

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-286-295

Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем¹

Д. Ю. Ефимов

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Полагается, что цилиндр с однородным покрытием окружен непрерывно-неоднородным слоем жидкости с произвольным законом неоднородности. Точечный источник гармонических звуковых волн помещен в идеальную однородную жидкость, граничащую с неоднородным слоем.

Акустическое давление в сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Волновые процессы в упругом слое описываются системой уравнений линейной теории упругости изотропного тела. Для определения волнового поля в неоднородном слое жидкости построена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: сферические звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородный слой жидкости.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Д. Ю. Ефимов. Дифракция звука от точечного источника на цилиндре с упругим покрытием, окруженном неоднородным жидким слоем // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 286–295.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-286-295

Diffraction of sound from a point source on a cylinder with an elastic coating surrounded by an inhomogeneous liquid layer

D. Yu. Efimov

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a spherical sound wave by an absolutely rigid cylinder with a coating in the form of a homogeneous isotropic elastic layer with an adjacent inhomogeneous liquid layer. It is assumed that a cylinder with a homogeneous coating is surrounded by a continuously inhomogeneous liquid layer with an arbitrary law of inhomogeneity. A point source of harmonic sound waves is placed in an ideal homogeneous liquid bordering an inhomogeneous layer.

The acoustic pressure in a spherical wave is represented in an integral form as a decomposition in cylindrical wave functions. Wave processes in an elastic layer are described by a system of equations of the linear theory of elasticity of an isotropic body. To determine the wave field in an inhomogeneous liquid layer, a boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order is constructed.

Keywords: spherical sound waves, elastic cylinder, inhomogeneous liquid layer.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

D. Yu. Efimov, 2024. "Diffraction of sound from a point source on a cylinder with an elastic coating surrounded by an inhomogeneous liquid layer", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 286–295.

1. Введение

Влияние покрытий цилиндрических тел на их звукоотражающие свойства исследовалось в ряде работ. Прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием решены в [1]. Выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре. В [2, 3] обсуждается задача о нерассеивающем покрытии для цилиндра, делающее его акустически прозрачным. Для снижения рассеяния падающей на цилиндр звуковой волны применено тонкое покрытие с протяженной реакцией. Дифракция плоской звуковой волны на упругой цилиндрической оболочке с однородным упругим покрытием исследована в [4]. Выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов покрытия и оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Дифракция плоской волны цилиндром с покрытием в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев была изучена в [5]. Задачи о рассеянии плоских и цилиндрических звуковых волн жестким цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [6, 7].

Задачи дифракции сферических звуковых волн на упругих цилиндрических телах с математической точки зрения являются более сложными по сравнению с задачами дифракции плоских и цилиндрических волн. Изучение дифракции сферической звуковой волны на цилиндрическом теле представляет значительный интерес для теории и практики. В этом случае геометрия рассеивающего объекта отлична от геометрии падающей волны, а учет криволинейности волнового фронта весьма важен, когда источник находится на небольшом расстоянии от рассеивателя. Такие задачи исследовались в [8–10]. В [8] рассмотрена задача дифракции сферической звуковой волны однородным упругим цилиндром с применением потенциалов Дебая. В [9] показано, что решение задачи рассеяния сферических звуковых волн на упругом рассеивателе цилиндрической может быть получено с использованием известного решения рассеяния наклонно падающей плоской звуковой волны, а в [10] данный подход был применен для случая упругого цилиндра с неоднородным упругим покрытием. Дифракция звука от точечного источника упругим цилиндром с трансверсально-изотропным неоднородным покрытием исследована в [11].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса r_3 , покрытый однородным изотропным упругим слоем с внешним радиусом r_2 . Материал упругого слоя характеризуется плотностью ρ и упругими постоянными λ и μ . Цилиндр окружен радиально-неоднородным цилиндрическим слоем идеальной жидкости, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндрическая система координат r, φ, z выбрана таким образом, что координатная ось z совпадает с осью вращения цилиндра. Плотность неоднородного жидкого слоя ρ_1 и скорость звука в слое c_1 являются прерывными функциями радиальной координаты: $\rho_1 = \rho_1(r)$, $c_1 = c_1(r)$. Цилиндр с прилегающим неоднородным по толщине жидким слоем помещен в однородную идеальную жидкость с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, цилиндрические координаты которого (r_i, φ_i, z_i) . Акустическое давление падающей волны

$$p_0 = A \frac{\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i| - i\omega t)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|},$$

где A – амплитуда волны; $k = \omega/c_0$ – волновое число жидкости; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_i$ – радиус-векторы точки наблюдения и точки, в которой располагается источник; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим звуковое давление во внешнем пространстве, звуковое давление в неоднородном жидком слое и поле смещений в однородном упругом покрытии.

3. Математическая модель задачи

Распространение малых возмущение в однородной идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [12]

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

где $p = p_0 + p_S$ – давление полного акустического поля; p_S – звуковое давление в рассеянной волне.

Распространение звука в неоднородной идеальной жидкости описывается уравнением [13]

$$\Delta p_1 + \frac{\omega^2}{c_1^2} p_1 - \frac{1}{\rho_1} \text{grad } \rho_1 \text{ grad } p_1 = 0, \quad (2)$$

где p_1 – звуковое давление в неоднородном слое.

Скорости частиц в однородной жидкости $\mathbf{v}$ и в неоднородном слое $\mathbf{v}_1$ определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\rho_0\omega} \text{grad } p, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{i\rho_1\omega} \text{grad } p_1. \quad (3)$$

Уравнения, описывающие распространение малых возмущений в однородном упругом изотропном цилиндрическом слое в случае установившегося режима движения, имеют вид [12]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (5)$$

где Ψ и Φ – скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ – волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости

продольных и поперечных волн. Вектор смещения $\mathbf{u}$ частиц упругого однородного цилиндрического слоя определяется выражением

$$\mathbf{u} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \Phi. \quad (6)$$

Представим вектор Φ в виде

$$\Phi = \text{rot } (L \cdot \mathbf{e}_z) + k_\tau M \cdot \mathbf{e}_z,$$

где L и M – функции пространственных координат; $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z . Тогда векторное уравнение (5) заменится двумя скалярными уравнениями Гельмгольца относительно функций L и M

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0, \quad (7)$$

$$\Delta M + k_\tau^2 M = 0. \quad (8)$$

В цилиндрической системе координат уравнение Гельмгольца (1) для давления в рассеянной волне и уравнение (2) будут иметь вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + k_1^2(r) p_1 = 0, \quad (10)$$

где $k_1(r) = \omega/c_1(r)$.

Соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} и вектора смещения $\mathbf{u}$ в однородном изотропном цилиндрическом слое имеют вид [14]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \text{div } \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Используя соотношения (11), выразим компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} через функции Ψ , L , M :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\lambda k_l^2 \Psi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 L}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right) \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi + \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial L}{\partial z} \right) - \mu k_\tau \left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 L}{\partial r \partial z^2} + k_\tau^2 \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{k_\tau}{r} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

На поверхности абсолютно жесткого цилиндра ($r = r_3$) при переходе через границу раздела абсолютно жесткой и упругой сред должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды:

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (13)$$

Граничные условия на внешней поверхности упругого цилиндрического слоя ($r = r_2$) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругого материала цилиндра и неоднородной жидкости, равенстве нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

$$-i\omega u_r = v_{1r}, \quad \sigma_{rr} = -p_1, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (14)$$

На внешней поверхности неоднородного жидкого слоя ($r = r_1$) должны быть равны нормальные скорости частиц однородной и неоднородной жидкости, а также непрерывны акустического давления:

$$v_r = v_{1r}, \quad p = p_1. \quad (15)$$

Здесь $v_r = \frac{1}{i\rho_0\omega} \frac{\partial p}{\partial r}$, $v_{1r} = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p_1}{\partial r}$.

Таким образом, в математической постановке задача заключается в нахождении решений дифференциальных уравнений (4), (7)-(10), удовлетворяющих граничным условиям (13)-(15). Кроме того, давление p_S должно удовлетворять условию излучения на бесконечности [12]

$$p_S = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial p_S}{\partial r} - ikp_S = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

4. Аналитическое решение задачи

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций [15], представим звуковое давление падающей волны в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям

$$p_0 = A \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_0(h) dh, \quad (16)$$

$$\tilde{p}_0(h) = \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[in(\varphi - \varphi_i)] \begin{cases} H_n(k_h r_i) J_n(k_h r), & r < r_i; \\ J_n(k_h r_i) H_n(k_h r), & r > r_i, \end{cases}$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Без ограничения общности положим $z_i = 0$.

С учетом условий излучения на бесконечности функцию p_S будем искать в виде

$$p_S = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(h) H_n(k_h r) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh. \quad (17)$$

При $|h| > k$ величина k_h становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - h^2}$ из условия $\text{Im } k_h \geq 0$ обеспечивает условие излучения на бесконечности для звукового давления p_S при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k \leq h \leq k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

Функцию p_1 будем искать в виде разложения

$$p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r, h) \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh \quad (18)$$

а функции Ψ , L и M в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_{1n}(h) J_n(k_1 r) + B_{2n}(h) N_n(k_1 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ L &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n}(h) J_n(k_2 r) + C_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh, \\ M &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [D_{1n}(h) J_n(k_2 r) + D_{2n}(h) N_n(k_2 r)] \exp[in(\varphi - \varphi_i)] dh,\end{aligned}\quad (19)$$

где $N_n(x)$ – цилиндрическая функция Неймана порядка n ; $k_1 = \sqrt{k_l^2 - h^2}$, $k_2 = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}$.

Подставляя выражение (18) в уравнение (10), получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестной функции $R_n(r, h)$ для каждого n и h

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + g(r) \frac{\partial R_n}{\partial r} + q(r) R_n = 0, \quad (20)$$

где

$$g(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_1(r)} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}, \quad q(r) = k_1^2(r) - \frac{n^2}{r^2} - h^2.$$

Подставляя разложения (16)-(19) в граничные условия (13)-(15) и используя выражение для вронскиана [11]

$$J_n(k_h r_1) H'_n(k_h r_1) - J'_n(k_h r_1) H_n(k_h r_1) = 2i/(\pi k_h r_1),$$

получим выражения для неизвестных коэффициентов

$$A_n(h) = (2R_n(r_1, h) - AiH_n(k_h r_1) J_n(k_h r_1))/2H_n(k_h r_1), \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_n = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_n,$$

где $\mathbf{K}_n = (B_{1n}, B_{2n}, C_{1n}, C_{2n}, D_{1n}, D_{2n})^T$; $\mathbf{W}_n = (R_n(r_2, h), 0, 0, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{M}_n = (m_{mqn})_{6 \times 6}$:

$$\begin{aligned}m_{1,j,n} &= \left(\lambda k_l^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) - 2\mu k_1^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) \right) / r_2^2, \quad m_{1,j+2,n} = -2ih\mu k_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \\ m_{1,j+4,n} &= 2in\mu k_\tau \left(Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j,n} &= 2in\mu \left(k_1 r_2 Y_n^{(j)}(k_1 r_2) - Y_n^{(j)}(k_1 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j+2,n} &= 2nh\mu \left(Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{2,j+4,n} &= k_\tau \mu \left(k_2 r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - k_2^2 r_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) - n^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2) \right) / r_2^2, \\ m_{3,j,n} &= 2ihk_1 \mu Y_n^{(j)}(k_1 r_2), \quad m_{3,j+2,n} = \mu Y_n^{(j)}(k_2 r_2) (k_\tau^2 - 2k_2 h^2), \\ m_{3,j+4,n} &= -nhk_\tau \mu Y_n^{(j)}(k_2 r_2) / r_2, \quad m_{4,j,n} = k_1 Y_n^{(j)}(k_1 r_3), \\ m_{4,j+2,n} &= ihk_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{4,j+4,n} = ink_\tau Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3, \\ m_{5,j,n} &= inY_n^{(j)}(k_1 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+2,n} = -nhk_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3) / r_3, \quad m_{5,j+4,n} = -k_\tau k_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3),\end{aligned}$$

$$m_{6,j,n} = ihY_n^{(j)}(k_1 r_3), \quad m_{6,j+2,n} = k_2^2 Y_n^{(j)}(k_2 r_3), \quad m_{6,j+4,n} = 0, \\ j = 1, 2, \quad Y_n^{(1)}(x) = J_n(x), \quad Y_n^{(2)}(x) = N_n(x).$$

И два краевых условия для дифференциального уравнения (20)

$$\alpha_{1n} R'_n(r_1, h) + \beta_{1n} R_n(r_1, h) = d_{1n}(h), \\ \alpha_{2n} R'_n(r_2, h) + \beta_{2n} R_n(r_2, h) = 0, \quad (22)$$

$$\alpha_{1n} = -1/\rho_1(r_1)\omega, \quad \beta_{1n} = k_h H'_n(k_h r_1)/\rho_0 \omega H_n(k_h r_1), \quad d_{1n} = -A H_n(k_h r_i)/\pi r_1 \rho_0 \omega H_n(k_h r_1), \\ \alpha_{2n} = -r_1/\omega^2 \rho_1(r_2), \quad \beta_{2n} = \mathbf{K}_{2n} \mathbf{T}_n.$$

При этом $\mathbf{K}_{2n} = [\mathbf{M}_n]^{-1} \mathbf{W}_{2n}$; $\mathbf{W}_{2n} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{T}_n = (t_{1n}, t_{2n}, t_{3n}, t_{4n}, t_{5n}, t_{6n})^T$:

$$t_{jn} = k_1 r_2 Y_n'^{(j)}(k_1 r_2), \quad t_{j+2,n} = ih k_2 r_2 Y_n'^{(j)}(k_2 r_2), \quad t_{j+4,n} = ink_\tau r_2 Y_n^{(j)}(k_2 r_2), \quad j = 1, 2.$$

Так как коэффициенты $A_n(h)$, $B_{1n}(h)$, $B_{2n}(h)$, $C_{1n}(h)$, $C_{2n}(h)$, $D_{1n}(h)$, $D_{2n}(h)$ выражены через значения функции $R_n(r, h)$ при $r = r_1, r_2$, то для их вычисления необходимо найти решение краевой задачи (20), (22). Эта краевая задача может быть решена разными численными и аналитическими методами. Например, разностным методом [16], методом стрельбы [16], методом сплайн-коллокации [17].

5. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие параметры материала упругого покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в фиксированной точке наблюдения $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$.

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega) = |p_S(\omega)/A|^2$ – интенсивность звукового рассеяния. Построим функцию вида

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (23)$$

выражающую усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для функции (23) необходимо найти такие значения упругих параметров ρ, λ, μ при которых она достигает минимального значения.

Для параметров функции (23) введем ограничения

$$C_{11} \leq \rho \leq C_{12}, \quad C_{21} \leq \lambda \leq C_{22}, \quad C_{31} \leq \mu \leq C_{32}. \quad (24)$$

где $C_{\zeta 1}$, $C_{\zeta 2}$ – некоторые положительные константы ($\zeta = 1, 2, 3$).

Поиск значений упругих параметров ρ, λ, μ , удовлетворяющих условиям (24) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho, \lambda, \mu) \rightarrow \min, \quad (25)$$

осуществить аналитически не представляется возможным. Однако построенная оптимизационная задача (24), (25) может быть решена численно с использованием какого-либо численного метода многомерной оптимизации [18], что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(h, \omega) dh d\omega. \quad (26)$$

Аналитическая запись подынтегральной функции $F(h, \omega)$ не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (17), (21), (23).

Подынтегральная функция $F(h, \omega)$ рассчитывается в выбранных точках (h_*, ω_*) с использованием краевой задачи (20), (22). Далее интеграл (26) может быть рассчитан численно с использованием многомерных квадратурных формул. Для этого к несобственному интегралу по переменной h следует применить прием обрезания бесконечных пределов [16], а в качестве метода численного интегрирования может быть использована квадратурная формула на основе параллелепipedальной сетки Коробова [19, 20].

Отметим, что для повышения эффективности звукоотражающих свойств рассеивателя, покрытие может быть реализовано не из одного однородного упругого слоя, а из N однородных упругих слоев аналогично тому как показано в работе [5].

6. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны абсолютно жестким цилиндром с покрытием в виде однородного изотропного упругого слоя с прилегающим неоднородным слоем жидкости. Так как геометрия фронта падающей сферической волны не совпадает с геометрией цилиндрического рассеивателя, то решение рассматриваемой акустической задачи на основе построенной математической модели оказывается весьма затруднительным. Для построения аналитического решения давление в падающей сферической волне представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. Построенное решение справедливо для произвольного закона неоднородности жидкого слоя.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томилина Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустический журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147-151.
4. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
5. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
6. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
7. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202-208.
8. Клещев А.А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акустический журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 86-89.

9. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871–1879.
10. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215–226.
11. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным покрытием // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 4. С. 368–381.
12. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
14. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
15. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
16. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
17. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
18. Захарова Е. М., Минашина И. К. Обзор методов многомерной оптимизации // Информационные процессы. 2014. Т. 14, Вып. 3. С. 256–274.
19. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
20. Добровольский Н. Н., Скобелцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368–382.

REFERENCES

1. Ivanov, V. P. 2006. “Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating”, *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683–690.
2. Bobrovnskii, Yu. I. 2008. “A nonscattering coating for a cylinder”, *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758–768.
3. Bobrovnskii, Yu. I., Morozov, K. D. & Tomilina, T. M. 2010. “A periodic surface structure with extreme acoustic properties”, *Acoustical Physics*, vol. 56, no 2, pp. 127–131.
4. Kosarev, O. I. 2012. “Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating”, *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34–37, [in Russian].
5. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015. “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164–169.
6. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011. “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.

7. Tolokonnikov, L. A. 2013. "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a nonuniform elastic coating" *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208, [in Russian].
8. Kleshchev A. A. 2004. "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no. 1, pp. 74-76.
9. Li T., Ueda M. 1980. "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no. 5, pp. 1871-1879.
10. Tolokonnikov, L. A. 2018. "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022. "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform anisotropic coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 368–381, [in Russian].
12. Shenderov, E. L. 1972. "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
13. Brekhovskikh, L. M. 1973. "Waves in Layered Media", Nauka, Moscow, 344 p., [in Russian].
14. Nowacki, W. 1973, "Teoria sprzystosci", PWN, Warszawa.
15. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].
16. Kalitkin, N. N. 1978. "Numerical methods", *Fizmatgiz, Moscow*, 512 p., [in Russian].
17. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980. "Spline function methods", *Nauka, Moscow*, 352 p., [in Russian].
18. Zakharova, E. M., Minashina, I. K. 2014. "Review of Multidimensional Optimization Techniques", *Informatsionnye Protsessy*, vol. 14, no. 3, pp. 256-274, [in Russian].
19. Korobov, N. M. 2004. "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., *MTSNMO, Moscow, Russia*.
20. Dobrovol'skii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021. "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 04.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024