ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 517, 518.85 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-243-250

О достаточных условиях существования решения бесконечно-разностного уравнения с переменными коэффициентами

С. Э. Нохрин, В. Т. Шевалдин

Нохрин Сергей Эрнестович — кандидат физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).
e-mail: varyag2@mail.ru
Шевалдин Валерий Трифонович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).
e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Аннотация

В работе рассматривается разностное уравнение вида $\sum_{l=0}^{r} a_{k,l} Z_{k+l} = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, где $r \in \mathbb{N}$, $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — заданная числовая последовательность из пространства l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, при условии, что матрица $A = (a_{k,l})$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, обладает свойством, близким к наличию доминантной диагонали. С помощью теоремы о неподвижной точке выписаны достаточные условия на коэффициенты $a_{k,l}$, при которых данное уравнение имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, принадлежащее пространству l_p, и для нормы этого решения приведена числовая оценка сверху.

Ключевые слова: разностное уравнение, последовательности, пространство l_p, норма решения.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
С. Э. Нохрин, В. Т. Шевалдин. О достаточных условиях существования решения бесконечно-разностного уравнения с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 243–250.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 517, 518.85 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-243-250

Sufficient conditions for the existence of the solution of an infinite-difference equation with variable coefficients

S. E. Nohrin, V. T. Shevaldin

Nohrin Sergei Ernestovich — candidate of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Ural Branch) of the RAS (Yekaterinburg).
e-mail: varyag2@mail.ru
Shevaldin Valerii Trifonovich — doctor of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Ural Branch) of the RAS (Yekaterinburg).
e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Abstract

The paper discusses a difference equation of the form $\sum_{l=0}^{r} a_{k,l}Z_{k+l} = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, where $r \in \mathbb{N}$, $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ is a given numerical sequence from the space l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, provided that the matrix $A = (a_{k,l})$, $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, satisfies some condition close to the presence of a dominant diagonal. With the help of the fixed point theorem, sufficient conditions are written for the coefficients $a_{k,l}$, at which the equation has a unique solution $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, belonging to the space l_p. For the norm of this solution, a numerical estimate is given from above.

Keywords: difference equation, sequences, space l_p, solution norm.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
S. E. Nohrin, V. T. Shevaldin, 2024, “Sufficient conditions for the existence of the solution of an infinite-difference equation with variable coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 243–250.

1. Введение

При решении задач экстремальной интерполяции последовательностей действительных чисел в постановке Яненко — Стечкина — Субботина (см., например, [1]–[6]) в качестве экстремальных функций естественным образом появляются интерполяционные сплайны и их обобщения. Для доказательства их существования применяются различные методы (см. [1]–[11]), так или иначе связанные с решением разностных уравнений с постоянными (в случае равномерной сетки точек интерполяции) или с переменными коэффициентами (если сетка узлов интерполяции, заданная на оси $\mathbb{R}$ или на отрезке, является произвольной).

В этих задачах в работах [4]–[6] возникли бесконечно-разностные уравнения вида

$$\sum_{l=0}^{r} a_{k,l}Z_{k+l} = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

где $a_{k,l} \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ и $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — заданная числовая последовательность из пространства l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, и изучались свойства матрицы $A = (a_{k,l})$, которые обеспечивали существование и единственность решения уравнения (1), принадлежащего пространству l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Напомним, что под пространством $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ понимается пространство последовательностей действительных чисел $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|Z\|_{l_p} = \begin{cases} \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k|, & p = \infty, \\ \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k|^p\Big)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Сформулируем один общий результат о решении уравнения (1), когда это уравнение имеет постоянные коэффициенты, т. е. если $a_{k,l} = a_l$ $(l = 0, 1, \dots, r)$ не зависят от k.

Теорема 1. *Если все нули многочлена $U_r(x) = \sum\limits_{l=0}^{r} a_l x^l$ $(a_l \in \mathbb{R},\ a_r \neq 0)$ отрицательны и просты, $U_r(-1) \neq 0$, то разностное уравнение*

$$\sum_{l=0}^{r} a_l Z_{k+l} = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, имеет единственное решение $Z^0 = \{Z^0_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$, выражаемое формулой

$$Z^0_k = \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{-s-k} y_s,$$

где $\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} b_s x^s = 1/(U_r(x))$, для которого справедлива оценка $\|Z^0\|_{l_p} \leqslant \dfrac{\|y\|_{l_p}}{|U_r(-1)|}$.

Существование решения разностного уравнения в этой теореме доказано М. Г. Крейном [8], а оценка сверху нормы этого решения получена Ю. Н. Субботиным [1, 2].

В цитированных работах М. Г. Крейна и Ю. Н. Субботина имеются и другие результаты, касающиеся достаточных условий существования и единственности решений и более общих разностных уравнений, в частности, вида

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{l+k} Z_l = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

где $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, но мы не будем здесь на них останавливаться.

В случае $p = \infty$ обширная библиография по решению разностных уравнений вида

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{k,l} Z_l = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_\infty, \tag{2}$$

изложена в недавних работах [9, 10] Ю. С. Волкова и С. И. Новикова. В монографии [11] Л. В. Канторовича и В. И. Крылова установлено, что достаточным условием существования единственного ограниченного решения уравнения (2) является требование, что матрица $A = (a_{k,l})$ является вполне регулярной. Приведем одно определение из [9].

Definition 1. *Считаем, что бесконечная матрица $A = (a_{k,l})$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ (см. (2)) имеет доминирующую диагональ, если можно указать такое число $m \in \mathbb{Z}$, что при всех $k \in \mathbb{Z}$ будут выполняться неравенства*

$$|a_{k,k+m}| - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus(k+m)} |a_{k,l}| \geqslant \rho > 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

для некоторого положительного числа ρ.

В [9] доказано, что если матрица $A = (a_{k,l})$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ имеет доминирующую диагональ, то эта матрица является вполне регулярной, и, как следствие, из результатов [11] получено, что система уравнений (2) для любой ограниченной последовательности $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, имеет единственное ограниченное решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, и справедлива оценка $\|Z\|_{l_\infty} \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \dfrac{|y_k|}{\rho_k}$, где $\rho_k = |a_{k,k+m}| - \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}\setminus(k+m)} |a_{k,l}|$.

В случае, если $y \in l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, достаточные условия существования решений уравнений (1) и (2) практически не изучены (есть небольшое обсуждение в работе [2] Ю. Н. Субботина, см. также библиографию в [9]).

Ситуация с решением разностных уравнений с переменными коэффициентами (например, вида (1)) схожа с общей теорией решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений r-го порядка с переменными коэффициентами: хорошо разработана теория решений таких уравнений с постоянными коэффициентами, а в гораздо меньшей степени исследованы уравнения, если эти коэффициенты — переменные функции. Отметим еще, что уравнения в конечных разностях исследовались в монографии [12] А. О. Гельфонда.

В данной работе в случае $1 \leqslant p < \infty$ нам не удалось развить теорему 1 Крейна — Субботина на случай произвольной матрицы $A = (a_{k,l})$. Далее указаны довольно жесткие достаточные условия на коэффициенты этой матрицы (по форме близкие к существованию доминирующей диагонали), обеспечивающие существование и единственность решения уравнения (1), если его правая часть $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ принадлежит пространству l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, и при этих ограничениях найдена оценка сверху для нормы этого решения в пространстве l_p.

2. Существование решения разностного уравнения и его оценка

Рассмотрим уравнение (1). Выделим в матрице $A = (a_{k,l})$ столбец, соответствующий параметру $m:\ 0 \leqslant m \leqslant r$ с элементами $\{a_{k,m}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Обозначим

$$\mu_k = \sum_{l=0}^{r} a_{k,l} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

и далее считаем, что все $\mu_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Теорема 2. *Пусть выполнено следующее условие a) : существует такое положительное число α, что*

$$K = r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r;\ l\neq m\\ k\in\mathbb{Z}}} \left|\frac{a_{k,l}}{\mu_k}\right| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{\mu_k - a_{k,m}}{\mu_k}\right| < \alpha < 1.$$

Тогда для любой последовательности $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ разностное уравнение (1) имеет решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$, причем это решение единственно.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 сведем к проверке выполнения условия теоремы о неподвижной точке при сжимающем отображении в полном метрическом пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ $(p \geqslant 1)$. Именно такой метод применялся при доказательстве существования и единственности интерполяционных сплайнов с произвольными узлами в работах [5] и [6]. С учетом определения чисел $\mu_k = \sum\limits_{l=0}^{r} a_{k,l}$ перепишем уравнение (1) в виде

$$\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}(Z_{k+m} - Z_{k+l}) = -y_k + \mu_k Z_{k+m}.$$

Поскольку числа $\mu_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{Z})$, то отсюда следует равенство

$$Z_{k+m} = \frac{1}{\mu_k}\left[y_k + \sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}(Z_{k+m} - Z_{k+l})\right]. \tag{3}$$

Обозначим $\overline{Z} = \{Z_{k+m}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и рассмотрим нелинейный оператор $T:\ \overline{Z} \to T\overline{Z}$, где

$$T\overline{Z} = T\{Z_{k+m}\} = \frac{1}{\mu_k}\left[y_k + \sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}(Z_{k+m} - Z_{k+l})\right] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Докажем, что при выполнении условия а) теоремы 2 этот оператор является сжимающим в полном пространстве l_p $(1 \leqslant p < \infty)$. В самом деле, пусть $\overline{Z}^{(1)},\ \overline{Z}^{(2)} \in l_p$; тогда

$$\left\|T\left(\overline{Z}^{(1)} - \overline{Z}^{(2)}\right)\right\|_{l_p} = \left\|\left\{\frac{1}{\mu_k}\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}\left(Z^{(1)}_{k+m} - Z^{(1)}_{k+l}\right) - \frac{1}{\mu_k}\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}\left(Z^{(2)}_{k+m} - Z^{(2)}_{k+l}\right)\right\}\right\|_{l_p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left\{\frac{1}{\mu_k}\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}\left(Z^{(1)}_{k+m} - Z^{(2)}_{k+m}\right)\right\}\right\|_{l_p} + \left\|\left\{\frac{1}{\mu_k}\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}\left(Z^{(2)}_{k+l} - Z^{(1)}_{k+l}\right)\right\}\right\|_{l_p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{\mu_k - a_{k,m}}{\mu_k}\right| \cdot \left\|\overline{Z}^{(1)} - \overline{Z}^{(2)}\right\|_{l_p} + \sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r;\ l\neq m\\ k\in\mathbb{Z}}}\left|\frac{a_{k,l}}{\mu_k}\right| \cdot r \cdot \left\|\overline{Z}^{(1)} - \overline{Z}^{(2)}\right\|_{l_p} = K\left\|\overline{Z}^{(1)} - \overline{Z}^{(2)}\right\|_{l_p}.$$

Поэтому по теореме о неподвижной точке при сжимающем отображении уравнение (3), а, следовательно, и уравнение (1) при любой правой части $y \in l_p$ имеет решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, это решение единственно и принадлежит пространству l_p. Теорема 2 доказана.

Пример 3. *Пусть для любого $k \in \mathbb{Z}$ числа $a_{k,m} = 1$, $a_{k,l} = \dfrac{1}{r+1}$ $(l = 0, 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, r)$. Тогда матрица $A = (a_{k,l})$ системы (1) имеет доминирующий столбец, число $K = \dfrac{2r}{2r+1} < 1$, и система (1) имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$.*

Пример 4. *Пусть для любого $k \in \mathbb{Z}$ числа $a_{k,m} = 1$, $a_{k,m+1} = \dfrac{r}{r+1}$ $(r \geqslant 2)$, а остальные $a_{k,l}$ $(l \neq m,\ l \neq m+1)$ равны 0. Матрица $A = (a_{k,l})$ системы (1) имеет доминирующий столбец, но условие а) теоремы 2 не выполнено, поскольку число $K = \dfrac{r^2+r}{2r+1} > 1$ при $r \geqslant 2$.*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие а) теоремы 2 и еще условие б) :*

$$L = \inf_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,m}| - r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r;\ l\neq m\\ k\in\mathbb{Z}}}|a_{k,l}| > 0.$$

Тогда для любого числа $p : 1 \leqslant p < \infty$ и произвольной последовательности $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$ справедлива следующая оценка решения уравнения (1) :

$$\|Z\|_{l_p} \leqslant \frac{\|y\|_{l_p}}{L}.$$

Доказательство. В силу свойств нормы имеем

$$\|y\|_{l_p} = \left\|\left\{\sum_{l=0}^{r} a_{k,l}Z_{k+l}\right\}\right\|_{l_p} \geqslant \|\{a_{k,m}Z_{k+m}\}\|_{l_p} - \left\|\left\{\sum_{l=0,\ l\neq m}^{r} a_{k,l}Z_{k+l}\right\}\right\|_{l_p} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{k\in\mathbb{Z}}|a_{k,m}| \cdot \|Z\|_{l_p} - r \cdot \sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r;\ l\neq m\\ k\in\mathbb{Z}}}|a_{k,l}| \cdot \|Z\|_{l_p} = L \cdot \|Z\|_{l_p}.$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы 3.

Пример 5. *В [6] вторым автором статьи на произвольной сетке $\Delta = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ числовой оси $\mathbb{R}$ рассмотрена задача Яненко — Стечкина — Субботина экстремальной интерполяции функций с наименьшим значением нормы в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ второй производной при условии, что нормы вторых разделенных разностей интерполируемых значений ограничены в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$. При получении оценок сверху для нормы второй производной в этой задаче возникли разностные уравнения вида (см. [6, формула (3.6)]:*

$$A_k Z_{k+2} + B_k Z_{k+1} + C_k Z_k = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p, \tag{4}$$

где

$$A_k = \frac{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}{(h_k + 2h_{k+1} + h_{k+2})^2}, \quad C_k = \frac{h_k(h_k + h_{k+1})}{(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})^2},$$

$$B_k = \frac{h_k(h_{k-1} + h_k)}{(h_{k-1} + 2h_k + h_{k+1})^2}\Big[\frac{q}{h_k + h_{k+1}} + \frac{q+1}{h_{k-1} + h_k}\Big] +$$

$$\frac{h_{k+1}(h_{k+1} + h_{k+2})}{(h_k + 2h_{k+1} + h_{k+2})^2}\Big[\frac{q}{h_k + h_{k+1}} + \frac{q+1}{h_{k+1} + h_{k+2}}\Big]$$

$$\Big(q = \frac{p}{p-1}, \ h_k = x_{k+1} - x_k\Big).$$

В [6] методом теоремы 2 при $r = 2$ и любом p : $1 < p < \infty$ доказано, что для любой сетки узлов $\Delta = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ система (4) имеет единственное решение $Z = \{Z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p$, число $K \leqslant 17/18$, а методом теоремы 3 установлено, что $L = 1/18$.

3. Заключение

Достаточные условия для решения разностного уравнения вытекают в настоящей работе только из применяемого нами подхода к решению (при этом само решение выписать явно не удается), связанного с принципом сжимающих отображений, и, возможно, могут быть ослаблены.

Результаты настоящее работы могут найти применение при разработке численных методов решения дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при замене дифференциальных операторов разностными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.

2. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.

3. Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.

4. Новиков С. И., Шевалдин В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224.

5. Шевалдин В. Т., Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция в пространстве L_p на произвольной сетке числовой оси // Матем. сборник. 2022. Т. 213, № 4. С. 123–144. doi: 10.4213/sm9628.

6. Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы второй производной в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ // Известия РАН. Серия матем. 2022. Т. 86, № 1. С. 219–236. doi: 10.4213/im9125.

7. Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225.

8. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.

9. Волков Ю. С., Новиков С. И. Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 814–830. doi: 10.33048/smzh.2022.63.408.

10. Volkov Yu. S., Novikov S. I. Estimates for solutions of bi-infinite systems of linear equations // Eur. J. Math. 2022. Vol. 8, no. 2. Pp. 722–731. doi: 10.1007/s40879-021-00528-y.

11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 695 с.

12. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.

REFERENCES

1. Subbotin, Yu. N. 1965. “On the connection between finite differences and corresponding derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).

2. Subbotin, Yu. N. 1977. “Extremal problems of functional interpolation and mean interpolation splines”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 138, pp. 127–185.

3. Shevaldin, V. T. 1985. “Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 164, pp. 233–273.

4. Novikov, S. I., Shevaldin, V. T. 2020. “On the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Tr. In-ta Matematiki I Mekhaniki UrO RAN*, vol. 26, no. 2, pp. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 (in Russian).

5. Subbotin, Yu. N., Shevaldin, V. T. 2022. “Extremal functional L_p-interpolation on an arbitrary mesh on the real axis”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 213, no. 4, pp. 556–577. doi: 10.1070/SM9628.

6. Shevaldin, V. T. 2022. “Extremal interpolation with the least value of the norm of the second derivative in $L_p(R)$”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 86, no. 1, pp. 203–219. doi: 10.1070/IM9125.

7. Subbotin, Yu. N., Novikov, S. I., Shevaldin, V. T. 2018. “Extremal function interpolation and splines”, *Tr. In-ta Matematiki I Mekhaniki UrO RAN*, vol. 24, no. 3, pp. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 (in Russian).

8. Krein, M. G. 1958. “Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 138, no. 5 (83), pp. 3–120 (in Russian).

9. Volkov, Yu. S., Novikov, S. I. 2022. “Estimates of solutions to uniform systems of linear equations and the problem of interpolation by cubic splines on the real line”, *Siberian Math. J.*, vol. 63, no. 4, pp. 677—90. doi: https://doi.org/10.1134/S0037446622040085.

10. Volkov, Yu. S., Novikov, S. I. 2022. “Estimations for solutions of bi-infinite systems of linear equations”, *Eur. J. Math.*, vol. 8, no. 2. P. 722–731. doi: https://doi.org/10/1007/s40879-021-00528-y.

11. Kantorovich, L. V., Krylov, V. I. 1962. “Approximate methods of higher analysis”. *M.: Fizmatgiz. Publ.*, 695 p.

12. Gel’fond, A. O. 1967. “Calculus of finite differences”, *M.: Nauka Publ.*, 376 p.

Получено: 13.04.2024
Принято в печать: 28.06.2024