

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-269-285

Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства¹

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ефимов Дмитрий Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи границы полупространств в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства, и не является параллельным оси цилиндра. Полагается, что цилиндр находится в полупространстве, заполненном идеальной однородной жидкостью, граничащем с однородным упругим полупространством.

Для представления рассеянного поля в идеальной жидкости используется представление в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа. Колебания неоднородного изотропного упругого тела описываются уравнениями линейной теории упругости. Для нахождения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

На основе решения прямой задачи рассмотрена обратная задача об определении законов неоднородности покрытия, обеспечивающих наименьшее звукоотражение в заданном частотном диапазоне. Построен функционал, выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот. Построенный функционал записывается в виде двойного интеграла, оценить который аналитически не представляется возможным. Полученный интеграл рассчитан численно по квадратурной формуле на основе параллелепипедальной сетки Коробова.

Представлены численные расчеты угловых характеристик рассеянного поля. Выявлено существенное влияние непрерывно-неоднородных покрытий на дифракционную картину рассеянного поля.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, параллелепипедальные сетки Коробова.

Библиография: 26 названий.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, Д. Ю. Ефимов, Л. А. Толоконников. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи границы упругого полупространства // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 269–285.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-269-285

A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Efimov Dmitrii Yurevich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

The article considers the problem of diffraction of a cylindrical sound wave on a homogeneous isotropic elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the boundary of half-spaces in the case when the linear source is in a plane parallel to the surface of the half-space and is not parallel to the axis of the cylinder. It is assumed that the cylinder is located in a half-space filled with an ideal homogeneous liquid bordering on a homogeneous elastic half-space.

To represent the scattered field in an ideal liquid, a representation in the form of the Helmholtz-Kirchhoff integral is used. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic body are described by the equations of the linear theory of elasticity. To find the displacement field in an inhomogeneous coating, a boundary value problem for a system of second-order ordinary differential equations is constructed.

Based on the solution of the direct problem, the inverse problem of determining the laws of coating heterogeneity that provide the least sound reflection in a given frequency range is considered. A functional is constructed expressing the average intensity of sound scattering in a given frequency range. The constructed functional is written in the form of a double integral, which cannot be evaluated analytically. The resulting integral is calculated numerically using a quadrature formula based on a parallelepipedal Korobov grid.

Numerical calculations of the angular characteristics of the scattered field are presented. A significant effect of continuously inhomogeneous coatings on the diffraction pattern of the scattered field has been revealed.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating, parallelepipedal Korobov grids.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, D. Yu. Efimov, L. A. Tolokonnikov, 2024. "A non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the boundary of an elastic half-space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 269–285.

1. Введение

Исследованию дифракции звука на бесконечных идеальных и упругих цилиндрах посвящено большое количество работ. Среди них в ряде работ рассматривались цилиндрические рассеиватели с покрытиями, позволяющими изменять звукоотражающие характеристики тела. Существуют различные виды покрытий, наносимых на твердые тела. Например, перфорированные покрытия [1], покрытия с протяженной реакцией [2], однородные упругого покрытия [3]. Покрытие в виде дискретной системы коаксиальных однородных упругих слоев было изучено в [4]. Значительный интерес представляют упругие непрерывно-неоднородные покрытия, позволяющие эффективно изменять звукоотражающие характеристики рассеяния тел. Дифракция звуковых волн на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом сплошных цилиндрах с изотропными непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалась в [5, 6].

В упомянутых выше работах в качестве источника первичного волнового возмущения использовалась плоская звуковая волна. Однако звуковую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя значительно больше длины волны. На практике приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Поэтому изучение дифракции звуковых волн, излучаемых цилиндрическими и сферическими источниками, представляет значительный интерес.

Рассеяние цилиндрической волны на упругом цилиндре рассматривалось в [7], а задача дифракции цилиндрических звуковых волн упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием решена в [8]. В работах [7, 8], как и в большинстве известных работ по теории дифракции, где в качестве источника волнового возмущения выбирается линейный источник звуковых колебаний, полагается, что ось источника параллельна оси вращения цилиндрического рассеивателя, что значительно упрощает задачу. Дифракция звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником, на абсолютно жестком и однородном изотропном упругом с непрерывно-неоднородным покрытием сплошных цилиндрах рассматривалась в [9, 10].

Во всех перечисленных ранее работах полагалось, что цилиндрические тела располагаются в безграничном пространстве. Однако в реальности тела находятся в присутствии ограничивающих поверхностей, влияние которых на рассеянное акустическое поле является значительным. В работах [11, 12] методом мнимых источников решались задачи рассеяния плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным покрытием, расположенном вблизи идеальной (абсолютно жесткой или акустически мягкой) поверхности. В [1] рассматривался случай нормального падения, а в [12] – случай наклонного падения. В [13] с использованием интегрального уравнения Гельмгольца-Кирхгофа получено решение задачи дифракции звука на однородном изотропном упругом цилиндре, находящемся вблизи упругого или импедансного полупространства. Используя тот же подход, в [14] была рассмотрена задача дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. При этом в [13, 14] источником первичного возмущения волновой системы являлся линейный источник звука, ось которого была параллельна оси цилиндрического рассеивателя.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным

изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса R_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя с внешним радиусом R_1 . Свяжем с цилиндром прямоугольную декартову x, y, z и цилиндрическую r, φ, z системы координат так, чтобы их координатные оси z совпадали с осью вращения цилиндра. Полагаем, что модули упругости λ и μ материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r , а его плотность ρ – непрерывной функцией координаты r . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии l . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -l$, $l > 0$.

Пусть из жидкого полупространства на цилиндр с покрытием падает гармоническая цилиндрическая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, расположенным в плоскости, параллельной поверхности упругого полупространства, ось которого не является параллельной оси цилиндра.

Начало O координатных систем x, y, z и r, φ, z выберем на оси z так, чтобы из точки O выходил общий перпендикуляр к оси z и линейному источнику. Длину этого перпендикуляра обозначим через d . Ось y направим так, чтобы указанный перпендикуляр лежал на этой оси. Будем считать, что линейный источник пересекает положительную часть оси y в точке $y = d$, $d > 0$. Осуществим параллельный перенос вдоль оси y до точки O прямой, на которой лежит линейный источник. Пусть полученная прямая будет общей осью z_1 прямоугольной x_1, y_1, z_1 и цилиндрической r_1, φ_1, z_1 систем координат с началом в точке O . При этом ось y_1 совместим с осью y . Обозначим через α угол между осями z и z_1 (рис. 1).

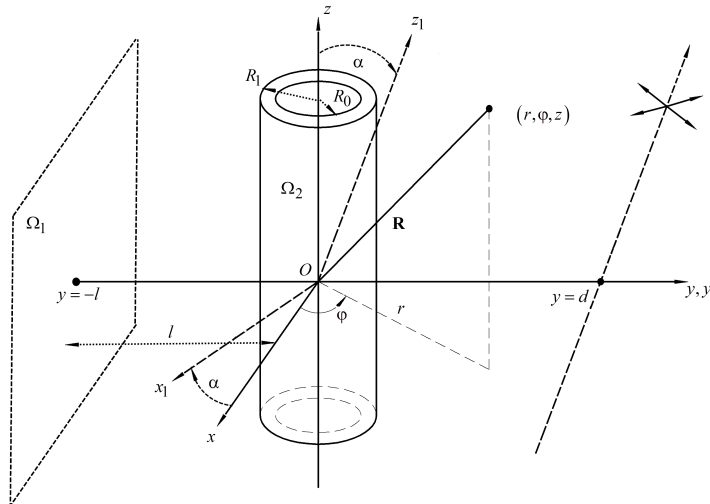


Рис. 1: Геометрия задачи.

Потенциал скорости падающей цилиндрической волны в системе координат x_1, y_1, z_1 запишется в виде

$$\Psi_0 = AH_0(kR) \exp(-i\omega t), \quad R = \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2}, \quad (1)$$

где A – амплитуда волны; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; $k = \omega/c$ – волновое число жидкости; ω – круговая частота; t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Определим акустическое поле в жидком полупространстве и поля смещений в однородном цилиндре и неоднородном упругом слое.

3. Аналитическое решение

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде [13]

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (2)$$

где Ψ_{S1} – потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства, Ψ_{S2} – потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяются формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega \Psi.$$

Полное звуковое поле в жидком полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца-Кирхгофа [13, 14]

$$\Psi(\mathbf{R}_1) = AG(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d) + \iint_{\Omega} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$ и $G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ – двумерная и трехмерная функции Грина для уравнения Гельмгольца; $\mathbf{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{r}_d = (0, d, 0)$; $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 – поверхность упругого полупространства, Ω_2 – внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности Ω_1 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности Ω_1 , а в интеграле по поверхности Ω_2 точка $\mathbf{R}_2$ находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности Ω_2 .

Для того, чтобы в (3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности Ω_1 , и учесть множественные переотражения между цилиндрическим рассеивателем и упругой границей, воспользуемся подходом, предложенным в [13]. Будем использовать функцию Грина вида

$$G(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (4)$$

где $G_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ – некоторая функция, представляющая акустическое поле, полученное при отражении первичной волны $G_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ от поверхности Ω_1 . Таким образом функция Грина (4) определяет поле точечного источника в пространстве внешнем к поверхности Ω_1 , т.е. является функцией Грина полупространства.

Перепишем интегральное уравнение (3) в цилиндрической системе координат r, φ, z . При этом сравнивая выражения (2) и (3) с учетом (4) заметим, что $\Psi_0 = AG_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$, $\Psi_{S1} = AG_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_d)$.

Прямоугольные координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны между собой соотношениями

$$x_1 = x \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad y = y_1, \quad z_1 = -x \sin \alpha + z \cos \alpha. \quad (5)$$

Воспользуемся интегральным соотношением [15]

$$H_0 \left(k \sqrt{x_1^2 + (y_1 + d)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i (\xi x_1 + \eta |y_1 + d|)] d\xi, \quad (6)$$

где $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$.

С учетом (1), (5) и (6) получаем для потенциала скорости падающей волны следующее выражение в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta} \exp [i \xi (r \cos \varphi \cos \alpha + z \sin \alpha) + i \eta |r \sin \varphi + d|] d\xi. \quad (7)$$

При $|\xi| > k$ величина η становится мнимой. Выбор знака корня $\sqrt{k^2 - \xi^2}$ из условия $\text{Im } \mu \geq 0$ обеспечивает ограниченность поля падающей волны Ψ_0 при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, $\eta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ при $-k \leq \xi \leq k$ и $\eta = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ при $|\xi| > k$.

Заметим, что на поверхности цилиндра $r \sin \varphi + d > 0$. Будем иметь

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (i d \eta)}{\eta} \exp (i \xi z \sin \alpha) \exp [i r (\xi \cos \varphi \cos \alpha + \eta \sin \varphi)] d\xi. \quad (8)$$

Заменим в выражении, стоящем в (8), величины ξ и η величинами β и γ с помощью соотношений $\xi \cos \alpha = \beta \sin \gamma$, $\eta = -\beta \cos \gamma$. Тогда вместо (8) получим

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (i d \eta)}{\eta} \exp (i \xi z \sin \alpha) \exp [-i \beta r \sin (\varphi - \gamma)] d\xi, \quad (9)$$

где $\beta = \sqrt{k^2 - \xi^2 \sin^2 \alpha}$, $\gamma = \arctg (-\xi \cos \alpha / \eta)$.

Подынтегральное выражение в (9) имеет вид плоской волны, падающей наклонно на цилиндр. При этом $(\xi \sin \alpha)^2 + \beta^2 = k^2$.

Используя известное разложение [16]

$$\exp [\pm i \beta r \sin (\varphi - \gamma)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^n J_n (\beta r) \exp [i n (\varphi - \gamma)], \quad (10)$$

где $J_n(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя порядка n , получим разложение падающей цилиндрической звуковой волны по цилиндрическим волновым функциям

$$\Psi_0 = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp (i d \eta)}{\eta} \exp (i \xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n (\beta r) \exp [i n (\varphi - \gamma)] d\xi. \quad (11)$$

Потенциал Ψ_{S1} описывает волну, отраженную от плоскости. Он удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям на поверхности границы раздела жидкой и упругой среды, заключающимся в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений:

при $y_1 = -l$:

$$-i \omega u_{y_1} = \frac{\partial (\Psi_0 + \Psi_{S1})}{\partial y_1}, \quad \sigma_{y_1 y_1} = -i \omega \rho_* (\Psi_0 + \Psi_{S1}), \quad \sigma_{x_1 y_1} = 0.$$

где u_{y_1} и $\sigma_{y_1 y_1}$, $\sigma_{x_1 y_1}$ – нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве в прямоугольной системе координат x_1, y_1, z_1 .

Потенциал Ψ_{S1} в прямоугольной системе координат x_1, y_1, z_1 будет иметь вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi) \exp[i(\xi x_1 + \eta(d - y_1))] \frac{d\xi}{\eta},$$

где $A_1(\xi) = \exp(i2l\eta) A'_1(\xi)$. Коэффициент $A'_1(\xi)$ находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной ξ и вертикальной $-\eta$ компонентами волнового вектора $\mathbf{k}_1$, в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [17]. В цилиндрической системе координат r, φ, z потенциал Ψ_{S1} с учетом (10) примет вид

$$\Psi_{S1} = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi) \frac{\exp(id\eta)}{\eta} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) \exp[in(\varphi + \gamma)] d\xi. \quad (12)$$

Поле, рассеянное упругим цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием, в соответствии с (2), (3) будем искать в виде интеграла Гельмгольца-Кирхгофа [18]

$$\Psi_{S2}(\mathbf{R}) = \iint_{\Omega_2} \left[\Psi(\mathbf{R}_2) \frac{\partial G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{R}_2)}{\partial n} G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) \right] d\Omega_2. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{R}$ – точка наблюдения в цилиндрической системе координат (r, φ, z) .

Трехмерная функция Грина (4) согласно [19] в цилиндрической системе координат имеет вид

$$G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_o(h) dh,$$

$$\tilde{G}_o(h) = e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_2)} \begin{cases} J_n(k_h r) H_n(k_h r_2), & r < r_2; \\ J_n(k_h r_2) H_n(k_h r), & r > r_2, \end{cases}$$

$$k_h = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (14)$$

$$G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z-z_2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_h r) \exp(in\varphi) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(k_h r_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}(h) dh,$$

$$g_s(h) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} A_2(\theta, h) \exp[i(2k_h l \cos \theta + s\theta)] d\theta. \quad (15)$$

где $H_n(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; Γ – контур Зоммерфельда на комплексной плоскости θ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$). $A_2(\theta, h)$ – коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент $A_2(\theta, h)$ находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается волновым вектором

$\mathbf{k}_2 = (k_h \xi/k, -k_h \eta/k, h) = (k_h \sin \theta, -k_h \cos \theta, h)$, в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства и приведен в работе [19].

Различные подходы к вычислению интегральных коэффициентов $g_s(h)$, входящих в (15), обсуждались в работах [14, 19].

Теперь воспользуемся результатами работы [10].

Согласно [10] компоненты вектора смещения в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} u_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \\ u_z &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z \sin \alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{3q}(r, \xi) \exp[iq(\varphi - \gamma)] d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $U_{1q}(r, \xi)$, $U_{2q}(r, \xi)$, $U_{3q}(r, \xi)$ для каждого q и ξ являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \hat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r, \xi), U_{2q}(r, \xi), U_{3q}(r, \xi))^T$; $\hat{\mathbf{A}}_q$, $\hat{\mathbf{B}}_q$, $\hat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы третьего порядка с элементами, приведенными в [10].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

при $r = R_1$:

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (18)$$

где u_r и v_r – нормальные компоненты векторов смещения и скорости; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} – компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [20] с учетом (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U_{1q}'(r, \xi) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r, \xi) + iqU_{2q}(r, \xi) + i\xi r U_{3q}(r, \xi) \sin \alpha) \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{r\varphi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r, \xi) + U_{2q}'(r, \xi) - \frac{U_{2q}(r, \xi)}{r} \right] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \\ \sigma_{rz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu [U_{3q}'(r, \xi) + i\xi U_{1q}(r, \xi) \sin \alpha] \Phi_q(\varphi, z, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Phi_q(\varphi, z, \xi) = \exp\{i[\xi z \sin \alpha + q(\varphi - \gamma)]\}$.

Подставим в правую часть уравнения (2) формулы (11)-(13) и устремим точку наблюдения на поверхность Ω_2 . Подставим в левую часть (3) полное акустическое поле, выраженное через нормальное напряжение на поверхности цилиндра с помощью второго граничного условия (18). Далее подставим функцию Грина (4) в виде суммы (14) и (15) в подынтегральное

выражение из (13), где следует воспользоваться нижней строкой формулы (14). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной r_2 . После проведения указанных операций следует положить $r = r_2 = R_1$. Далее воспользуемся первыми двумя граничными условиями (18). Подставим в подынтегральное выражение потенциал полного акустического поля и его нормальную производную на поверхности цилиндра, выраженные через компоненты вектора смещения при помощи условий равенства на ней нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости и равенстве нормального напряжения и акустического давления. С учетом выражений (16) осуществим интегрирование по поверхности цилиндра ($d\Omega_2 = R_1 d\varphi_2 dz_2$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$, $z_2 \in (-\infty, \infty)$). Осуществляя интегрирование по переменной z_2 будем пользоваться следующими свойствами [21]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(h - \xi \sin \alpha) z_2] dz_2 = 2\pi \delta(h - \xi \sin \alpha),$$

$$\int_a^b f(h) \delta(h - \xi \sin \alpha) dh = f(\xi \sin \alpha), \quad h \in [a, b],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

В результате получаем краевое условие для нахождения частного решения системы (17) при $r = R_1$

$$F_{1q}U'_{1q}(R_1, \xi) + F_{2q}^{(1)}U_{1q}(R_1, \xi) + F_{3q}U_{2q}(R_1, \xi) + F_{4q}U_{3q}(R_1, \xi) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n}U'_{1n}(R_1, \xi) + F_{2n}^{(2)}U_{1n}(R_1, \xi) + F_{3n}U_{2n}(R_1, \xi) + F_{4n}U_{3n}(R_1, \xi) \right] F_{5qn} = X_q(\xi)$$

$$q = -\infty, \dots, \infty, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad \xi = -\infty, \dots, \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

где

$$F_{1q} = \frac{i}{\rho_* \omega} [\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)],$$

$$F_{2q}^{(j)} = \frac{i}{\rho_* \omega} \left[\frac{\lambda(R_1)}{R_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(\beta R_1)}{\beta Z_q'^{(j)}(\beta R_1)} \right], \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega},$$

$$F_{4q} = -\frac{\xi \lambda(R_1) \sin \alpha}{\rho_* \omega}, \quad F_{5qn} = (-1)^n \frac{J_n'(\beta R_1)}{H_q'(\beta R_1)} g_{n+q}(\xi \sin \alpha),$$

$$Z_q^{(1)}(\beta R_1) = H_q(\beta R_1), \quad Z_q^{(2)}(\beta R_1) = J_q(\beta R_1),$$

$$X_q(\xi) = -\frac{2A \exp(id\eta)}{i\pi^2 \eta \beta R_1 H_q'(\beta R_1)} [(-1)^q + A_1(\xi) \exp(i2q\gamma)].$$

Другие краевые условия, которым должна удовлетворять система (17) при $r = R_1$, находим из третьего и четвертого граничных условий (18) с учетом (19)

$$iqU_{1q}(R_1, \xi) + R_1 U_{2q}'(R_1, \xi) - U_{2q}(R_1, \xi) = 0,$$

$$U_{3q}'(R_1, \xi) + i\xi U_{1q}(R_1, \xi) \sin \alpha = 0. \quad (21)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

при $r = R_0$:

$$u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad u_z = u_{0z}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{0rz}, \quad (22)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$, u_{0z} и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$, σ_{0rz} – компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных приведенным в [10], из (22) получаем еще три условия, которым должна удовлетворять система (16) при $r = R_0$

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}'_q + \mathbf{T}_q \mathbf{U}_q \right)_{r=R_0} = 0. \quad (23)$$

Компоненты матрицы $\mathbf{T}_q$ в уравнении (23) приведены в [10].

Решений краевой задачи (17), (20), (21), (23) может быть найдено методом сплайн-коллокации [22] для $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N - 1, N$, где в качестве порядка усечения выбирается величина $N = 2[kR_1] + 1$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Используя найденные на поверхности рассеивателя значения функций $U_{1q}(R_1, \xi)$, $U_{2q}(R_1, \xi)$, $U_{3q}(R_1, \xi)$, а также первые два граничные условия (18), получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Полное рассеянное поле определим выражением

$$\Psi_S = \Psi_{S1} + \Psi_{S2}, \quad (24)$$

где Ψ_{S1} определяется формулой (10), а Ψ_{S2} интегральным выражением (11).

Подставим в (13) первые два граничных условия (18), а также функцию Грина в виде (4), в которой первое слагаемое определяется нижней строчкой формулы (14), а второе слагаемое формулой (15). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{S2}(\mathbf{R}) = & \frac{i\pi R_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi z \sin \alpha) \sum_{q=-\infty}^{\infty} [W_{1q} U'_{1q}(R_1, \xi) + W_{2q} U_{1q}(R_1, \xi) + \\ & + W_{3q} U_{2q}(R_1, \xi) + W_{4q} U_{3q}(R_1, \xi)] \times \\ & \times \left[H_q(\beta r) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) \exp(in\varphi) g_{n+q}(\xi \sin \alpha) \right] \exp(-iq\gamma) d\xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} W_{1q} = & \frac{i[\lambda(R_1) + 2\mu(R_1)]}{\rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{2q} = \frac{i\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1) + i\omega J_q(\beta R_1), \\ W_{3q} = & -\frac{q\lambda(R_1)}{R_1 \rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1), \quad W_{4q} = -\frac{\xi \lambda(R_1) \sin \alpha}{\rho_* \omega} \beta J'_q(\beta R_1). \end{aligned}$$

4. О решении обратной задачи

На основе прямой задачи можно определить такие законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее усредненное рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ в фиксированной точке наблюдения $(r, \varphi, z) = (r_*, \varphi_*, z_*)$.

Будем считать, что функции ρ , λ , μ аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , то есть будем рассматривать следующие законы параболические законы неоднородности трансверсально-изотропного упругого материала покрытия:

$$\zeta(r) = \zeta^0 \cdot \bar{\zeta}(r), \quad (26)$$

где

$$\bar{\zeta}(r) = \zeta^{(0)} + \zeta^{(1)}r + \zeta^{(2)}r^2, \quad (27)$$

где ζ^0 – характерная величина материала покрытия. Здесь и далее под символом η подразумевается каждая из величин ρ, λ, μ .

В качестве меры звукового рассеяния введем величину $I(\omega) = |\Psi_S(\omega)/A|^2$ – интенсивность звукового рассеяния. Построим функционал вида

$$\Phi[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) d\omega, \quad (28)$$

определенный на классе квадратичных функций (26) и выражающий усредненную интенсивность рассеяния звука в заданном диапазоне частот.

Для построенного функционала найдем такие значения коэффициентов функций (27), при которых он достигает минимального значения. Для функций (27), определенных на отрезке $[R_0, R_1]$, введем ограничения

$$C_{1\zeta} \leq \bar{\zeta}(r) \leq C_{2\zeta}, \quad (29)$$

где $C_{1\zeta}, C_{2\zeta}$ – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (29) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат $f(r)$ бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$G(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) = \{(r, f) : R_0 \leq r \leq R_1, C_{1\zeta} \leq f \leq C_{2\zeta}\}.$$

В области G каждая функция $f(r)$ единственным образом определяется тремя точками $G_{0\zeta}(R_0, f_{0\zeta}), G_{1\zeta}(\bar{r}, f_{1\zeta}), G_{2\zeta}(R_1, f_{2\zeta})$, где $\bar{r} = (R_0 + R_1)/2, f_{q\zeta} \in [C_{1\zeta}, C_{2\zeta}] (q = 0, 1, 2)$.

Подставляя значения точек $G_{0\zeta}, G_{1\zeta}, G_{2\zeta}$ в выражение (27), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$. Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} \zeta^{(0)} &= [f_{0\zeta} R_1 \bar{r} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} R_1 R_0 (r_1 - R_0) + f_{2\zeta} \bar{r} R_0 (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(1)} &= [f_{0\zeta} (R_1^2 - \bar{r}^2) + f_{1\zeta} (R_0^2 - r_1^2) + f_{2\zeta} (\bar{r}^2 - R_0^2)] / \Delta_\zeta, \\ \zeta^{(2)} &= [f_{0\zeta} (\bar{r} - R_1) + f_{1\zeta} (R_1 - R_0) + f_{2\zeta} (R_0 - \bar{r})] / \Delta_\zeta, \\ \Delta_\zeta &= (R_1 - R_0) (R_1 R_0 - R_1 \bar{r} - R_0 \bar{r} + \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ значения ординат $f_{0\zeta}, f_{1\zeta}, f_{2\zeta}$ и вычисляя с помощью соотношений (30) значения коэффициентов $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$, получаем квадратичные законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$R_0 \leq -\zeta^{(1)} / (2\zeta^{(2)}) \leq R_1,$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[R_0, R_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только в том случае, если ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$, то есть, когда выполняется условие

$$C_{1\zeta} \leq \zeta^{(0)} - \zeta^{(1)2} / (4\zeta^{(2)}) \leq C_{2\zeta}.$$

Поиск значений коэффициентов $\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$ функций (27), удовлетворяющих условиям (29) и минимизирующих функцию

$$\Phi(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \rightarrow \min, \quad (31)$$

может быть осуществлен с помощью алгоритма имитации отжига аналогично тому, как показано в [23].

Введем для ординаты $f_{q\zeta}$ ($q = 0, 1, 2$) точки $G_{q\zeta}$ на отрезке $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$ равномерную сетку $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})} = C_{1\zeta} + l_{q\zeta}\tilde{h}$. Здесь $l_{q\zeta}$ – номер узла сетки, $\tilde{h} = (C_{2\zeta} - C_{1\zeta})/\tilde{n}$ – шаг сетки, $\tilde{n}$ – количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\zeta}, C_{2\zeta}]$.

Алгоритм имитации отжига относится к алгоритмам типа случайного поиска и сводит задачу поиска минимального значения к некоторому перебору значений Φ на сетке $f_{q\zeta}^{(l_{q\zeta})}$, что приводит к необходимости вычисления большого числа интегралов вида

$$\Phi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \omega) d\xi d\omega. \quad (32)$$

Аналитическая запись подынтегральной функции $F(\xi, \omega)$ не приводится для краткости записи и достаточно очевидна исходя из формул (12), (25), (28).

Оценить интеграл (32) аналитически не представляется возможным, и он подлежит только численному расчету. При этом к несобственному интегралу по переменной ξ может быть применен прием обрезания бесконечных пределов [24]. Подынтегральная функция $F(\xi, \omega)$ определяется дискретным набором значений, вычисляемых в заданных точках (ξ_*, ω_*) при решении краевой задачи (17), (20), (21), (23). Вычислительный процесс решения построенной краевой задачи является достаточно трудоемким, что приводит к необходимости выбора наиболее оптимального метода численного интегрирования для интегралов (32): имеющего достаточно высокую точность и требующего как можно меньшего числа узлов (ξ_*, ω_*) . В качестве такого метода может быть использована квадратурная формула на основе параллелепедальной сетки Коробова [25, 26].

5. Численные исследования

На основе полученного решения были проведены расчеты угловых характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_S(\varphi)/A|$ в дальней зоне при $r_* = 100$ в плоскости $z_* = 0$.

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) радиуса $R_0 = 0.8$ с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $l = 1 + R_1$. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu_1 = 7.9 \cdot 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \cdot 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородные, механические характеристики которых менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (R_1 - r) / (R_1 - R_0) + 0.5, \quad R_0 \leq r \leq R_1.$$

Полагалось, что линейный источник отстоит от центра основной координатной системы на расстоянии $d = 1 + R_1$ и генерирует звуковую волну единичной амплитуды с частотой, соответствующей волновому размеру тела $kR_1 = 5$.

На рис. 2 – 3 представлены диаграммы направленности рассеянного поля в области $\varphi \in [0, \pi]$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла φ . Штриховые линии соответствуют цилиндру с однородным покрытием, сплошные линии – цилиндру с неоднородным покрытием.

На рис. 2 и 3 приведены кривые, рассчитанные для случаев, когда $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/4$ соответственно.

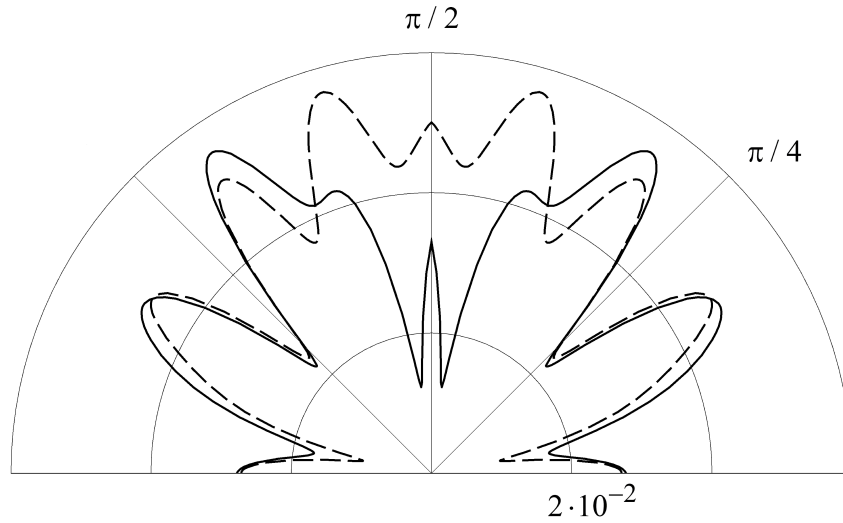


Рис. 2: Диаграммы направленности рассеянного поля, $\alpha = 0$.

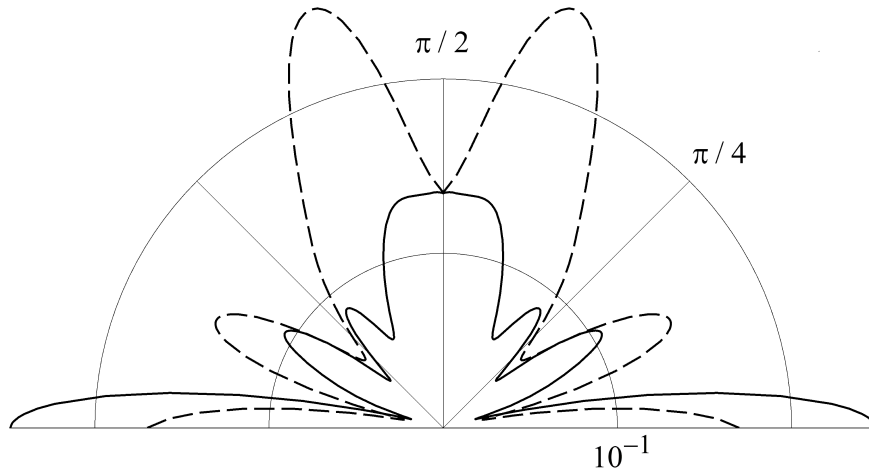


Рис. 3: Диаграммы направленности рассеянного поля, $\alpha = \pi/4$.

Проведены расчеты параметров в законах неоднородности (27), обеспечивающих минимальное рассеяние звука при угле поворота источника $\alpha = \pi/4$.

В ограничениях (29) полагалось $C_{1\zeta} = 0.5$, $C_{2\zeta} = 1.5$ для всех функций $\zeta = \rho, \lambda, \mu$.

При расчетах использовались следующие параметры алгоритма имитации отжига [23] – шаг сетки $\tilde{h} = 0.125$, размерность пространства параметров – $w = 9$, диапазон изменения температуры кристаллизации процесса $[T_{\min}, T_{\max}] = [5.9, 10]$. Для квадратурной формулы на основе параллелепедальной сетки Коробова при вычислении интегралов (32) задавались параметры [26]: $a = 196$, $N = 513$.

Законы неоднородности материала покрытия, обеспечивающие наименьшую интенсив-

ность рассеяния звука цилиндром с покрытием в фиксированной точке наблюдения $(r_*, \varphi_*, z_*) = (100, \pi/2, 0)$ в частотном диапазоне, определяемым изменением волнового размера цилиндра в промежутке $4 \leq kR_1 \leq 5$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho &= 1.07 \cdot 10^3 \cdot 0.5, \\ \lambda &= 3.9 \cdot 10^9 (-12.5r^2 + 27.5r - 13.5), \\ \mu &= 9.8 \cdot 10^8 \cdot (-18.75r^2 + 34.375r - 15).\end{aligned}\quad (33)$$

Для оптимальных законов неоднородности (33) значение функционала $\Phi = 14.93 \cdot 10^{-3}$. Для оценки эффективности покрытия оптимальными звукоотражающими свойствами было рассчитано значение функционала Φ для упругого цилиндра без покрытия, равное $20.8 \cdot 10^{-3}$.

6. Заключение

В настоящей работе получено строгое аналитическое решение задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на бесконечном однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным изотропным упругим покрытием, расположенном вблизи границы однородного изотропного полупространства в случае, когда линейный источник находится в плоскости, параллельной поверхности полупространства и не является параллельным оси цилиндра.

На основе полученного аналитического решения проведены численные расчеты, показывающие возможность изменять звукоотражающие свойства упругих цилиндрических тел с помощью непрерывно-неоднородных покрытий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 791-798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879-889.
3. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34-37.
4. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
5. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
6. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
7. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26-31.
8. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.

9. Корсунский С. В. Неосесимметричная задача дифракции цилиндрических звуковых волн на абсолютно жестком цилиндре // Акустический журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 481-484.
10. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. №1. С. 71-84.
11. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 276-289.
12. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 4. С. 369-381.
13. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустический журн. 2002. Т. 48. № 2. С. 266-276.
14. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 779-791.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 557 с.
16. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
17. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
18. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
19. Ефимов Д. Ю. Дифракция звука от точечного источника на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи упругой границы // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. Вып. 5. С. 289-306.
20. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
21. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
22. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980, 352 с.
23. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Моделирование неоднородного анизотропного покрытия упругого цилиндра, обеспечивающего наименьшее отражение звука // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 1. С. 293-311.
24. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Физматлит, 1978. 512 с.
25. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
26. Добровольский Н. Н., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А., Ларин Н. В. О применении теоретико-числовых сеток в задачах акустики // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 3. С. 368-382.

REFERENCES

1. Ivanov, V.P. 2006. "Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating", *Acoustical Physics* vol. 52, no 6, pp. 683-690.
2. Bobrovnikskii, Yu.I. 2008. "A nonscattering coating for a cylinder", *Acoustical Physics*, vol. 54, no 6, pp. 758-768.
3. Kosarev, O.I. 2012. "Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating", *Probl. Mashinost. Nadezh. Mashin*, vol. 46, no 1, pp. 34-37, [in Russian].
4. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015. "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
5. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011. "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
6. Tolokonnikov, L. A. 2013. "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
7. Lee F. A. 1963. "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no. 3. pp. 26-31.
8. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021. " Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with radially inhomogeneous coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
9. Korsunskii, S. V. 1988. "The non-axisymmetric diffraction problem of cylindrical sound waves on an absolutely rigid cylinder", *Akust. Zhurnal*, vol. 34, no. 3, pp. 481-484, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2024. "Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by an arbitrarily located linear source", *Mathematical modeling*, vol. 36, no. 1, pp. 71-84, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. 2018. "Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki* , no. 9, pp. 276-289, [in Russian].
12. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2020. "Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating situated near to a flat surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 369-381, [in Russian].
13. Shenderov, E. L. 2002. "Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace", *Acoustical Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 225-234.
14. Tolokonnikov, L. A. & Efimov, D. Yu. 2021. "Diffraction of sound waves at an elastic cylinder with an inhomogeneous coating in the vicinity of the boundary of an elastic half-space", *Mechanics of Solids*, vol. 56, no. 8, pp. 1657-1667.
15. Felsen, L. B., Marcuvitz, N. 1973. "Radiation and scattering of waves", *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
16. Ivanov, E. A. 1968. "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", *Nauka i tekhnika, Minsk*, 584 p., [in Russian].

17. Brekhovskikh, L. M. 1973. "Waves in Layered Media", *Nauka, Moscow*, 344 p., [in Russian].
18. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
19. Efimov, D. Yu. 2023, "Diffraction of sound from a point source on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating located near the elastic boundary", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 5, pp. 289-306, [in Russian].
20. Nowacki, W. 1973. "Teoria sprzystosci", *PWN, Warszawa*.
21. Kurant, R. 1964. "Partial Differential Equations", *Mir, Moscow*, 830 p., [in Russian].
22. Zavyialov, Yu. S., Kvasov, B. I. & Miroshnichenko, V. L. 1980. "Spline function methods", *Nauka, Moscow*, 352 p., [in Russian].
23. Tolokonnikov, L. A. & Efimov D. Yu. 2022. "Modeling the inhomogeneous anisotropic coating of an elastic cylinder that provides minimal sound reflection", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 1, pp. 293–311, [in Russian].
24. Kalitkin, N. N. 1978. "Numerical methods", *Fizmatgiz, Moscow*, 512 p., [in Russian].
25. Korobov, N. M. 2004. "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed., MTSNMO, Moscow, Russia.
26. Dobrovol'skii, N. N., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2021. "About application of number-theoretic grids in problems of acoustics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 368-382, [in Russian].

Получено: 04.02.2024

Принято в печать: 28.06.2024