

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3, 539.8

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317

Моделирование механодиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений¹

Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов

Зверев Николай Андреевич — кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт) (г. Москва).

e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru

Земсков Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: azemskov1975@mail.ru

Яганов Владимир Михайлович — кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский институт) (г. Москва).

e-mail: avtofur@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается одномерная начально-краевая задача для полого ортотропного многокомпонентного цилиндра, находящегося под действием объемных механодиффузионных возмущений. Математическая модель включает в себя систему уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат, в которой учтены релаксационные диффузионные эффекты, подразумевающие конечные скорости распространения диффузионных потоков.

Поставленная задача решается методом эквивалентных граничных условий, согласно которому рассматривается некоторая вспомогательная задача, решение которой может быть получено с помощью разложения в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач и представляющие собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. Рассмотрен расчетный пример для трехкомпонентного полого цилиндра.

Ключевые слова: механодиффузия, нестационарные задачи, преобразование Лапласа, функции Грина, метод эквивалентных граничных условий, полый цилиндр.

Библиография: 36 названий.

Для цитирования:

Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов. Моделирование механодиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 296–317.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-21-00189, <https://rscf.ru/project/23-21-00189/>).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3, 539.8

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317

Modeling of elastic diffusion processes in a hollow cylinder under the action of unsteady volume perturbations

N. A. Zverev, A. V. Zemskov, V. M. Yaganov

Zverev Nikolay Andreevich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute) (Moscow).

e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru

Zemskov Andrey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute); Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: azemskov1975@mail.ru

Yaganov Vladimir Mikhailovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Aviation Institute (National Research Institute) (Moscow).

e-mail: avtofur@yandex.ru

Abstract

A one-dimensional initial-boundary value problem for a hollow orthotropic multicomponent cylinder under the action of volumetric elastic diffusion perturbations is considered. The mathematical model includes a system of equations of elastic diffusion in a cylindrical coordinate system, which takes into account relaxation diffusion effects, implying finite propagation velocities of diffusion flows.

The problem is solved by the method of equivalent boundary conditions. To do this, we consider some auxiliary problem, the solution of which can be obtained by expanding into series in terms of eigenfunctions of the elastic diffusion operator. Next, we construct relations that connect the right-hand sides of the boundary conditions of both problems, which are a system of Volterra integral equations of the first kind. A calculation example for a three-component hollow cylinder is considered.

Keywords: elastic diffusion, unsteady problems, Laplace transform, Green's functions, method of equivalent boundary conditions, hollow cylinder.

Bibliography: 36 titles.

For citation:

N. A. Zverev, A. V. Zemskov, V. M. Yaganov, 2024. "Modeling of elastic diffusion processes in a hollow cylinder under the action of unsteady volume perturbations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 296–317.

1. Введение

При проектировании конструкций важнейшей проблемой, связанной с прочностью материалов, является учет влияния диффузионного движения частиц в твердом теле на процесс деформирования. В частности, в работе рассматриваются вопросы, касающиеся моделирования связанных механодиффузионных процессов в телах цилиндрической формы. Данные тела являются основой различных трубопроводов (нефте- и газопроводы, системы отопления), используются в качестве валов и втулок в конструкциях, имеющих очень широкий спектр применения в технике и эксплуатирующихся в условиях взаимодействия с агрессивными средами.

Таким образом, учет взаимодействия полей очень важен при проектировании конструкций и их отдельных элементов, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий.

Вопрос о взаимодействии механического и диффузионного полей имеет уже почти столетнюю историю, но и в настоящее время остается актуальным, так как круг исследуемых вопросов в этой области постоянно расширяется за счет того, что в современных моделях учитываются взаимосвязь все большего и большего количества полей различной физической природы. Например, к механическому и диффузионному полям могут быть добавлены, температурные, электромагнитные и химические поля.

В настоящее время практически все модели тепломассопереноса учитывают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений, что обусловлено релаксацией диффузионных потоков [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Это особенно важно при описании высокочастотных и импульсных процессов. В представленных выше работах используются модели: Каттанео, Лорда-Шульмана, Грина-Линсди, Грина-Нагди и т. д. Отдельно можно выделить статьи [1, 10, 17, 19], где для описания релаксационных эффектов используется аппарат дробного дифференцирования.

Несмотря на большое разнообразие имеющихся в настоящее время моделей механодиффузии и термомеханодиффузии, по-прежнему очень сложно обстоит вопрос, связанный с непосредственным решением соответствующих начально-краевых задач. Анализ публикаций показывает, что здесь наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат.

Следует отметить работы [1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], в которых рассматриваются методы решения указанных задач в криволинейных (в основном в цилиндрической или сферической) системах координат. При их аналитическом решении основной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля. Этот вопрос достаточно основательно рассмотрен в работе [29], посвященной моделям теплопереноса в сплошных средах, в том числе в телах, имеющих цилиндрическую и сферическую формы. Применительно к связанным задачам механодиффузии и термомеханодиффузии данный вопрос на сегодняшний день в известных научных работах не обсуждался.

При решении нестационарных задач для сплошных сред используются, как правило, интегральные преобразования Лапласа по времени, Фурье и Ганкеля по координате и т. д., что продемонстрировано в работах [1, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 20]. При этом обращение интегрального преобразования Лапласа осуществляется численно с помощью метода Дурбина (и его модификаций) [4, 5, 11, 12, 14, 15, 17, 18], алгоритма Gaver–Stehfast [20], а также с помощью квадратурных формул, основанных на использовании сумм Римана и т. д. [1, 7, 10].

Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, отметим только, что такие алгоритмы подходят лишь для определенного класса функций. При этом изображения Лапласа, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного метода, для нахождения их оригиналов, далеко не всегда представляется возможным.

Альтернативные подходы, основанные на использовании методов конечных элементов [6, 21] и конечных разностей [22], тоже не решают проблему, потому что, например, при использовании конечно-разностных схем существенным вопросом является анализ этих схем на устойчивость, что, в свою очередь, влияет на сходимость решения, полученного с помощью таких схем, к решению исходной задачи. Это достаточно сложная математическая проблема, связанная с установлением непрерывной зависимости конечно-разностных схем от входных данных, к которым относятся коэффициенты дифференциальных операторов, а также параметры начальных и граничных условий. Такие же проблемы могут возникнуть и при использовании метода конечных элементов. Таким образом, вопросы, связанные с разработкой аналитических методов решения нестационарных задач, и, в частности, задач механодиффу-

зии, также являются актуальными.

В работе рассмотрена модель, описывающая одномерные нестационарные механодиффузионные процессы в полом цилиндре, и предложен алгоритм решения, основанный на использовании преобразования Лапласа по времени, разложении в ряды по собственным функциям упругодиффузионного оператора и методе эквивалентных граничных условий. Данный подход позволяет выразить решение поставленной задачи через известное решение некоторой вспомогательной задачи данного класса, что существенно упрощает проблему обращения преобразования Лапласа, сведя ее к обращению рациональных функций с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

2. Постановка задачи

Рассматривается полярно-симметричная задача механодиффузии для многокомпонентного ортотропного полого цилиндра, находящегося под действием нестационарных объемных возмущений. Под действием приложенных нагрузок в деформируемом теле возникает восходящий диффузионный поток (эффект Горского), который в свою очередь, вследствие вызываемых им объемных изменений, также влияет на напряженно-деформированное состояние среды.

Математическая постановка задачи, описывающая вышеуказанные физические процессы, включает в себя: линейризованное уравнение движения полого цилиндра, закон сохранения массы в локальной форме, а также N линейризованных уравнений массопереноса с учетом релаксации диффузионных потоков [30, 31, 32, 33]. Замыкают математическую постановку задачи граничные условия. Начальные условия принимаются нулевыми, поскольку изначально цилиндрическое тело находилось в состоянии покоя.

$$\ddot{u} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta'_j + F_1, \quad \eta_{N+1} = - \sum_{q=1}^N \eta_q, \quad (1)$$

$$\dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q = -\Lambda_q \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left(\eta''_q + \frac{\eta'_q}{r} \right) + F_{q+1};$$

$$\left(u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \left(u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad (2)$$

$$\eta_q|_{r=R_1} = \eta_q|_{r=1} = 0.$$

Безразмерные величины в (1) и (2) связаны с размерными следующим образом:

$$u = \frac{u_r}{r_2}, \quad \tau = \frac{Ct}{r_2}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{r_2}, \quad c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}},$$

$$R_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad r = \frac{r^*}{r_2}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{c_{11}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{Cr_2}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho Cr_2 RT_0}.$$

Здесь t – время; u_r – радиальная компонента вектора механических перемещений; r^* – радиальная координата; ρ – плотность сплошной среды; T_0 – температура сплошной среды; $D_{11}^{(q)}$ – коэффициент диффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; $\eta_q = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q -го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициент, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных процессов; R – универсальная газовая постоянная; F_1 –

удельная плотность объёмных сил, F_{q+1} – объёмная плотность источников массопереноса; r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы полого цилиндра.

3. Алгоритм решения задачи

Функции Грина. Задача (1), (2) решается методом эквивалентных граничных условий [30, 31, 32, 34], согласно которому вначале рассматривается вспомогательная задача, состоящая из исходной системы дифференциальных уравнений и новых граничных условий вида

$$\left(u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=R_1} = f_{11}^*(\tau), \quad \left(u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_{12}^*(\tau), \quad (3)$$

$$\eta_q|_{r=1} = \eta_q|_{r=R_1} = 0,$$

где функции $f_{1j}^*(\tau)$, стоящие в правых частях граничных условий (3), подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) ищется в виде

$$u(r, \tau) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(r, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \int_0^\tau [G_{111}(r, \tau - t) f_{11}^*(t) + G_{112}(r, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt, \quad (4)$$

$$\eta_q(r, \tau) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{q+1,k}(r, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt + \int_0^\tau [G_{q+1,11}(r, \tau - t) f_{11}^*(t) + G_{q+1,12}(r, \tau - t) f_{12}^*(t)] dt.$$

Здесь $G_{kml}(r, \tau)$ – поверхностные, а $G_{km}(r, \xi, \tau)$ – объёмные функции Грина задачи (1), (3). Поверхностные функции Грина удовлетворяют следующим начально-краевым задачам:

$$\left(G''_{1ml} + \frac{G'_{1ml}}{r} - \frac{G_{1ml}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,ml} = \ddot{G}_{1ml},$$

$$-\Lambda_q \left(G'''_{1ml} + \frac{2G''_{1ml}}{r} - \frac{G'_{1ml}}{r^2} + \frac{G_{1ml}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,ml} + \frac{G'_{q+1,ml}}{r} \right) = \dot{G}_{q+1,ml} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,ml}. \quad (5)$$

$$\left(G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml}|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta_{1l} \delta(\tau),$$

$$\left(G'_{1ml} + \frac{1}{r} G_{1ml} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,ml} \right) \Big|_{r=R_1} = \delta_{1m} \delta_{2l} \delta(\tau), \quad G_{q+1,ml}|_{r=R_1} = \delta_{q+1,m} \delta_{2l} \delta(\tau). \quad (6)$$

Объёмные функции Грина являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \ddot{G}_{1m}, \\ -\Lambda_q \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) = \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad G_{q+1,m} \Big|_{r=1} = 0, \\ \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad G_{q+1,m} \Big|_{r=R_1} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия в обеих задачах полагаются нулевыми.

Решение задачи (5), (6) найдено в работе [30]. Выражения для поверхностных функций Грина приведены в Приложении 1. Изложим здесь алгоритм решения задачи (7), (8). Вначале применяем к уравнениям (7) и граничным условиям (8) интегральное преобразование Лапласа по времени. Получаем (индекс L обозначает трансформанту Лапласа, $G_{km}^L = G_{km}^L(r, \xi, s)$, s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned} \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) = s^2 G_{1m}^L, \\ -\Lambda_q \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) = (s + \tau_q s^2) G_{q+1,m}^L; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad G_{q+1,m}^L \Big|_{r=1} = 0, \\ \left(G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad G_{q+1,m}^L \Big|_{r=R_1} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение задачи (9), (10) ищется в виде рядов

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^L(r, \xi, s) \\ G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}^L(\xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,mn}^L(\xi, s) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}^L(\xi, s) \\ G_{q+1,mn}^L(\xi, s) \end{array} \right\} = \frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \int_{R_1}^1 \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^L(r, \xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\} dr, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Psi_1(\lambda_n r) = Y_0(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_1(\lambda_n r),$$

$$\Psi_0(\lambda_n r) = Y_0(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n) Y_0(\lambda_n r),$$

$$\Psi(\lambda_n) = \frac{1}{2} [\Psi_1(\lambda_n)]^2 - \frac{R_1^2}{2} [\Psi_1(\lambda_n R_1)]^2,$$

где λ_n – числа, удовлетворяющие уравнению $\Psi_0(\lambda_n R_1) = 0$, $J_\nu(\lambda_n r)$ – функция Бесселя I рода порядка ν , $Y_\nu(\lambda_n r)$ – функция Бесселя II рода порядка ν .

Для нахождения коэффициентов рядов (11) первое уравнение в (9) домножаем на $\Psi_1(\lambda_n r)$, а второе – на $\Psi_0(\lambda_n r)$ и интегрируем в промежутке $[R_1, 1]$. При этом для преобразования дифференциальных операторов используем формулы, полученные в работе [30]:

$$\begin{aligned} & \int_{R_1}^1 r \left[G_{1m}'^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_0(\lambda_n r) dr = \lambda_n \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s), \\ & \int_{R_1}^1 r G_{q+1,m}'^L(r, \xi, s) \Psi_1(\lambda_n r) dr = r \Psi_1(\lambda_n r) G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Big|_{R_1}^1 - \lambda_n \Psi(\lambda_n) G_{q+1,mn}^L(\xi, s), \\ & \int_{R_1}^1 \left[G_{1m}''^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}'^L(r, \xi, s)}{r} - \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r^2} \right] \Psi_1(\lambda_n r) r dr = -\lambda_n^2 \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s) + \\ & \quad + r \left[G_{1m}'^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_1(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^1, \\ & \int_{R_1}^1 \left[G_{q+1,m}''^L(r, \xi, s) + \frac{G_{q+1,m}'^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_0(\lambda_n r) r dr = -\lambda_n^2 \Psi(\lambda_n) G_{q+1,mn}^L(\xi, s) + \\ & \quad + \lambda_n r \Psi_1(\lambda_n r) G_{q+1,m}^L(r, \xi, s) \Big|_{R_1}^1, \\ & \int_{R_1}^1 \left[G_{1m}'''^L(r, \xi, s) + \frac{2G_{1m}''^L(r, \xi, s)}{r} - \frac{G_{1m}'^L(r, \xi, s)}{r^2} + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r^3} \right] \Psi_0(\lambda_n r) r dr = \\ & = \lambda_n r \left[G_{1m}'^L(r, \xi, s) + \frac{G_{1m}^L(r, \xi, s)}{r} \right] \Psi_1(\lambda_n r) \Big|_{R_1}^1 - \lambda_n^3 \Psi(\lambda_n) G_{1mn}^L(\xi, s). \end{aligned}$$

В результате указанных преобразований краевая задача (9), (10) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно $G_{km}^L(\lambda_n, \xi, s)$, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & k_{1n}(s) G_{1mn}^L(\xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,mn}^L(\xi, s) = F_{1n}(\xi), \\ & -\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1mn}^L(\xi, s) + k_{q+1,n}(s) G_{q+1,mn}^L(\xi, s) = F_{q+1,n}(\xi), \\ & F_{1n}(\xi) = \frac{\delta_{1m}}{\Psi(\lambda_n)} \xi \Psi_1(\lambda_n \xi), \quad F_{q+1,n}(\xi) = \frac{\delta_{q+1,m}}{\Psi(\lambda_n)} \xi \Psi_0(\lambda_n \xi), \\ & k_{1n}(s) = \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1,n}(s) = D_q \lambda_n^2 + \tau_q s^2 + s. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} G_{11n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) P_{11n}(s)}{\Psi(\lambda_n) P_n(s)}, \quad G_{1,q+1,n}^L(\xi, s) = \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi) P_{1,q+1,n}(s)}{\Psi(\lambda_n) P_n(s)}, \\ G_{q+1,1n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) P_{q+1,1n}(s)}{\Psi(\lambda_n) Q_{qn}(s)}, \\ G_{q+1,p+1,n}^L(\xi, s) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \left[\frac{\delta_{qp}}{k_{q+1,n}(s)} + \frac{P_{q+1,p+1,n}(s)}{Q_{qn}(s)} \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_n(s) &= k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s), \quad Q_{qn}(s) = P_n(s) k_{q+1,n}(s), \\
 P_{1,q+1,n}(s) &= \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j \Pi_{jn}(s), \quad P_{q+1,kn}(s) = \Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kn}(s), \\
 P_{11n}(s) &= \Pi_n(s), \quad \Pi_{jn}(s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1,n}(s), \quad \Pi_n(s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1,n}(s).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Так как функции $P_n(s)$, $P_{1kn}(s)$, $k_{1n}(s)$ и $Q_{qn}(s)$ являются многочленами от s , то решения (12) – рациональные функции. Поэтому переход в пространство оригиналов осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 G_{11n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{11n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{1,q+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{1,q+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{q+1,1n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,1n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau), \\
 G_{q+1,p+1,n}(\xi, \tau) &= \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{l=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_{qln} \tau)}{k_{q+1,n}(\chi_{qln})} + \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,n}^{(k)}(s_{kn}) \exp(s_{kn} \tau) \right].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь s_{kn} – нули полинома $P_n(s)$, а χ_{qln} – дополнительные нули полинома $k_{q+1,n}(s)$, определяемые по формулам

$$\chi_{q1n} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}, \quad \chi_{q2n} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_q \lambda_n^2}}{2\tau_q}. \tag{15}$$

Таким образом, в соответствии с (11), объемные функции Грина имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}(r, \xi, \tau) \\ G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} G_{1mn}(\xi, \tau) \Psi_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,mn}(\xi, \tau) \Psi_0(\lambda_n r) \end{array} \right\},$$

где коэффициенты этих рядов находятся по формулам (14), с учетом равенств (13) и (15).

Метод эквивалентных граничных условий. Для нахождения функций $f_{1j}^*(\tau)$ подставим решение (4) задачи (1), (3) в граничные условия (2). Получаем уравнения относительно искомых функций $f_{1k}^*(\tau)$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(1, \tau - t) + c_{12}G_{111}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(1, \tau - t) + c_{12}G_{112}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \varphi_1(\tau), \\
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(R_1, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1}G_{111}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(R_1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(R_1, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1}G_{112}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(R_1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \varphi_2(\tau);
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau) &= - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \varphi_{1k}(1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \\
\varphi_2(\tau) &= - \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau \varphi_{2k}(R_1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\varphi_{1k}(1, \xi, \tau - t) = G'_{1k}(1, \xi, \tau - t) + c_{12}G_{1k}(1, \xi, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}(1, \xi, \tau - t),$$

$$\varphi_{2k}(R_1, \xi, \tau - t) = G'_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) + \frac{c_{12}}{R_1}G_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}(R_1, \xi, \tau - t).$$

Соотношения (16), (17) представляют собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. С учетом граничных условий (6)

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(1, \tau - t) + G_{111}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(1, \tau - t) + G_{112}(1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \\
& = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_{11}^*(t) dt = f_{11}^*(\tau), \\
& \int_0^\tau \left[G'_{111}(R_1, \tau - t) + \frac{1}{R_1}G_{111}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,11}(R_1, \tau - t) \right] f_{11}^*(t) dt + \\
& + \int_0^\tau \left[G'_{112}(R_1, \tau - t) + \frac{1}{R_1}G_{112}(R_1, \tau - t) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,12}(R_1, \tau - t) \right] f_{12}^*(t) dt = \\
& = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_{12}^*(t) dt = f_{12}^*(\tau),
\end{aligned}$$

а с учетом (8)

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \\ \varphi_2(\tau) &= \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^\tau G_{1k}(R_1, \xi, \tau - t) F_k(\xi, t) d\xi dt.\end{aligned}\tag{18}$$

Поэтому система (16) запишется так:

$$\begin{aligned}f_{11}^*(\tau) + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{111}(1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + (c_{12} - 1) \int_0^\tau G_{112}(1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt &= \varphi_1(\tau), \\ \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{111}(R_1, \tau - t) f_{11}^*(t) dt + f_{12}^*(\tau) + \frac{c_{12} - 1}{R_1} \int_0^\tau G_{112}(R_1, \tau - t) f_{12}^*(t) dt &= \varphi_2(\tau).\end{aligned}$$

В полученных равенствах, в слагаемых, содержащих интегралы, выполним интегрирование по частям. Учитывая тот факт, что любую дифференцируемую функцию $f(\tau)$ можно представить в виде (точка обозначает производную по времени)

$$f(\tau) - f(0) = \int_0^\tau \dot{f}(t) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned}\int_0^\tau a_{11}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{12}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_1(\tau) - \sum_{j=1}^2 a_{1j}(\tau) f_{1j}^*(0), \\ \int_0^\tau a_{21}(\tau - t) \dot{f}_{11}^*(t) dt + \int_0^\tau a_{22}(\tau - t) \dot{f}_{12}^*(t) dt &= \varphi_2(\tau) - \sum_{j=1}^2 a_{2j}(\tau) f_{1j}^*(0).\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}a_{11}(\tau - t) &= (c_{12} - 1) \tilde{G}_{111}(1, \tau - t) + 1, & a_{12}(\tau - t) &= (c_{12} - 1) \tilde{G}_{112}(1, \tau - t), \\ a_{21}(\tau - t) &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} \tilde{G}_{111}(R_1, \tau - t), & a_{22}(\tau - t) &= \frac{c_{12} - 1}{R_1} \tilde{G}_{112}(R_1, \tau - t) + 1,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\tilde{G}_{11i}(r, \tau) = \int_0^\tau G_{11i}(r, t) dt.$$

Решение системы (19) будет зависеть от $f_{1i}^*(0)$. Эти функции в нуле, вообще говоря, не определены и могут принимать любые значения. Поэтому доопределим их, исходя из условия сопряжения начальных и граничных условий в угловых точках рассматриваемой области. С учетом нулевых начальных условий будем полагать:

$$f_{1i}^*(0) = 0.$$

Система интегральных уравнений (19) решается численно. Для аппроксимации интегралов используется формула средних прямоугольников [30, 34]

$$\int_0^{t_m} a_{ij}(t_m - t) f_{1l}^*(t) dt = h A_{ij}^{(1/2)} y_l^{(m-1/2)} + h S_{ijl}^{(m-1/2)},$$

где

$$t_m = mh, \quad t_{m-1/2} = \left(m - \frac{1}{2}\right) h,$$

$$S_{ijl}^{(m-1/2)} = \sum_{k=1}^{m-1} A_{ij}^{(m-k+1/2)} y_l^{(k-1/2)} \quad (\forall m = \overline{0, N_\tau}),$$

$$y_l^{(m)} = \frac{\partial f_{1l}^*(t_m)}{\partial \tau}, \quad y_l^{(m-1/2)} = \frac{\partial f_{1l}^*(t_m - t_{1/2})}{\partial \tau},$$

$$A_{ij}^{(m)} = a_{ij}(t_m), \quad A_{ij}^{(m-k+1/2)} = a_{ij}(t_m - t_{k-1/2}).$$

Таким образом, система интегральных уравнений (19) сводится к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1/2} = \mathbf{b}_{m-1/2}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1/2)} & A_{12}^{(1/2)} \\ A_{21}^{(1/2)} & A_{22}^{(1/2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{m-1/2} = \begin{pmatrix} y_1^{(m-1/2)} \\ y_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{m-1/2} = \begin{pmatrix} b_1^{(m-1/2)} \\ b_2^{(m-1/2)} \end{pmatrix}, \quad b_i^{(m-1/2)} = \frac{1}{h} \left(\varphi_i(t_m) - h S_{i11}^{(m-1/2)} - h S_{i22}^{(m-1/2)} \right),$$

решения которых находим по формулам Крамера:

$$y_1^{(m-1/2)} = \frac{b_1 A_{22}^{(1/2)} - b_2 A_{12}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}}, \quad y_2^{(m-1/2)} = \frac{b_2 A_{11}^{(1/2)} - b_1 A_{21}^{(1/2)}}{A_{11}^{(1/2)} A_{22}^{(1/2)} - A_{12}^{(1/2)} A_{21}^{(1/2)}}.$$

В результате, решение исходной задачи (1), (2) в точках $\tau = t_i$ запишется так:

$$u(r, t_i) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} G_{1k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i \tilde{G}_{11l}(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)},$$

$$\eta_q(r, t_i) = \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \int_0^{t_i} G_{q+1,k}(r, \xi, t_i - t) F_k(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ h \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i \tilde{G}_{q+1,l}(r, t_{i-m+1/2}) y_l^{(m-1/2)}.$$
(21)

4. Предельные переходы к несвязанным и статическим задачам

Полагая $\tau_q = 0$, получаем классическую модель механодиффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При этом степень полинома $P(\lambda_n, s)$ изменяется с $2N + 2$ до $N + 2$, а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:

$$\chi_{q1n} \rightarrow -D_q \lambda_n^2, \quad \chi_{q2n} \rightarrow -\infty \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Тогда:

$$\exp(\chi_{q1n}\tau) \rightarrow \exp(-D_q \lambda_n^2 \tau), \quad \exp(\chi_{q2n}\tau) \rightarrow 0 \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Полагая далее $\alpha_p = 0$, переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для полого цилиндра в задаче (1), (2). Вычисляя соответствующие пределы в (13) и (14) при $\alpha_q \rightarrow 0$, получаем (учитывая, что $\Lambda_q \rightarrow 0$ при $\alpha_q \rightarrow 0$) следующие выражения для функций Грина в несвязанных задачах упругости и диффузии (множители Ω_{ln} приведены в Приложении):

$$G_{ln}^u(\tau) = \frac{\Omega_{ln} \sin \lambda_n \tau}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n}, \quad G_{lqn}^\eta(\tau) = \frac{\lambda_n D_q \Omega_{ln}}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})},$$

$$\tilde{G}_n^u(\xi, \tau) = \frac{\xi \Psi_1(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{\lambda_n \Psi(\lambda_n)}, \quad \tilde{G}_{qn}^\eta(\xi, \tau) = \frac{\xi \Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\lambda_n, \chi_{jqn})}.$$

Для перехода к статическим механодиффузионным режимам, полагаем в уравнениях (1) и граничных условиях (3)

$$f_{1l}^*(\tau) = \tilde{f}_{1l}^* H(\tau), \quad f_{1l}(\tau) = \tilde{f}_{1l} H(\tau), \quad f_{q+1,l}(\tau) = \tilde{f}_{q+1,l} H(\tau),$$

$$F_k(\xi, \tau) = \tilde{F}_k(\xi) H(\tau).$$

Здесь $H(\tau)$ – функция Хевисайда, \tilde{f}_{1l}^* , \tilde{f}_{ml} – статические нагрузки.

Обозначим функции Грина статической задачи через G_{mk}^{st} . Тогда, используя предельный переход (символ «*» обозначает свертку по времени)

$$G_{mk}^{st}(r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(r, \tau) * H(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s G_{mk}^L(r, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(r, s),$$

связывающий функции Грина статической и динамической задач [34, 35], из формул (12) и (13) получаем статические функции Грина для полого цилиндра в виде

$$G_{11}^{st}(r, \xi) = \xi \Phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_1(\lambda_n r),$$

$$G_{1,q+1}^{st}(r, \xi) = \xi \alpha_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^3} \Psi_1(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,1}^{st}(r, \xi) = \xi \Lambda_q \Phi_q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_1(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n} \Psi_0(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,p+1}^{st}(r, \xi) = \frac{\xi (\delta_{qp} + \Lambda_q \alpha_p \Phi_p)}{D_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_0(\lambda_n \xi)}{\Psi(\lambda_n) \lambda_n^2} \Psi_0(\lambda_n r),$$

где величины Φ_q и Φ определяются по формулам

$$\Phi = \frac{\prod_{j=1}^N D_j}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}, \quad \Phi_q = \frac{\prod_{k=1, k \neq q}^N D_k}{\prod_{j=1}^N D_j - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^N D_k}.$$

Статический аналог уравнений (19) и формул (18), (20) в этом случае записывается следующим образом:

$$\tilde{a}_{11}\tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{12}\tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{a}_{21}\tilde{f}_{11}^* + \tilde{a}_{22}\tilde{f}_{12}^* = \tilde{\varphi}_2, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= 1 + (c_{12} - 1)G_{111}^{st}(1), & \tilde{a}_{12} &= (c_{12} - 1)G_{112}^{st}(1), \\ \tilde{a}_{21} &= \frac{c_{12} - 1}{R_1}G_{111}^{st}(R_1), & \tilde{a}_{22} &= 1 + \frac{c_{12} - 1}{R_1}G_{112}^{st}(R_1), \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_1 = (1 - c_{12}) \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(1, \xi) F_k(\xi) d\xi, \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{1 - c_{12}}{R_1} \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}^{st}(R_1, \xi) F_k(\xi) d\xi.$$

Решение (22) находим по формулам Крамера

$$\tilde{f}_{11}^* = \frac{\tilde{a}_{22}\tilde{\varphi}_1 - \tilde{a}_{12}\tilde{\varphi}_2}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}, \quad \tilde{f}_{12}^* = \frac{\tilde{a}_{11}\tilde{\varphi}_2 - \tilde{a}_{21}\tilde{\varphi}_1}{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21}}.$$

Таким образом, статический аналог формул (21) запишется так:

$$\begin{aligned} u(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{1k}(r, \xi) \tilde{F}_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{11l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*, \\ \eta_q(r) &= \sum_{k=1}^{N+1} \int_{R_1}^1 \tilde{G}_{q+1,k}(r, \xi) \tilde{F}_k(\xi) d\xi + \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^i G_{q+1,1l}^{st}(r) \tilde{f}_{1l}^*. \end{aligned} \quad (23)$$

5. Пример

В качестве примера рассматриваем трехкомпонентный сплав ($N = 2$, независимые компоненты: цинк 1,0% и медь 4,5%, диффундирующие в дюралюминии), физические характеристики которого следующие [36]:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad C_{66} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad T_0 = 700\text{К}, \quad \rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad n_0^{(2)} = 0.045, \\ L &= 0.5 \cdot 10^{-2} \text{м}, \quad \alpha_1^{(1)} = 6.55 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \alpha_1^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \\ D_1^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad D_1^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-15} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad n_0^{(1)} = 0.01, \quad m^{(1)} = 0.065 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}. \end{aligned}$$

Положим для расчета

$$F_1(r, \tau) = \Psi_{01}(\lambda_1 r) H(\tau), \quad F_2(r, \tau) = H(\tau). \quad (24)$$

Результаты вычислений представлены на рисунках 1–9.

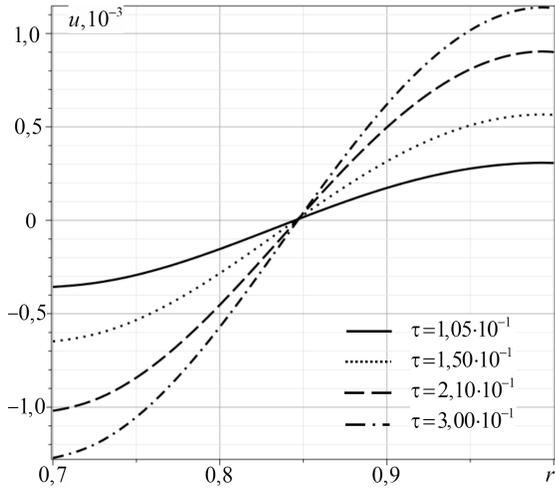


Рис. 1: Перемещения $u(r, \tau)$, соответствующие решению упругодиффузионной задачи.

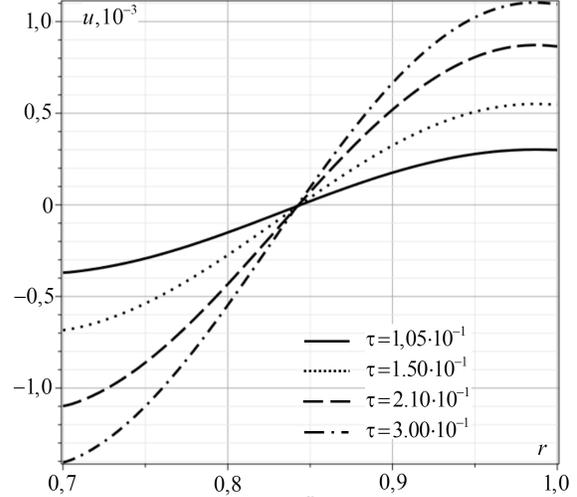


Рис. 2: Перемещения $u(r, \tau)$, соответствующие решению упругой задачи.

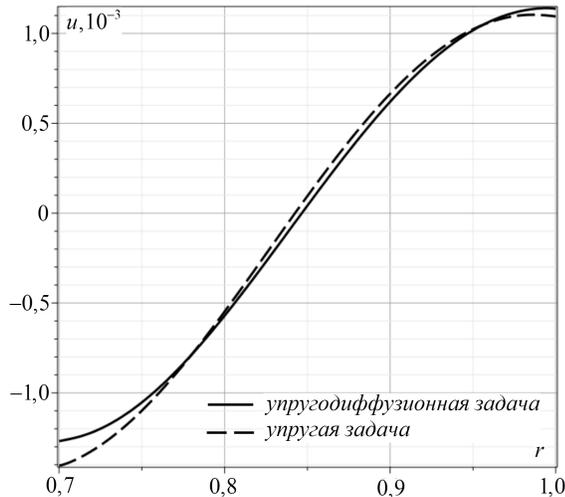


Рис. 3: Сравнение перемещений упругой и упругодиффузионной задач $u(r, \tau)$.

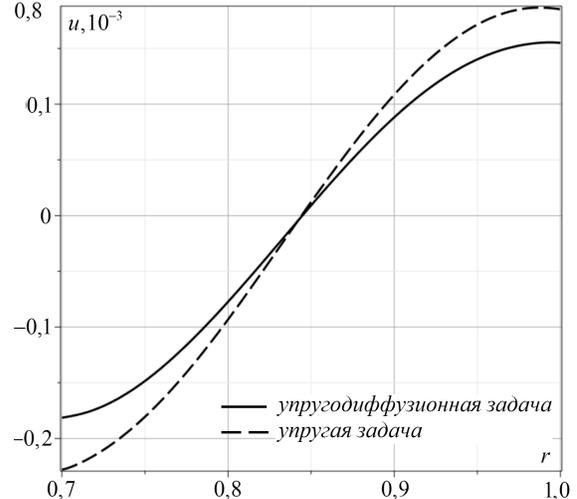


Рис. 4: Сравнение перемещений упругой и упругодиффузионной задач $u(r, \tau)$.

На рисунках 3 и 4 сравниваются поля механических перемещений для упругой задачи (пунктирная линия) и упругодиффузионной задачи. Видно, что диффузионные процессы при заданных нагрузках (24) с течением времени начинают влиять на механическое поле. Однако, как отмечалось ранее [34], это отличие проявляется преимущественно в виде сдвига упругих и упругодиффузионных нестационарных колебаний друг относительно друга. Амплитуды этих колебаний примерно одинаковы, что видно на рисунках 1 и 2. При этом релаксационные диффузионные эффекты не влияют на поле механических перемещений. И в том, и в другом случае, решение имеет вид, представленный на рисунках 3 и 4.

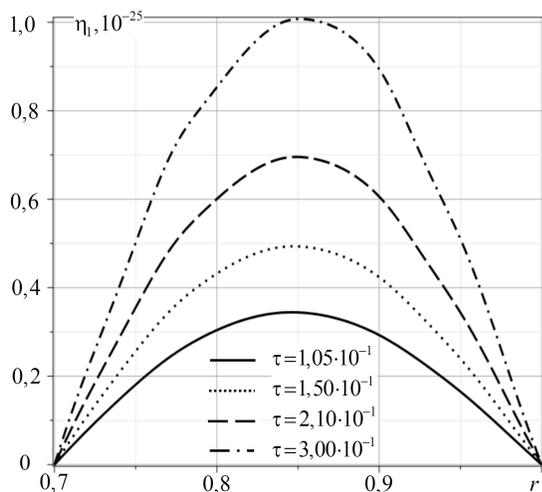


Рис. 5: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ с учетом релаксации (начальные моменты времени)

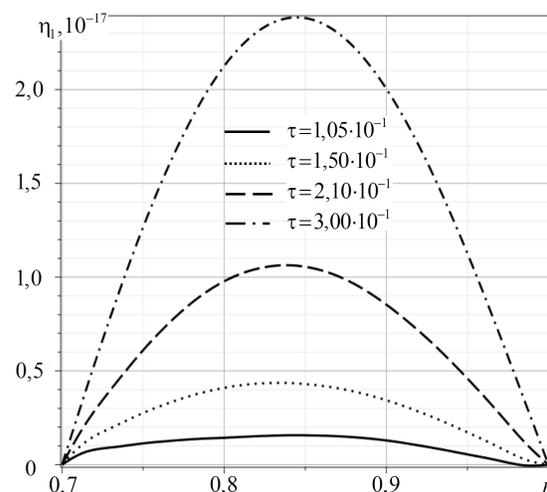


Рис. 6: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ без учета релаксации (начальные моменты времени).

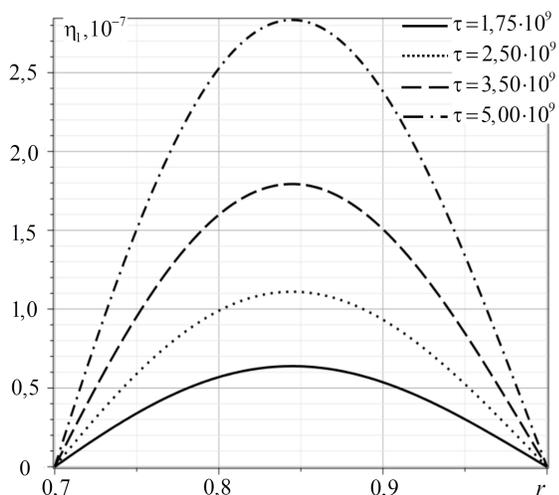


Рис. 7: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ с учетом релаксации (развитие процесса)

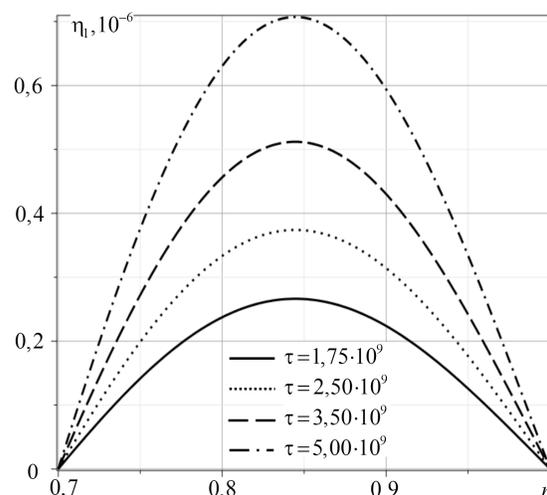


Рис. 8: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ без учета релаксации (развитие процесса).

На рисунках 5–9, на примере первой компоненты вещества (цинк), показаны различные стадии развития процесса диффузии с учетом релаксации и без учета релаксации диффузионных потоков. Видно, сколь существенно влияет релаксация на кинетику массопереноса в начальные моменты времени (рисунки 5, 6), ее постепенное уменьшение с течением времени (рисунки 7, 8) и полное затухание (рисунок 9). Для второй компоненты вещества (медь) имеют место аналогичные результаты. Таким образом, релаксационные эффекты влияют на кинетику массопереноса только в начальные моменты времени, соизмеримые с временами релаксации компонент в составе сплошной среды.

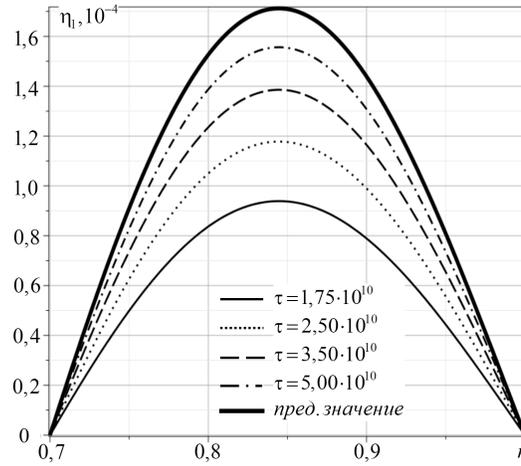


Рис. 9: Приращение концентрации цинка $\eta_1(r, \tau)$ (предельное развитие процесса).

6. Заключение

Предложена модель и разработан алгоритм решения нестационарной задачи для ортотропного полого многокомпонентного цилиндра, находящегося под действием объемных механо-диффузионных возмущений. На примере полого цилиндра, выполненного из трехкомпонентного материала и находящегося в поле действия массовых сил, смоделировано взаимодействие механического и диффузионных полей, а также исследовано влияние релаксационных процессов на кинетику массопереноса.

Приложение

Поверхностные функции Грина $G_{kml}(r, \tau)$, найденные в работе [30], имеют следующий вид:

$$G_{q+1,ml}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,mln}(\tau) \Psi_0(\lambda_n r), \quad G_{1ml}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mln}(\tau) \Psi_1(\lambda_n r),$$

$$G_{1kln}(\tau) = \frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \sum_{m=1}^{2N+2} A_{1kln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau), \quad A_{1kln}^{(m)} = \frac{P_{1kln}(s_{mn})}{P'_n(s_{mn})}, \quad A_{q+1,kln}^{(m)} = \frac{P_{q+1,kln}(s_{mn})}{Q'_n(s_{mn})},$$

$$G_{q+1,1ln}(\tau) = -\frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,1ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n \Lambda_q \Omega_{ln} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right],$$

$$G_{q+1,p+1,ln}(\tau) =$$

$$= -\frac{1}{\Psi(\lambda_n)} \left[\sum_{m=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1,ln}^{(m)} \exp(s_{mn}\tau) + \lambda_n (\Lambda_q \alpha_p - D_q \delta_{pq}) \Omega_{ln} \sum_{j=1}^2 \frac{\exp(\chi_{jqn}\tau)}{k'_{q+1,n}(\chi_{jqn})} \right],$$

$$\begin{aligned}
P_{11ln}(s) &= \Omega_{ln} \left[\Pi_n(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\
P_{1,q+1,ln}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 \alpha_q \Omega_{ln} \left[D_q \Pi_{qn}(s) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_{jn}(s) \right], \\
P_{q+1,kl n}(s) &= -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1kl n}(s), \\
\Omega_{ln} &= \Psi_{01}(\lambda_n) \delta_{1l} - R_1 \Psi_{01}(\lambda_n R_1) \delta_{2l}.
\end{aligned}$$

Здесь s_{kn} – нули полинома $P_n(s)$, а χ_{qln} – дополнительные нули полинома $k_{q+1,n}(s)$, которые находятся по формулам (15).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abbas A.I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39, No. 20. P. 6196–6206.
2. Abbas A. Ibrahim, Elmaboud Y. Abd. Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22, No 2. P. 210–223.
3. Abo-Dahab S.M. Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories // Appl. Math. Inf. Sci. 2019. Vol. 13, No 2. P. 317–337.
4. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. 2006. Vol. 2006. P. 1-15.
5. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 5711-5722.
6. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // International Journal of Computer Sciences and Engineering. 2019. Vol.7, Is. 1. P. 148–156.
7. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. 2010. Vol. 45. P. 401–413.
8. Davydov S. A., Zemskov A. V. Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 183, Part C. 122213.
9. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, No 5. P. 749–759.
10. Deswal S., Kalkal K. K., Sheoran S. S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // Physica B: Condensed Matter. 2016. Vol. 496. P. 57–68.

11. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* 2011. Vol. 218. P. 205–215.
12. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophys.* 2012. Vol. 33. P. 172–183.
13. Kaur I., Lata P. Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion // *International Journal of Mechanical and Materials Engineering.* 2019. Vol. 14, No 12. <https://doi.org/10.1186/s40712-019-0108-3>
14. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST.* 2019. Vol. 25, No 4. P. 167–176.
15. Kumar R., Devi S. Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium // *Journal of Solid Mechanics.* 2019. Vol. 11, No 3. P. 581–592.
16. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate // *Coupled Systems Mechanics.* 2019. Vol. 8, No 1. P. 39–53.
17. Salama M.M., Kozae A.M., Elsafty M.A., Abelaziz S.S. A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion // *International Journal of Scientific and Engineering Research.* 2015. Vol. 6, Is. 1. P. 358–371
18. Sharma N., Kumar R., Ram P. Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Thermophys.* 2008. Vol. 29. P. 1503–1522.
19. Sharma J. N., Thakur N., Singh S. Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space // *Therm Stresses.* 2007. Vol. 30. P. 357–380.
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. P. 3263–3274.
21. Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *International Journal of Engineering Science.* 2009. Vol. 47. P. 669–679.
22. Минов А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // *Известия вузов. Машиностроение.* 2008. № 10. С. 21–26.
23. Павлина В.С. О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // *Физико-химическая механика материалов.* 1965. №4. С. 390–394.
24. Hwang C. C., Huang I. B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state // *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN).* 2012. Vol. 2, Is. 8. P. 166–182.
25. Lee S., Wang W. L., Chen J. R. Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics.* 2000. Vol.64, No 2. P. 123–130.
26. Soares J. S. Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations // *International Journal of Engineering Science.* 2009. V. 47. P. 50–63.
27. Tartibi M., Guccione J.M., Steigmann D. J. Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder // *Mechanics Research Communications.* 2019. Vol. 97. P. 123–128.

28. Yang F. Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder // *Mechanics Research Communications*. 2013. V. 51. P. 72–77.
29. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Изд. 4, перераб. и суц. доп. М.: URSS. 2018. 1080 с.
30. Зверев Н. А., Земсков А. В. Моделирование нестационарных механо-dиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // *Математическое моделирование*. 2022. Т. 35, № 1. С. 25-37.
31. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Нестационарная механо-dиффузия сплошного ортотропного цилиндра, находящегося под действием равномерного давления, с учетом релаксации диффузионных потоков // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2021. Т. 27, № 4. С. 570-586.
32. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics*. 2015. No 1, Vol 23. P. 36–41.
33. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование одномерных механо-dиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений, *Вестник Самарского Государственного технического университета*. Серия: Физико-математические Науки. 2022. Т.26, №1. с. 62–78.
34. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование механо-dиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2021. 288 с.
35. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1965. 568 с.
36. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М., и др.; под общей редакцией Григорьева И. С., Мейлихова И. З. // *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.

REFERENCES

1. Abbas, A. I. 2015. "Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, No. 20, pp. 6196-6206.
2. Abbas, A. Ibrahim & Elmaboud, Y. Abd. 2017. "Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time", *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 2, No. 2, pp. 210-223.
3. Abo-Dahab, S. M. 2019. "Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories", *Appl. Math. Inf. Sci.*, Vol. 13, No. 2, pp. 317-337.
4. Aouadi, M. 2006. "A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder", *Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci.*, Vol. 2006, pp. 1-15.
5. Aouadi, M. 2007. "A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 5711-5722.

6. Bhattacharya, D. & Pal, P. & Kanoria, M. 2019. "Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect", *International Journal of Computer Sciences and Engineering.*, Vol. 7, Is. 1, pp. 148-156.
7. Choudhary, S. 2010. "Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion", *Meccanica.*, Vol. 45, pp. 401-413.
8. Davydov, S. A. & Zemskov, A. V. 2022. "Thermoelastic Diffusion Phase-Lag Model for a Layer with Internal Heat and Mass Sources", *International Journal of Heat and Mass Transfer.*, Vol. 183, part. C, 122213
9. Deswal, S. & Kalkal, K. 2011. "A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion", *International Journal of Thermal Sciences.*, Vol. 50, No. 5, pp. 749-759.
10. Deswal, S. & Kalkal, K.K. & Sheoran, S.S. 2016. "Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction", *Physica B: Condensed Matter.*, Vol. 496, pp. 57-68.
11. Elhagary, M. A. 2011. "Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times", *Acta Mech.*, Vol. 218, pp. 205-215.
12. Elhagary, M. A. 2012. "Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite Medium with a Spherical Cavity", *Int. J. Thermophys.*, Vol. 33, pp. 172-183.
13. Kaur, I. & Lata, P. 2019. "Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion", *International Journal of Mechanical and Materials Engineering.*, Vol. 14, No. 12. <https://doi.org/10.1186/s40712-019-0108-3>
14. Kumar, R. & Devi, S. 2019. "Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources", *CMST.*, Vol. 25, No. 4, pp. 167-176.
15. Kumar, R. & Devi, S. 2019. "Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium", *Journal of Solid Mechanics.*, Vol. 11, No. 3, pp. 581-592.
16. Lata, P. 2019. "Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate", *Coupled Systems Mechanics.*, Vol. 8, No. 1, pp. 39-53.
17. Salama, M. M. & Kozae, A. M. & Elsafty, M. A. & Abelaziz, S. S. 2015. "A half-space problem in the theory of fractional order thermoelasticity with diffusion", *International Journal of Scientific and Engineering Research.*, Vol. 6, Is. 1, pp. 358-371.
18. Sharma, N. & Kumar, R. & Ram, P. 2008. "Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion", *Int. J. Thermophys.*, Vol. 29, pp. 1503-1522.
19. Sharma, J.N. & Thakur, N. & Singh, S. 2007. "Propagation characteristics of elasto-thermodiffusive surface waves in semiconductor material half-space", *Therm Stresses.*, Vol. 30, pp. 357-380.
20. Tripathi, J. J. & Kedar, G. D. & Deshmukh, K. C. 2015. "wo-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions", *Acta Mech.*, Vol. 226, pp. 3263-3274.

21. Xia, R.H. & Tian, X.G. & Shen, Y.P. 2009. "The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity", *International Journal of Engineering Science.*, Vol. 47, pp. 669-679.
22. Minov, A. V. 2008. "Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pologo tsilindra, podverzhennogo termodiffuzionnomu vozdeystviyu ugleroda v osesimmetrichnom teplovom pole, peremennom po dline [Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder subject to thermal diffusion action of carbon in an axisymmetric thermal field, variable along its length].", *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie [BMSTU Journal of mechanical engineering]*., No. 10, pp. 21-26. [In Russian]
23. Pavlina, V. S. 1965. "O vliyaniy diffuzii na temperaturnye napryazheniya v okrestnosti cilindricheskoy polosti [On the effect of diffusion on thermal stresses in the vicinity of a cylindrical cavity]", *Fiziko-himicheskaya mekhanika materialov.*, No. 4, pp. 390-394. [In Russian]
24. Hwang, C. C. & Huang, I. B. 2012. "Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state", *IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN)*., Vol. 2, Is. 8, pp. 166-182.
25. Lee, S. & Wang, W.L. & Chen, J.R. 2000. "Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses", *Materials Chemistry and Physics.*, Vol. 64, No. 2, pp. 123-130.
26. Soares, J.S. 2009. "Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations", *International Journal of Engineering Science.*, Vol. 47, pp. 50-63.
27. Tartibi, M. & Guccione, J. M. & Steigmann, D. J. 2019. "Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder", *Mechanics Research Communications.*, Vol. 97, pp. 123-128.
28. Yang, F. 2013. "Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder", *Mechanics Research Communications.*, Vol. 51, pp. 72-77.
29. Kartashov, E. M. & Kudinov, V. A. 2018. "Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenij [Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications].", *Moscow, URSS.*, 1080 p. [In Russian]
30. Zverev, N.A. & Zemskov, A.V. 2022. "Modeling Unsteady Elastic Diffusion Processes in a Hollow Cylinder Taking into Account the Relaxation of Diffusion Fluxes", *Mathematical Modeling.*, Vol. 35, No. 1, pp. 25-37.
31. Zverev, N. A. & Zemskov, A. V. & Tarlakovsky, D. V. 2021. "Nestacionarnaya mekhanodiffuziya sploshnogo ortotropnogo cilindra, nahodyashchegosya pod dejstviem ravnomernogo davleniya, s uchetom relaksacii diffuzionnyh potokov [Unsteady elastic diffusion of an orthotropic cylinder under uniform pressure considering relaxation of diffusion fluxes]", *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii.*, Vol. 27, No. 4, pp. 570-586. [In Russian]
32. Zemskov, A. V. & Tarlakovskii, D. V. 2015. "Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer", *Materials Physics and Mechanics.*, Vol. 23, No. 1, pp. 36-41.
33. Zverev, N. A. & Zemskov, A. V. & Tarlakovsky, D. V. 2022. "Modelling of one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations", *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences.*, Vol. 26, No. 1, pp. 62-78.

34. Zemskov, A. V. & Tarlakovskii, D. V. 2021. “Modelirovanie mekhanodiffuzionnyh processov v mnogokomponentnyh telah s ploskimi granicami [Modeling of mechanodiffusion processes in multicomponent bodies with flat boundaries]”, *FIZMATLIT.*, 288 p. [In Russian]
35. Ditkin, V. A. & Prudnikov, A. P. 1961. “Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook on Operational Calculus]”, *Moscow, Vysshaya shkola.*, 524 p. [In Russian]
36. Babichev, A. P., Babushkina, N. A., Bratkovsky, A. M. and others; under the general editorship of Grigoriev, I. S., Meilikhov, I. Z. 1991. “Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook].”, *Moscow, Energoatomizdat.*, 1232 p. [In Russian]

Получено: 31.08.2023

Принято в печать: 28.06.2024