ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-260-268

Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением [1]

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Тарабрин Роман Владимирович — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: reanimators@rambler.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе построена теория рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. В частности, доказана теорема, что ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением, образуют алгебру над полем комплексных чисел.

В заключении рассмотрены актуальные задачи для рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле.

Библиография: 6 названий.

Для цитирования:
Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Ряды Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник.- 2024.- Т. 25.- вып. 2.- С. 260–268.

[1] Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-260-268

Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication[2]

R. V. Tarabrin, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Tarabrin Roman Vladimirovich — postgraduate student, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: reanimators@rambler.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The work constructs a theory of Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication. In particular, the theorem is proven that Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication form an algebra over the field of complex numbers.

In conclusion, current problems for Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication are considered, requiring further research.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series.

Bibliography: 6 titles.

For citation:
Tarabrin, R. V., Dobrovolsky, N. N., Dobrovolsky, N. M. 2024, "Dirichlet series of the second kind for irreducible lattices repeated by multiplication" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 260–268.

1. Введение

Хорошо известно, что максимальная неприводимая решётка, повторяющаяся умножением, в пространстве $\mathbb{R}^s$ задается чисто вещественным алгебраическим полем F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [3]).

Если F_s — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{F_s}$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F_s, то s-мерной решёткой является множество $\Lambda(F_s)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_{F_s}$:

$$\Lambda(F_s) = \{(\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_{F_s}\}, \tag{1}$$

где $\Theta^{(1)}, \dots, \Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d – дискриминант поля F_s (см. [2]), то $\det \Lambda(F_s) = \sqrt{d}$.

[2]The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

Прежде всего, следуя за работой [4], заметим, что гиперболическая дзета-функция решёток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Норменным спектром решётки Λ называется множество значений нормы на ненулевых точках решётки Λ:

$$N_{sp}(\Lambda)=\{\lambda\ |\ \lambda=N(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Lambda\backslash\{\vec{0}\}\}.$$

Напомним, что нормой точки $\vec{x}$ называется величина $N(\vec{x})=|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|$.

Соответственно усеченным норменным спектром решётки Λ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решётки:

$$Q_{sp}(\Lambda)=\{\lambda\ |\ \lambda=q(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Lambda\backslash\{\vec{0}\}\},$$

где усечённая норма точки $\vec{x}$ задается равенством $q(\vec{x})=\overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_s}$ и для любого вещественного x полагаем $\overline{x}=\max(1,|x|)$.

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, то есть

$$Q_{sp}(\Lambda)=\{\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<\ldots\}\quad\text{и}\quad\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda)=\inf_{\lambda\in N_{sp}(\Lambda)}\lambda,\quad q(\Lambda)=\min_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda)}\lambda=\lambda_1.$$

Порядком точки спектра называется количество точек решётки с заданным значением нормы. Если таких точек решётки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра обозначается через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, через $q(\lambda)$.

Понятие порядка точки спектра позволяет лучше понять определение гиперболической дзета–функции решётки $\Lambda(T)=T\cdot\Lambda(F_s)$. В нем вместо нормы точки $\vec{x}$ фигурирует усеченная норма:

$$\zeta_H(\Lambda(T)|\alpha)=\sum_{\Theta\in\mathbb{Z}_{F_s}}{}' \left(\overline{T\Theta^{(1)}}\ldots\overline{T\Theta^{(s)}}\right)^{-\alpha} \tag{2}$$

Можно привести пример решётки Λ, для которой ряд

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|^{-\alpha}$$

расходится при любом α.

Действительно, пусть $\Lambda=T\cdot\Lambda(F_s)$ – алгебраическая решётка, тогда

$$\sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}'|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|^{-\alpha}=\sum_{w\in\mathbb{Z}_F}{}'\,|T^s\cdot N(w)|^{-\alpha}, \tag{3}$$

где $N(w)$ — норма целого алгебраического числа из кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$. В силу теоремы Дирихле о единицах ряд в правой части равенства (3) расходится при любом α, так как в кольце $\mathbb{Z}_{F_s}$ целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F_s степени s имеется бесконечно много единиц ε и для них $|N(\varepsilon)|=1$. Таким образом в этом случае каждая точка норменного спектра имеет бесконечный порядок, что и приводит к расходимости при любом α.

Для любой неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением, можно рассмотреть ряды Дирихле второго рода, в которых в знаменателе стоит норма алгебраического числа, она же норма соответствующей точки решётки, а числители удовлетворяют дополнительному условию, что сумма всех числителей для точек с одинаковой нормой абсолютно сходится.

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot)) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} \frac{a(\vec{x})}{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки норменного спектра $N_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}\}, \quad N(\vec{x}) = |x_1\cdot\ldots\cdot x_s|,$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} a(\vec{x}), \qquad \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} |a(\vec{x})| < \infty.$$

Так как выполняется очевидное включение $N_{sp}(\Lambda)\subset\mathbb{N}$ и норменный спектр $N_{sp}(\Lambda)$ является моноидом натуральных чисел, то получаем связь с теорией рядов Дирихле для моноидов натуральных чисел (см. [6]).

В частности, если нам даны два ряда Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением: $f(\alpha|\Lambda, a(\cdot))$ и $f(\alpha|\Lambda, b(\cdot))$, то можно рассмотреть их произведение в силу абсолютной сходимости рядов $A(\lambda_n)$ и $B(\lambda_m)$:

$$f(\alpha|\Lambda, a(\cdot))\cdot f(\alpha|\Lambda, b(\cdot)) = f(\alpha|\Lambda, c(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} C(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha},$$

где

$$c(\vec{x}) = \sum_{\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{x}} a(\vec{y})b(\vec{z}), \quad C(\lambda_k) = \sum_{|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|=\lambda_k} c(\vec{x}) = \sum_{\lambda_n\lambda_m=\lambda_k} A(\lambda_n)B(\lambda_m).$$

Таким образом, если мы через $\mathbb{D}(\Lambda)$ обозначим множество рядов Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением, то это будет коммутативная алгебра с единицей, так как $1\in\mathbb{D}(\Lambda)$.

Цель данных исследований — построение теории рядов Дирихле второго рода для решёток Λ, повторяющихся умножением.

2. Теорема Дирихле о единицах и общий вид рядов Дирихле второго рода с мультипликативной функцией

Обозначим через $\mathbb{U}_{F_s}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто вещественного алгебраического поля F_s. Согласно теореме Дирихле эта бесконечная группа имеет $s-1$ образующую — фундаментальные единицы. Пусть $\mathbb{Z}^*_{F_s}$ — мультипликативный моноид ненулевых целых алгебраических чисел кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$. Пусть Ω_s — система целых алгебраических чисел ω по одному из каждого класса фактор моноида $\mathbb{Z}^*_{F_s}\setminus\mathbb{U}_{F_s}$, тогда $\mathbb{Z}^*_{F_s} = \bigcup_{\omega\in\Omega_s}\omega\cdot\mathbb{U}_{F_s}$. Будем считать, что всегда $1\in\Omega_s$. Ясно, что справедливо равенство $\omega_1\cdot\omega_2 = \omega_3\cdot\varepsilon$, где $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in\Omega_s$, $\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}$ и ω_3,ε однозначно определяются по ω_1,ω_2.

На основании вышесказанного можно на Ω_s определить алгебраическую операцию

$$\omega_1 * \omega_2 = \omega_3,$$

где ω_3,ε однозначно определяются по ω_1,ω_2 с помощью равенства $\omega_1\cdot\omega_2 = \omega_3\cdot\varepsilon$. Таким образом, множество Ω_s превращается в мультипликативный моноид относительно операции $*$.

Будем говорить, что на Ω_s определена мультипликативная функция $b(\cdot)$, если справедливо равенство
$$b(\omega_1 * \omega_2) = b(\omega_1) \cdot b(\omega_2).$$

Будем через $\vec{x}(\omega) = (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(s)})$ обозначать точку алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$, соответствующую целому алгебраическому числу $\omega \in \mathbb{Z}_{F_s}$. Если $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_s y_s)$ — произведение двух точек, то справедливо равенство для точек алгебраической решётки$\Lambda(F_s)$:

$$\vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) = \vec{x}(\omega_3) \cdot \vec{x}(\varepsilon),$$

при этом сомножители в правой части равенства однозначно определяются сомножителями в левой части.

С другой стороны, для любой точки $\vec{x}(\omega) \in \Lambda(F_s)$ однозначно определены $\omega^* \in \Omega_s$ и $\varepsilon^* \in \mathbb{U}_{F_s}$ такие, что
$$\vec{x}(\omega) = \vec{x}(\omega^*) \cdot \vec{x}(\varepsilon^*).$$

Для дальнейшего нам потребуется функция числа делителей алгебраического числа $\omega_3 \in \Omega_s$, которая обозначается через $d(\omega_3)$ и определяется равенством

$$d(\omega_3) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \omega_3 = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \varepsilon}} 1.$$

В силу предыдущего можно определить функцию числа делителей произвольной точки $\vec{x}(\omega_3)$ алгебраической решётки $\Lambda(F_s)$:

$$d(\vec{x}(\omega_3)) = \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \in \Omega_s, \varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s} \\ \vec{x}(\omega_3) = \vec{x}(\omega_1) \cdot \vec{x}(\omega_2) \cdot \vec{x}(\varepsilon)}} 1 = d(\omega_3).$$

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F_s)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов (ω) чисто-вещественного поля F_s (см. [5]):
$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

которую можно записать как

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F_s) = \sum_{\omega \in \Omega_s} |N(\omega)|^{-\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1).$$

Пусть на группе $\mathbb{U}_{F_s}$ алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s}$ чисто вещественного алгебраического поля F_s определена произвольная функция $a(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s})$, которая удовлетворяет условию сходимости

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} |a(\varepsilon)| < \infty.$$

Таким образом, для величины
$$A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = \sum_{\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s}} a(\varepsilon)$$

справедливо неравенство $|A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))| < \infty$. Будем кроме того требовать выполнение условия невырожденности: $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) \neq 0$.

Теперь мы можем записать общий вид ряда Дирихле второго рода с мультипликативной функцией числителя для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. Рассмотрим алгебраическую решетку $\Lambda(T) = T \cdot \Lambda(F_s)$ с растущим детерминантом $\det(T \cdot \Lambda(F_s)) = T^s\sqrt{d}$ $(t \to \infty)$:

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) = \sum_{\vec{x}(\omega)\in\Lambda(F_s)} \frac{b(\omega^*)a(\varepsilon^*)}{(T^s \cdot N(\vec{x}))^\alpha} = \sum_{\omega\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}} \frac{b(\omega)a(\varepsilon)}{|T^s \cdot N(\omega)|^\alpha} =$$
$$= \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega\in\Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^\alpha}.$$

Теорема 1. *Для любого $\sigma > 1$ справедливо равенство*

$$f(\alpha|\Lambda(T), 1, a(\cdot)) = \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \zeta_{D_0}(\alpha|F_s).$$

Доказательство. Действительно, в силу абсолютной сходимости ряда для величины $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))$ имеем:

$$f(\alpha|\Lambda(T), 1, a(\cdot)) = \sum_{\omega\in\Omega_s} \frac{1}{T^{s\alpha}|N(\omega)|^\alpha} \cdot A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \sum_{\omega\in\Omega_s} \frac{1}{|N(\omega)|^\alpha} =$$
$$= \frac{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}{T^{s\alpha}} \cdot \zeta_{D_0}(\alpha|F_s).$$

□

Будем говорить, что функция $a(\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{U}_{F_s})$ нормированная, если $A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot)) = 1$. Очевидно, что функция $a^*(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}$ будет нормированной. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a(\cdot)) = f\left(\alpha\,|\Lambda(T), b(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))\,,\frac{a(\varepsilon)}{A(\mathbb{U}_{F_s}, a(\cdot))}\right).$$

Таким образом, если $a^*(\varepsilon)$ — нормированный сомножитель числителя ряда Дирихле второго рода для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, то справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} \sum_{\omega\in\Omega_s} \frac{b(\omega)}{|N(\omega)|^\alpha}.$$

Мы получили парадоксальный результат, что значение ряда Дирихле второго рода с мультипликативным числителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, не зависит от нормированного сомножителя числителя ряда Дирихле.

Второй парадоксальный результат состоит в том, что справедливо равенство

$$f(\alpha|\Lambda(T), b(\cdot), a^*(\cdot)) = \frac{1}{T^{s\alpha}} f(\alpha|\Lambda(F_s), b(\cdot), a^*(\cdot)).$$

Из этого равенства следует, что вопрос об асимптотики рядов Дирихле второго рода с мультипликативным числителем и нормированным сомножителем для неприводимой решётки, повторяющийся умножением, становится тривиальным.

3. Алгебра рядов Дирихле второго рода

Рассмотрим вопрос о алгебраической природе множества рядов Дирихле второго рода для неприводимых решёток, повторяющихся умножением. Как уже было отмечено выше, $\mathbb{D}(\Lambda)$ — множество рядов Дирихле второго рода для произвольной неприводимой решётки Λ, повторяющейся умножением, является коммутативной алгеброй с единицей.

На функцию $b(\cdot)$ наложим дополнительное условие мультипликативности

$$b(\omega_1)b(\omega_2)=b(\omega_1\omega_2)=b(\omega_1\omega_2\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}$.

Лемма 1. *Для любой мультипликативной функции $b(\cdot)$ справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega_s,\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}\\ \omega_3=\omega_1\cdot\omega_2\cdot\varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2)=b(\omega_3)d(\omega_3).$$

Доказательство. Действительно, из равенства $\omega_3=\omega_1\cdot\omega_2\cdot\varepsilon$ и мультипликативности функции $b(\cdot)$ следует, что $b(\omega_1)b(\omega_2)=b(\omega_3)$ и

$$\sum_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega_s,\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}\\ \omega_3=\omega_1\cdot\omega_2\cdot\varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2)=b(\omega_3)\sum_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega_s,\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}\\ \omega_3=\omega_1\cdot\omega_2\cdot\varepsilon}} 1=b(\omega_3)d(\omega_3).$$

□

Теорема 2. *Пусть даны два ряда Дирихле второго рода для неприводимой решётки Λ, повторяющихся умножением, $f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),a(\cdot))$ и $f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),c(\cdot))$. Тогда для суммы и произведения этих рядов Дирихле второго рода справедливы равенства*

$$f(\alpha|\Lambda,b_1(\cdot),a(\cdot))+f(\alpha|\Lambda,b_2(\cdot),c(\cdot))=f\left(\alpha\left|\Lambda,b_1(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s},a(\cdot))+b_2(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s},\frac{a^*(\cdot)+c^*(\cdot)}{2}\right.\right),\quad(4)$$

$$f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),a(\cdot))\cdot f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),c(\cdot))=f(\alpha|\Lambda,b(\cdot)d(\cdot),e(\cdot)),\quad(5)$$

где $e(\varepsilon)=\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\in\mathbb{U}_{F_s},\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2}a(\varepsilon_1)c(\varepsilon_2)$ и $d(\cdot)$ — функция числа делителей.

Доказательство. Действительно, для суммы двух рядов Дирихле второго рода имеем:

$$f(\alpha|\Lambda,b_1(\cdot),a(\cdot))+f(\alpha|\Lambda,b_2(\cdot),c(\cdot))=\sum_{\omega\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}\frac{b_1(\omega)a(\varepsilon)}{|N(\omega)|^\alpha}+\sum_{\omega\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}\frac{b_2(\omega)c(\varepsilon)}{|N(\omega)|^\alpha}=$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega_s}\frac{b_1(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s},a(\cdot))+b_2(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s},c(\cdot))}{|N(\omega)|^\alpha}\frac{1}{2}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}(a^*(\varepsilon)+c^*(\varepsilon))=$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}\frac{(b_1(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s},a(\cdot))+b_2(\omega)A(\mathbb{U}_{F_s},c(\cdot)))\left(\frac{a^*(\varepsilon)+c^*(\varepsilon)}{2}\right)}{|N(\omega)|^\alpha}=$$

$$=f\left(\alpha\left|\Lambda,b_1(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s},a(\cdot))+b_2(\cdot)A(\mathbb{U}_{F_s},\frac{a^*(\cdot)+c^*(\cdot)}{2}\right.\right).$$

Для произведения этих рядов в области абсолютной сходимости $\sigma>1$ в силу мультипликативности нормы алгебраического числа и мультипликативности функции $b(\cdot)$ имеем:

$$f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),a(\cdot))\cdot f(\alpha|\Lambda,b(\cdot),c(\cdot))=\sum_{\omega_1\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon_1\in\mathbb{U}_{F_s}}\frac{b(\omega_1)a(\varepsilon_1)}{|N(\omega_1)|^\alpha}\sum_{\omega_2\in\Omega_s}\sum_{\varepsilon_2\in\mathbb{U}_{F_s}}\frac{b(\omega_2)c(\varepsilon_2)}{|N(\omega_2)|^\alpha}=$$

$$=\sum_{\omega_3\in\Omega_s}\frac{1}{|N(\omega_3)|^\alpha}\sum_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega_s,\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}\\ \omega_3=\omega_1\cdot\omega_2\cdot\varepsilon}} b(\omega_1)b(\omega_2)A(\mathbb{U}_{F_s},a(\cdot))A(\mathbb{U}_{F_s},c(\cdot))=$$

$$=\sum_{\omega_3\in\Omega_s}\frac{b(\omega_3)}{|N(\omega_3)|^\alpha}d(\omega_3)\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}\sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\in\mathbb{U}_{F_s},\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2}a(\varepsilon_1)c(\varepsilon_2)=\sum_{\omega_3\in\Omega_s}\frac{b(\omega_3)d(\omega_3)}{|N(\omega_3)|^\alpha}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{U}_{F_s}}e(\varepsilon).$$

□

4. Заключение

В работе [5] достаточно сложными рассуждениями для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки $\Lambda(T)$ получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(T)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(T)-\ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^\nu\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F_s)}{(\det\Lambda(T))^\alpha} + R(\Lambda(T),\alpha,\theta), \tag{6}$$

где

$$R(\Lambda(T),\alpha,\theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(T))}{(\det\Lambda(T))^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad R \ \text{— регулятор поля.}$$

Для величины $R(\Lambda(T),\alpha,\theta)$ найдено выражение

$$R(\Lambda(T),\alpha,\theta) = \sum_{(\omega)}\frac{2}{(T^s|N(\omega)|)^\alpha}\frac{1}{R\cdot(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-2}C_{s-1}^{\nu}(\ln T^s + \ln|N(\omega)|)^\nu(s\cdot\theta a)^{s-1-\nu} +$$

$$+\sum_{(\omega)}\frac{2}{(T^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s-1}\sum_{\vec{j}\in D(p)}\frac{C(\vec{j},p)e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(s-m)!C_{p-1}^{m}\cdot(\ln T^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}},$$

$$R(\Lambda(T),\alpha,\theta) = O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(T))}{(\det\Lambda(T))^\alpha}\right).$$

Области $D(p)$ целочисленных векторов, заданны равенством

$$D(p) = \left\{(j_1,\ldots,j_s)\ \middle|\ \begin{matrix}1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant s,\ 1\leqslant j_{p+1}<\ldots<j_s<s,\\ \{j_1,\ldots,j_s\}=\{1,\ldots,s\}\end{matrix}\right\}.$$

Сравнивая эту асимптотическую формулу с утверждением теоремы 1, мы видим, что асимптотическая формула для ряда Дирихле второго рода гораздо проще и её вывод практически тривиален.

Возникают новые вопросы об аналитическом продолжении ряда Дирихле второго рода. Очевидно, этот вопрос эквивалентен вопросу об аналитическом продолжении дзета-функции Дедекинда главных идеалов. Здесь необходимо отметить, что этот вопрос остается открытым, хотя для дзета-функции Дедекинда известно (см. [1]), что дзета-функции Дедекинда имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, где полюс первого порядка.

Дзета-функция Дедекинда главных идеалов отличается от дзета-функции Дедекинда и ранее, как нам известно, не рассматривалась. Они совпадают только для алгебраических полей, в которых все идеалы кольца целых алгебраических чисел являются главными идеалами, то есть число классов дивизоров равно 1. Поэтому необходимы новые дополнительные исследования для ответа на поставленные вопросы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштайн Д., Гелбарт С. Введение в программу Ленгпендса, 2008

2. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

3. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, С. 3–340.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 109–134.

6. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

REFERENCES

1. Bernstein D., Gelbart S. 2008, “Introduction to the Langpends Program”.

2. Hecke E. 1940, “Lectures on the theory of algebraic numbers”, *M.; L.: Gostekhizdat.*

3. Delone, B. N., Faddeev, D. K. 1940, “The theory of irrationalities of the third degree”, *Tr. Math. V. A. Steklov Institute, 11, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, M.-L.*, pp. 3-340.

4. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol’skii, N. N. 2018, “On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 109–134.

6. Dobrovol’skii, N. N., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M., Balaba, I. N., Rebrova, I. Yu. 2019, “Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

Получено: 12.04.2024
Принято в печать: 28.06.2024