ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-251-259

Непрерывность рядов Дирихле s-мерных решёток[1]

Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Тарабрин Роман Владимирович — аспирант, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: reanimators@rambler.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого(г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого(г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого(г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе исследуются ряды Дирихле s-мерных решёток. В частности, доказана теорема, что ряды Дирихле s-мерных решёток непрерывны на пространстве решёток в области их абсолютной сходимости.

В заключении рассмотрены актуальные задачи для рядов Дирихле s-мерных решёток, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, гиперболическая дзета-функция решётки.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:
Р. В. Тарабрин, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Непрерывность рядов Дирихле s-мерных решёток // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25, вып. 2, С. 251–259.

[1]Работа выполнена по гранту РНФ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-251-259

Continuity of Dirichlet series of s-dimensional lattices[2]

P. V. Tarabrin, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N.M. Dobrovol'skii

Tarabrin Roman Vladimirovich — postgraduate student, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: reanimators@rambler.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In this work, Dirichlet series of s-dimensional lattices are studied. In particular, the theorem is proved that the Dirichlet series of s-dimensional lattices are continuous on the space of lattices in the region of their absolute convergence.

In conclusion, current problems for Dirichlet series of s-dimensional lattices that require further research are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, hyperbolic lattice zeta function.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
R. V. Tarabrin, N. N. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovolsky, 2024. "Continuity of Dirichlet series of s-dimensional lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 251–259.

1. Введение и постановка задачи

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ — произвольная полная s-мерная решётка. В этой работе будут использоваться только полные решётки, поэтому для краткости слово полная будем опускать.

Рассмотрим множество $\mathbb{D}(\Lambda)$ — произвольных рядов Дирихле вида

$$f(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} \frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а функция $a(\vec{x})$ является непрерывной функцией на всём пространстве $\mathbb{R}^s$ и функция усечённой нормы $q(\vec{x})$ задается равенством $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$ и для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

[2]The work has been prepared by the RSF grant № 23-21-00317 "Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis"

Заметим, что ряд Дирихле s-мерной решётки является кратным рядом, а поэтому абсцисса абсолютной сходимости и абсцисса сходимости совпадают, так как порядок членов ряда не определён, и, следовательно, сумма ряда должна быть определена для любого порядка суммирования членов ряда, а это свойство абсолютно сходящихся рядов.

Можно ряд $f(\Lambda|\alpha)$ записать как обычный обобщенный ряд Дирихле:

$$f(\Lambda|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\lambda_n)}{\lambda_n^{\alpha}}, \quad A(\lambda_n) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} a(\vec{x}),$$

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda\backslash\{\vec{0}\}\},$$

$Q_{sp}(\Lambda)$ — усеченный норменный спектр решётки Λ. Отсюда следует, что абсцисса абсолютной сходимости может уменьшиться, так как

$$|A(\lambda_n)| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} |a(\vec{x})|,$$

а понятие абсциссы сходимости приобретает содержательный смысл.

Как хорошо известно [4, 5], для любых обычных рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma_f^* + 1$. В случае, если решётка Λ — целочисленная решётка, мы получаем обычный ряд Дирихле. Но если Λ — произвольная нецелочисленная решётка, то ряд Дирихле, вообще говоря, будет обобщенным.

Поэтому первая цель данной работы доказать, что справедлива оценка для абсциссы абсолютной сходимости и абсциссы сходимости для ряда Дирихле произвольной решётки Λ.

Для области сходимости ряда Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ важную роль играет скорость роста функции $a(\vec{x})$. Нетрудно видеть, что если для любого $\sigma > 0$ найдётся последовательность точек $\vec{x}_{\sigma,1}, \vec{x}_{\sigma,2}, \ldots \in \Lambda$ с $q(\vec{x}_{\sigma,1}) < q(\vec{x}_{\sigma,2}) < \ldots$, для которой $|a(\vec{x}_{\sigma,\nu})| > q(\vec{x}_{\sigma,\nu})^{\sigma}$ $\nu = 1, 2, \ldots$, то для абсциссы сходимости будет выполнено неравенство $\sigma_f^* > \sigma$, и в силу произвольности $\sigma > 0$ ряд Дирихле будет расходиться на всей комплексной плоскости.

Отсюда следует, что вторая цель данной работы — найти связь между скоростью роста или убывания функции $a(\vec{x})$ и величиной абсциссы сходимости соответствующего ряда Дирихле.

Частным случаем ряда Дирихле s-мерной решётки Λ является гиперболическая дзета-функция решётки $\zeta_H(\alpha|\Lambda)$, которая задается равенством

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda\backslash\{\vec{0}\}} \frac{1}{q(\vec{x})^{\alpha}}.$$

В работе [1] доказано, что гиперболическая дзета-функция решёток непрерывна на метрическом пространстве s-мерных решёток. Возникает естественный вопрос о справедливости этого утверждения для произвольного ряда Дирихле s-мерной решётки. Ответ на этот вопрос будет третьей целью данной работы.

2. Соотношения между абсциссой абсолютной сходимости и абсциссой сходимости

Как известно, гиперболическим параметром решётки Λ называется величина $q(\Lambda)$ заданная равенством

$$q(\Lambda) = \lambda_1 = \min(\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)) = \min_{\vec{x}\in\Lambda\backslash\{\vec{0}\}} q(\vec{x}).$$

По теореме Абеля (см. [4], стр. 106) в области сходимости справедливо равенство

$$f(\Lambda|\alpha) = \alpha \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{A^*(x)}{x^{\alpha+1}} dx, \quad A^*(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} A(\lambda_n).$$

Теорема 1. *Для любого ряда Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f - \sigma_f^* \leqslant 1$.*

Доказательство. Действительно, если несобственный интеграл для ряда Дирихле $f(\Lambda|\alpha)$ сходится в точке $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geqslant \sigma_f^*$, то справедливы соотношения

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|A^*(x)|}{x^{\sigma+1}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{|a(x)|}{x^{\sigma}} = 0.$$

Далее заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\vec{x}\in\Lambda, q(\vec{x})=\lambda_n} 1}{\lambda_n^{1+\varepsilon}} = \sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} \frac{1}{q(\vec{x})^{1+\varepsilon}} = \zeta_H(\Lambda|1+\varepsilon).$$

Но абсцисса абсолютной сходимости гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ равна 1. Поэтому ряд для $\zeta_H(\Lambda|1+\varepsilon)$ абсолютно сходится для любого $\varepsilon > 1$. Отсюда следует, что ряд Дирихле

$$f(\Lambda|\sigma + it + 1 + \varepsilon)$$

абсолютно сходится для любого $\varepsilon > 1$. Тем самым доказано, что $\sigma_f - \sigma_f^* \leqslant 1$. □

Замечание 1. *Хотя, как уже было отмечено выше, в общем случае ряд Дирихле s-мерной решётки, вообще говоря, будет обобщенным рядом Дирихле, но в данном случае область абсолютной сходимости гиперболической дзета-функции решётки совпадает с областью абсолютной сходимости дзета-функции Римана, что и обеспечивает перенос свойства сходимости обычных рядов Дирихле на случай ряда Дирихле s-мерной решётки.*

Замечание 2. *Для функции числителя $a(\vec{x})$ ряда Дирихле выполняется очевидное условие*

$$\lim_{q(\vec{x})\to\infty} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_f+\varepsilon}} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, если абсцисса абсолютной сходимости вещественное число.

В частности, для любого $\sigma_0 > \sigma_f$ найдется константа $C = C(\sigma_0, \varepsilon) > 0$, такая, что выполнены неравенства

$$|a(\vec{x})| \leqslant Cq(\vec{x})^{\sigma_f+\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \sigma_0 - \sigma_f,$$

при этом $C(\sigma_0, \varepsilon)$ — убывающая функция на промежутке $0 < \varepsilon \leqslant \sigma_0 - \sigma_f$.

Если ряд Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ сходится на всей комплексной плоскости (т. е. $\sigma_f = -\infty$), то

$$\lim_{q(\vec{x})\to\infty} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma}} = 0$$

для любого вещественного σ.

3. Скорость изменения функции коэффициентов и область сходимости ряда Дирихле многомерной решётки

Прежде всего дадим несколько определений.

Определение 1. *Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ-степенной рост с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leqslant C \cdot q(\vec{x})^{\sigma}$.*

Определение 2. *Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ-степенное убывание с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leqslant C \cdot q(\vec{x})^{-\sigma}$.*

Определение 3. *Пусть $\sigma > 0$, тогда говорим, что непрерывная функция $a(\vec{x})$ имеет σ-экспоненциальное убывание с константой $C > 0$, если для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$ выполнено неравенство $|a(\vec{x})| \leqslant C \cdot e^{-\sigma \cdot q(\vec{x})}$.*

Нам потребуется следующая теорема из работы [2]. Пусть $K(T) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) \leqslant T\}$ — гиперболический крест, $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K(T)$.

Теорема 2. *Для любой решётке Λ при $T \geqslant 3$ справедливо асимптотическое равенство*

$$D(T|\Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \Theta C(\Lambda) \frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda},$$

где $C(\Lambda) = 2^s e(a_0 + 2)^s$ и $|\Theta| \leqslant 1$.

В формулировке этой теоремы используются следующие обозначения. Пусть $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{js})$ $(j = 1, \ldots, s)$ — произвольный фиксированный базис решётки Λ и

$$A = A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s) = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{s} |\lambda_{\nu j}|,$$

тогда $a_0 = a_0(\Lambda) = \min \overline{A}(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$, где минимум берется по всем базисам решётки Λ.

Теорема 3. *Для любой решётке Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ-степенным ростом с константой $C > 0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma + 1$.*

Доказательство. Действительно, для $\alpha = \sigma_1 + it$ из определения скорости роста функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$|f(\Lambda|\alpha)| \leqslant \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}} \leqslant \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1 - \sigma}} = C(\sigma_1 - \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(x|\Lambda)}{x^{\sigma_1 - \sigma + 1}} dx \ll$$

$$\ll (\sigma_1 - \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{x \ln^{s-1} x}{x^{\sigma_1 - \sigma + 1}} dx < \infty$$

при $\sigma_1 > \sigma + 1$. Отсюда следует, что $\sigma_f \leqslant \sigma + 1$. $\square$

Теорема 4. *Для любой решётке Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ-степенной скоростью убывания с константой $C > 0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant -\sigma + 1$.*

Доказательство. Действительно, для $\alpha = \sigma_1 + it$ из определения скорости убывания функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$|f(\Lambda|\alpha)| \leqslant \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}} \leqslant \sum_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} \frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1 + \sigma}} = C(\sigma_1 + \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(x|\Lambda)}{x^{\sigma_1 + \sigma + 1}} dx \ll$$

$$\ll (\sigma_1 + \sigma) \int_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{x \ln^{s-1} x}{x^{\sigma_1 + \sigma + 1}} dx < \infty$$

при $\sigma_1 > -\sigma + 1$. Отсюда следует, что $\sigma_f \leqslant -\sigma + 1$. $\square$

Теорема 5. *Для любой решётке Λ и функции $a(\vec{x})$ со σ-экспоненциальной скоростью убывания с константой $C>0$ для абсциссы абсолютной сходимости ряда Дирихле s-мерной решётки $f(\Lambda|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_f=-\infty$.*

Доказательство. Действительно, для $\alpha=\sigma_1+it$ из определения скорости убывания функции $a(\vec{x})$ имеем:

$$|f(\Lambda|\alpha)|\leqslant\sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}}\frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_1}}\leqslant\sum_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}}\frac{C}{q(\vec{x})^{\sigma_1}e^{\sigma q(\vec{x})}}=C\int_{q(\Lambda)}^{\infty}D(x|\Lambda)\left(\frac{\sigma_1}{x^{\sigma_1+1}e^{\sigma x}}+\frac{\sigma}{x^{\sigma_1}e^{\sigma x}}\right)dx\ll$$
$$\ll\int_{q(\Lambda)}^{\infty}x\ln^{s-1}x\left(\frac{\sigma_1}{x^{\sigma_1+1}e^{\sigma x}}+\frac{\sigma}{x^{\sigma_1}e^{\sigma x}}\right)dx<\infty$$

при $\sigma_1>-\infty$. Отсюда следует, что $\sigma_f=-\infty$. $\square$

4. Непрерывность рядов Дирихле многомерных решёток

Как известно (см. [3], стр. 160–165), пространство решеток является метрическим пространством, и, если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ, то существует последовательность невырожденных матриц

$$A_n=\begin{pmatrix}a_{11}^{(n)}&\ldots&a_{1s}^{(n)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{s1}^{(n)}&\ldots&a_{ss}^{(n)}\end{pmatrix}\quad(n=1,2,\ldots),\quad\det A_n\neq0,$$

сходящихся к единичной матрице

$$I=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\ldots&\delta_{1s}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \delta_{s1}&\ldots&\delta_{ss}\end{pmatrix},\quad\text{где}\quad\delta_{ij}=\begin{cases}1&\text{при}\quad i=j\\0&\text{при}\quad i\neq j,\end{cases}$$

т.е.

$$\|A_n-I\|=s\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant s}|a_{ij}^{(n)}-\delta_{ij}|\to0\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

и таких, что

$$\Lambda_n=A_n\cdot\Lambda.$$

Лемма 1. *Если* $\Lambda_n\to\Lambda$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}a_0(\Lambda_n)=a_0(\Lambda).$$

Доказательство. См. [1]. $\square$

Лемма 2. *Для $\alpha=\sigma+it$ при $\sigma\geqslant\sigma_0>\sigma_f+1>-\infty$, $T\geqslant3$ и для любого ε с $0<\varepsilon<\sigma_0-\sigma_f-1$ справедлива приближенная формула*

$$f(\Lambda|\alpha)=\sum_{\vec{x}\in\Lambda\bigcap K(T)}{}'\frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^{\alpha}}+\frac{C\Theta_1(\alpha,T)c_1(s)\dfrac{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}\left(\dfrac{1}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s-1}}+\ln^{s-1}T\right)}{\det\Lambda\cdot T^{\sigma_0-1}},$$

где $|\Theta_1(\alpha,T)|\leqslant1$, $c_1(s)=2^s\cdot24(s-2)!(a_0(\Lambda)+2)^s$ и $C>0$ — некоторая константа, зависящая от функции $a(\vec{x})$ и константы ε.

Доказательство. Разобьем ряд Дирихле для решетки Λ на две части

$$f(\Lambda|\alpha)=\sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda\bigcap K(T)}\frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^{\alpha}}+R(\Lambda,T|\alpha),$$

$$R(\Lambda,T|\alpha)=\sum_{\substack{\vec{x}\in\Lambda,\\ q(\vec{x})>T}}\frac{a(\vec{x})}{q(\vec{x})^{\alpha}}. \tag{1}$$

Переходя к оценкам по модулю каждого слагаемого в (1), получим

$$|R(\Lambda,T|\alpha)|\leqslant|R(\Lambda,T|\sigma)|\leqslant R^{*}(\Lambda,T|\sigma_0),$$

где

$$R^{*}(\Lambda,T|\sigma_0)=\sum_{\substack{\vec{x}\in\Lambda,\\ q(\vec{x})>T}}\frac{|a(\vec{x})|}{q(\vec{x})^{\sigma_0}}.$$

Согласно замечанию 2, найдётся $C=C(\sigma_0,\varepsilon)>0$, такое что $|a(\vec{x})|<Cq(\vec{x}))^{\sigma_f+\varepsilon}$ для любого $0<\varepsilon<\sigma_0-\sigma_f-1$. Отсюда следует, что

$$R^{*}(\Lambda,T|\sigma_0)\leqslant C\sum_{\substack{\vec{x}\in\Lambda,\\ q(\vec{x})>T}}\frac{1}{q(\vec{x})^{\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon}}=CR_1(\Lambda,T|\sigma_0).$$

По теореме Абеля

$$R_1(\Lambda,T|\sigma_0)=(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)\int\limits_{T}^{\infty}\frac{D(x|\Lambda)-D(T|\Lambda)}{x^{\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon+1}}dx.$$

Отсюда и из теоремы 2 следует

$$R_1(\Lambda,T|\sigma_0)\leqslant(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)\int\limits_{T}^{\infty}\left(\frac{2^{s}x\ln^{s-1}x}{(s-1)!\det\Lambda}+\frac{2^{s+2}(a_0(\Lambda)+2)^{s}x\ln^{s-2}x}{\det\Lambda}\right)\frac{dx}{x^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)+1}}=$$

$$=\frac{2^{s}(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{\det\Lambda}\left(\frac{1}{(s-1)!}\int\limits_{T}^{\infty}\frac{\ln^{s-1}x}{x^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}}dx+4(a_0(\Lambda)+2)^{s}\int\limits_{T}^{\infty}\frac{\ln^{s-2}x}{x^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}}dx\right)=$$

$$=\frac{2^{s}(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{\det\Lambda}\left(\frac{1}{(s-1)!}\frac{\sum\limits_{k=0}^{s-1}\frac{(s-1)!}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s-k}k!}\ln^{k}T}{T^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{4(a_0(\Lambda)+2)^{s}\sum\limits_{k=0}^{s-2}\frac{(s-2)!}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s-1-k}k!}\ln^{k}T}{T^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{s}(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{\det\Lambda}\left(\frac{3\left(\frac{1}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s}}+\frac{\ln^{s-1}T}{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}\right)}{T^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}+\right.$$

$$+\frac{+12(s-2)!(a_0(\Lambda)+2)^s\left(\frac{1}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s-1}}+\frac{\ln^{s-2}T}{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}\right)}{T^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^s\cdot 24(s-2)!(a_0(\Lambda)+2)^s\frac{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}\left(\frac{1}{((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{s-1}}+\ln^{s-1}T\right)}{\det\Lambda\cdot T^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}$$

и лемма доказана с $c_1(s,\Lambda)=2^s\cdot 24(s-2)!(a_0(\Lambda)+2)^s$. $\square$

Теорема 6. *Если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ, то последовательность рядов Дирихле $f(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к ряду Дирихле $f(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0>\sigma_f$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda_0=\Lambda$. Определим величины

$$a=\max_{n\geqslant 0}a_0(\Lambda_n),\quad b=\min_{n\geqslant 0}\det\Lambda_n.$$

Ясно, что $b>0$. И так как последовательность Λ_n сходящаяся, то из леммы 1 вытекает, что величина a конечная. Выберем $T_1=T_1(\varepsilon_1)$ из условия

$$\frac{2^s\cdot 24(s-2)!(a+2)^s\frac{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)}{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}(((\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1)^{-s+1}+\ln^{s-1}T_1)}{b\cdot T_1^{(\sigma_0-\sigma_f-\varepsilon)-1}}<\frac{\varepsilon_1}{3},\qquad(2)$$

тогда при $T\geqslant T_1$ для любого $n\geqslant 0$ имеем

$$|R(\Lambda_n,T|\alpha)|\leqslant|R(\Lambda_n,T_1|\sigma_0)|<\frac{\varepsilon_1}{3}$$

в полуплоскости $\alpha=\sigma+it,\quad\sigma\geqslant\sigma_0>\sigma_f$. Рассмотрим крест $K(2T_1)$ и все ненулевые точки решетки Λ принадлежащие этому гиперболическому кресту. Пусть это точки $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_N$, где $N=D(2T_1|\Lambda)$.

Для сходящейся к единичной матрице I последовательности матриц A_n, определенной условиями

$$\Lambda_n=A_n\Lambda,\qquad\lim_{n\to\infty}A_n=I.$$

Рассмотрим точки $\vec{y}_1^{(n)}=A_n\vec{x}_1,\ \dots,\ \vec{y}_N^{(n)}=A_n\vec{x}_N$ из решетки Λ_n. В силу сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\vec{x}_j=\vec{x}_j\quad(j=1,\dots,N)$ можно утверждать, что найдется $n_0=n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n>n_0$ все точки $\vec{y}_j^{(n)}$, для которых $\vec{x}_j\in K(T_1)$, будут принадлежать кресту $K(2T_1)$ и каждая точка $\vec{y}_j^{(n)}$, принадлежащая кресту $K(T_1)$, имеет прообраз $\vec{x}_j$, принадлежащий кресту $K(2T_1)$.

Отсюда следует, что для $\alpha=\sigma+it,\quad\sigma\geqslant\sigma_0$

$$|f(\Lambda_n|\alpha)-f(\Lambda|\alpha)|\leqslant\left|f(\Lambda_n|\alpha)-\sum_{j=1}^{N}\frac{a\left(\vec{y}_j^{(n)}\right)}{\left(\overline{y}_{j1}^{(n)}\cdot\ldots\cdot\overline{y}_{js}^{(n)}\right)^\alpha}\right|+$$

$$+\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{a\left(\vec{y}_j^{(n)}\right)}{\left(\overline{y}_{j1}^{(n)}\cdot\ldots\cdot\overline{y}_{js}^{(n)}\right)^\alpha}-\sum_{j=1}^{N}\frac{a\left(\vec{x}_j\right)}{\left(\overline{x}_{j1}\cdot\ldots\cdot\overline{x}_{js}\right)^\alpha}\right|+\left|f(\Lambda|\alpha)-\sum_{j=1}^{N}\frac{a\left(\vec{x}_j\right)}{\left(\overline{x}_{j1}\cdot\ldots\cdot\overline{x}_{js}\right)^\alpha}\right|\leqslant$$

$$\leqslant |R(\Lambda_n, T_1|\sigma_0)| + |R(\Lambda, T_1|\sigma_0)| + \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{a\left(\vec{y}_j^{(n)}\right)}{\left(\overline{y}_{j1}^{(n)} \cdot \ldots \cdot \overline{y}_{js}^{(n)}\right)^{\sigma_0}} - \frac{a\left(\vec{x}_j\right)}{\left(\overline{x}_{j1} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_{js}\right)^{\sigma_0}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\varepsilon_1}{3} + \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{a\left(\vec{y}_j^{(n)}\right)}{\left(\overline{y}_{j1}^{(n)} \cdot \ldots \cdot \overline{y}_{js}^{(n)}\right)^{\sigma_0}} - \frac{a\left(\vec{x}_j\right)}{\left(\overline{x}_{j1} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_{js}\right)^{\sigma_0}} \right|.$$

Выбирая $n_1 = n_1(\varepsilon_1)$ из условия

$$\left| \frac{a\left(\vec{y}_j^{(n)}\right)}{\left(\overline{y}_{j1}^{(n)} \cdot \ldots \cdot \overline{y}_{js}^{(n)}\right)^{\sigma_0}} - \frac{a\left(\vec{x}_j\right)}{\left(\overline{x}_{j1} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_{js}\right)^{\sigma_0}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{3N}$$

при $n \geqslant n_1$, получим $|f(\Lambda_n|\alpha) - f(\Lambda|\alpha)| \leqslant \varepsilon_1$ при $n \geqslant \max(n_0(\varepsilon_1), n_1(\varepsilon_1))$, и теорема полностью доказана. $\square$

5. Заключение

Так как пространство s-мерных решёток является гладким многообразием, то возникает естественный вопрос о дифференцируемости рядов Дирихле s-мерных решёток на гладком многообразии.

Авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

2. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки. Т. 63, вып. 3. 1998. С. 363–369.

3. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

4. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

5. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 1998, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Matematicheskie zametki, vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

2. Dobrovol'skii, N. M., Roshhenya, A. L., 1998, " On the number of lattice points in a hyperbolic cross", Matematicheskie zametki, vol. 63, no. 4, pp. 363–369.

3. Cassels J., 1965, "Introduction to the geometry of numbers", *M.: Mir.*

4. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

5. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено: 12.04.2024
Принято в печать: 28.06.2024