_2)h_0 - \sqrt{3} \left(N_1 h_0 + \frac{b_1}{2} h_0^2 \right) \right), \\ \rho_0 c_t^2 = & \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{3} b_2 h_0 \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Фазовые скорости (5.7) не содержат константу b_3 , поэтому при использовании четырех-константной модели изотропного материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии, при предварительной чисто объемной деформации скорости распространения продольных и поперечных волн также определяются выражениями (5.7).

На рис. 1 приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,95$ (всестороннее сжатие). Здесь же пунктиром приведены угловые зависимости $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для случая, когда предварительные деформации отсутствуют. Графики построенных угловых зависимостей показывают, что всестороннее сжатие не приводит к анизотропии акустических свойств изотропного материала.

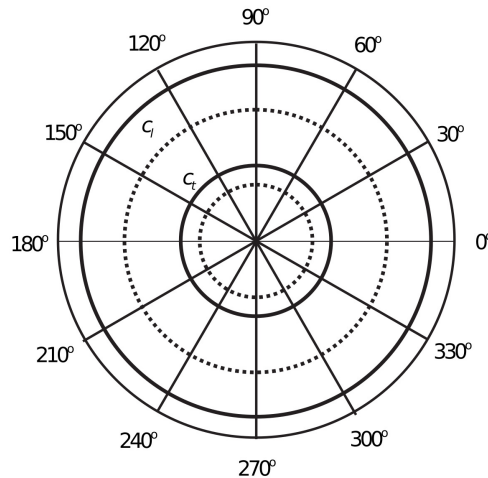


Рис. 1: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при предварительном всестороннем сжатии

Рассмотрим случай, когда начальное состояние определяется тензором деформаций

$$\mathbf{H}_i = \ln \lambda (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) = h_2 \mathbf{I}^2, \quad h_2 = \sqrt{2} \ln \lambda,$$

который расположен во втором собственном подпространстве и определяет состояние растяжения–сжатия по двум взаимно перпендикулярным направлениям. При таком деформированном состоянии напряжения (4.5) определяются выражениями

$$\Sigma_i = N_1 h_2 \mathbf{I}^2 + \frac{1}{6\sqrt{3}} b_2 h_2^2 \mathbf{I}^0 - \frac{1}{\sqrt{6}} b_3 h_2^2 \mathbf{I}^1. \quad (5.8)$$

Пусть волна распространяется в направлении, перпендикулярной плоскости деформаций, когда волновой вектор $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$. На основании соотношений (5.4), (4.6) и (5.8) акустический тензор определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_i) = & \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - 2b_3 \right) h_2^2 \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \\ & + \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \left(N_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В соответствии с выражением для акустического тензора (5.9) в изотропном материале, определяемом моделью (4.4)–(4.6), при рассматриваемых предварительных деформациях распространяется продольная волна с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_3$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_2}{\sqrt{3}} - 2b_3 \right) h_2^2 \right) \quad (5.10)$$

и две поперечные волны: с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_1$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t1}^2 = \frac{1}{2} \left(N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \quad (5.11)$$

и с вектором поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{e}_2$ и фазовой скоростью

$$\rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} \left(N_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 h_2 \right) \quad (5.12)$$

Из соотношений (5.10)–(5.12) следует, что рассматриваемое начальное состояние материала приводит к тому, что в отношении акустических свойств начально изотропный материал ведет себя как кристалл кубической сингонии. Выражения для фазовых скоростей (5.10)–(5.12) содержат константу b_3 , поэтому при использовании модели изотропного материала, удовлетворяющей частному постулату изотропии, фазовые скорости продольных и поперечных волн вычисляются по формулам:

$$\rho_0 c_l^2 = \frac{1}{3} \left(N_1 + 2N_2 - \frac{b_2}{2\sqrt{3}} h_2^2 \right), \quad \rho_0 c_{t1}^2 = \rho_0 c_{t2}^2 = \frac{1}{2} N_2. \quad (5.13)$$

Выражения (5.13) показывают, что использование четырехконстантной модели изотропного материала при предварительных деформациях растяжения–сжатия позволяет описать появление анизотропии акустических свойств материала только в отношении скорости распространения продольной волны. В этой модели не прогнозируется изменение величины фазовой скорости распространения поперечных волн по отношению к начальному недеформированному состоянию.

Эти выводы иллюстрируются рис. 2, на котором приведены угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ для различных направлений распространения волны, когда вектор волновой нормали расположен в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ и определяется выражением $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_3$. Предварительные деформации определяются значением $\lambda = 0,95$. На этих рисунках пунктиром приведены угловые зависимости $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при отсутствии предварительных деформаций. На рис. 2,а графики построены для модели материала (4.4)–(4.6), а на рис. 2,б — для модели материала (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии.

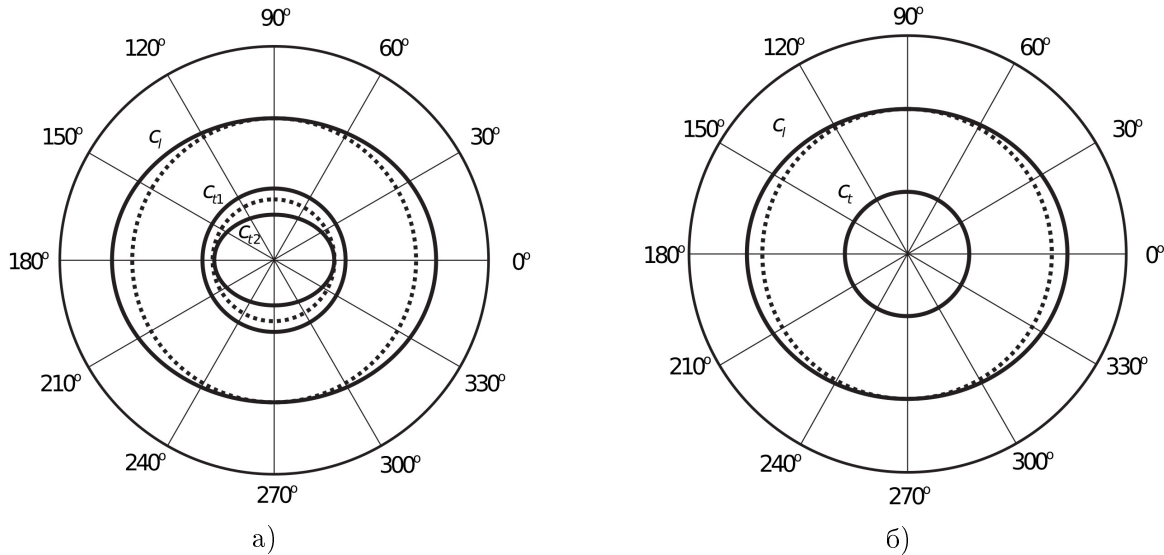


Рис. 2: Угловые зависимости фазовых скоростей $c_l(\varphi)$ и $c_t(\varphi)$ при предварительном растяжении-сжатии в плоскости $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: а) расчеты по модели материала (4.4)–(4.6), б) расчеты по модели материала (4.7)–(4.9)

Отметим также, что приведенные выражения для фазовых скоростей (5.7), (5.10)–(5.12) достаточны для определения всех пяти констант модели (4.4)–(4.6) по измеренным скоростям распространения продольных и поперечных волн. Выражения (5.7), (5.13), полученные для модели (4.7)–(4.9), удовлетворяющей частному постулату изотропии, также пригодны для идентификации этой модели по результатам динамических экспериментов.

6. Выводы

Для двух моделей гипотетического изотропного материала проведен анализ влияния предварительных конечных деформаций на скорости распространения акустических волн. Показано, что при предварительных чисто объемных деформациях, когда тензоры деформаций и напряжений расположены в первом упругом собственном подпространстве материала, расчеты по пятиконстантной и четырехконстантной моделям дают одинаковый результат.

При предварительных деформациях, расположенных во втором упругом собственном подпространстве, тензор напряжений имеет составляющую, расположенную в первом упругом собственном подпространстве, а его проекция во второе подпространство при использовании пятиконстантной модели несоосна девиатору деформаций. В этом случае оказывается, что начально изотропный материал в отношении акустических свойств приобретает анизотропию.

Полученный результат может быть использован в качестве критерия проверки гипотезы о выполнении в некотором конкретном материале частного постулата изотропии. Если в материале создать предварительное однородное деформированное состояние растяжения-сжатия

и провести эксперимент по измерению фазовых скоростей распространения волн в направлении, перпендикулярном плоскости деформаций, то в соответствии с (5.10)–(5.13) возможны два принципиально разных результата измерений. В первом случае будут зафиксированы три отклика на сигнал, возбуждающий волну, соответствующие одной продольной и двум поперечным волнам. В этом случае материал не удовлетворяет частному постулату изотропии. Во втором случае в ответ на возбуждающий сигнал будет только два отклика, соответствующие продольной и поперечной волнам. В этом случае можно утверждать, что материал удовлетворяет частному постулату изотропии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пасманик Л. А., Камышев А. В., Радостин А. В., Зайцев В. Ю. Параметры акустической неоднородности для неразрушающей оценки влияния технологии изготовления и эксплуатационной поврежденности на структуру металла // Дефектоскопия. 2020. № 12. С. 24-36.
2. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В., Ерёмин А. А. Резонансный метод обнаружения и идентификации расслоений в композитных пластинах ультразвуковыми бегущими волнами // Известия РАН. Механика твердого тела. 2020. № 6. С. 125-133.
3. Jiang Y., Li G., Qian L.-X., Liang S., Destrade M., Cao Y. Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // Biomech. Model. Mechanobiol. 2015. Vol. 14, N. 5. P. 1119-1128.
4. Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain // Arch. Ratio. Mech. Anal. 1961. Vol. 8. N 1. P. 263-296.
5. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / В двух томах. Киев: Наукова Думка, 1986.
6. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512 с.
7. Haupt P., Pao Y.-H., Hutter K. Theory of incremental motion in a body with initial elastoplastic deformation // J. Elasticity. 1992. Vol. 28. P. 193-221.
8. Destrade M., Ogden R. W. On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // J. Appl. Math. 2013. Vol. 78. N 5. P. 965-997.
9. Роменский Е. И., Лысь Е. В., Чеверда В. А., Эпов М. И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 5. С. 178-189.
10. Белянкова Т. И., Калинин В. В., Шейдаков Д. Н. Модули высших порядков в уравнениях динамики преднапряженного упругого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 3-15.
11. Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T. M. Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // Front. Earth Sci. 2022. Vol. 10.
12. Zhu Q., Burtin C., Binetruy C. Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behaviour // Polym. Test. 2014. Vol. 40. P. 178-186.
13. Бровко Г. Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.

14. Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49-53.
15. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
16. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика твердого деформируемого тела. Сибирское отделение АН СССР. Ин-т гидродинамики. 1984. В. 66. С. 113-125.
17. Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. В. 3. С. 420-435.
18. Ильюшин А. А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. В. 3. С. 399-411.
19. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 68-75.
20. Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M. The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals // Int. J. Appl. Mech. 2017. Vol. 9. No. 6. P. 1750080-1-1750080-15.
21. Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Постулат А. А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38-45.

REFERENCES

1. Pasmanik, L. A., Kamyshev, A. V., Radostin, A. V. & Zaitsev, V. Yu. 2020. "Acoustic inhomogeneity parameters for non-destructive evaluation of the influence of manufacturing technology and operational damage on the metal structure", *Defectoscopy*, no. 12, pp. 24-36.
2. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Golub, M. V. & Eremin, A. A. 2020. "Resonant Method for Detection and Identification of Delamination in Composite Plates by Elastic Guided Waves", *Mech. Solids*, vol. 55, no. 6, pp. 865-871.
3. Jiang, Y., Li, G., Qian, L.-X., Liang, S., Destrade, M. & Cao Y. 2015. "Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis", *Biomech. Model. Mechanobiol.*, vol. 14, n. 5, p. 1119-1128.
4. Truesdell, C. 1961. "General and exact theory of waves in finite elastic strain", *Arch. Ratio. Mech. Anal.*, vol. 8, n. 1, p. 263-296.
5. Guz', A. N. 1986. "Elastic waves in bodies with initial stresses", in two volumes, *Naukova Dumka, Kiev*, [in Russian].
6. Lurie, A. I. 2012. "Non-linear theory of elasticity", *North Holland*.
7. Haupt, P., Pao, Y.-H. & Hutter, K. 1992. "Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation", *J. Elast.*, vol. 28, p. 193-221.
8. Destrade, M. & Ogden R. W. 2013. "On stress-dependent elastic moduli and wave speeds", *J. Appl. Math.*, vol. 78, n. 5, p. 965-997.

9. Romenskii, E. I., Lys', E. V., Cheverda, V. A. & Epov, M. I. 2017. "Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 58, no. 5, pp. 914-923.
10. Belyankova, T. I., Kalinchuk, V. V. & Sheidakov, D. N. 2019. "Higher-order moduli in the equations of dynamics of a prestressed elastic body", *Mech. Solids*, n. 3, p. 3-15 [in Russian].
11. Yang, H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye & Müller, T. M. 2022. "Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media", *Front. Earth Sci.*, vol. 10.
12. Zhu, Q., Burtin, C. & Binetruy, C. 2014. "Acoustoelastic effect in polyamide 6: Linear and nonlinear behaviour" *Polym. Test.*, vol. 40, p. 178-186.
13. Brovko, G. L. 2017. "Constitutive relations of continuum mechanics: The development of the mathematical apparatus and the foundations of general theory", *Nauka, Moscow*. [in Russian].
14. Markin, A. A. & Tolokonnikov, L. A. 1987. "Measures of the finite deformation processes", *News of the North Caucasus Scientific Center of Higher Education. Natural Sciences*, n. 2, p. 49-53 [in Russian].
15. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015. "Thermomechanics of elastoplastic deformation", *Cambridge International Science Publishing, Cambridge*.
16. Ostrosablin, N. I. 1984. "On the structure of the elastic moduli tensor. Eigen elastic states", *Dynamics of a solid deformable body*, vol. 66, p. 113-125 [in Russian].
17. Rykhlevsky, J. 1984. "About Hooke's Law", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 48, n. 3, p. 420-435 [in Russian].
18. Ilyushin, A. A. 1960. "Questions of the general theory of plasticity", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 24, n. 3, p. 399-411.
19. Markin, A. A. & Sokolova M. Yu. 2019. "A variant of relations of the nonlinear elasticity", *Mech. Solids*, no. 6, p. 68-75 [in Russian].
20. Astapov, Y., Khristich, D., Markin, A. & Sokolova, M. 2017. "The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals", *Int. J. Appl. Mech.*, vol. 9, no. 6, p. 1750080-1-1750080-15.
21. Markin, A. A., Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2011. "A. A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations", *Mech. Solids*, vol. 46, no. 1, p. 30-35.

Получено: 27.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024