ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-235-242

Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач

А. И. Денисов, И. В. Денисов

Денисов Алексей Игоревич — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Денисов Игорь Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Аннотация

В рамках нелинейного метода угловых пограничных функций существование решений нелинейных краевых задач доказывается через построение барьерных функций. Барьерные функции конструируются через выделенные специальным образом опорные барьеры. Сами опорные барьеры также могут выступать в роли барьерных функций. Получаемые неравенства в свою очередь представляют самостоятельный функциональный интерес.

Ключевые слова: нелинейные краевые задачи, барьерные функции, функциональные неравенства.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
А. И. Денисов, И. В. Денисов. Опорные барьерные функции для нелинейных параболических задач // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 235–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-235-242

The support barrier functions for nonlinear parabolic problems

A. I. Denisov, I. V. Denisov

Denisov Alexey Igorevich — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru
Denisov Igor Vasil'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: den_tspu@mail.ru

Abstract

Within the framework of the nonlinear method of angular boundary functions, the existence of solutions to nonlinear boundary value problems is proven through the construction of barrier functions. Barrier functions are constructed through specially designated support barriers. The support barriers themselves can also act as barrier functions. The resulting inequalities, in turn, are of independent functional interest.

Keywords: nonlinear boundary value problems, barrier functions, functional inequalities.

Bibliography: 7 titles.

For citation:
A. I. Denisov, I. V. Denisov, 2024. “The support barrier functions for nonlinear parabolic problems”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 235–242.

1. Постановка задачи

С целью получения необходимых барьерных функций рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения:

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$u(x,0,\varepsilon)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$u(0,t,\varepsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\varepsilon)=\psi_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где $\Omega=\{(x,t)\,|\,0<x<1,\ 0<t<T\}$ – прямоугольник. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. *Функции $F(u,x,t,\varepsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений*

$$\varphi(0)=\psi_1(0),\quad \varphi(1)=\psi_2(0).$$

Условие 2. *Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0)=0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u=\bar u_0(x,t)$.*

Условие 3. *Производная $F'_u(\bar u_0\,(x,t),x,t,0)>0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.*

Условие 4. *Начальная задача*

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau}=-F(\bar u_0(x,0)+\Pi_0,x,0,0),\quad \Pi_0(x,0)=\varphi(x)-\bar u_0(x,0),$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau\geqslant 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty)=0$ (здесь параметр $x\in[0,1]$).

Условие 5. *Для систем*

$$\frac{dz_1}{dy}=z_2,\quad a^2\frac{dz_2}{dy}=F(\bar u_0(k,t)+z_1,k,t,0),$$

прямые $z_1=\psi_{1+k}(t)-\bar u_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2)=(0,0)$ при $y\to\infty$ (здесь t - параметр, $k=0$ или 1).

Применим нелинейный метод угловых пограничных функций, в рамках которого, как и в линейном случае, решение задачи ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon\to 0$:

$$u(x,t,\varepsilon)=\bar u+(\Pi+Q+Q^*)+(P+P^*).$$

Здесь $\bar{u}$– регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω, Π, Q и Q^*– погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^*– угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [1]). Однако для понимания используемых обозначений необходимы минимальные пояснения алгоритма, более подробно см. [2]. Каждая часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε. Регулярная часть:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \, \bar{u}_k(x, t),$$

погранслойные функции:

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

угловые пограничные функции:

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1 - x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

– растянутые переменные.

Наиболее сложной в алгоритме является нелинейная задача для нахождения главного члена угловой части асимптотики. Для $P_0(\xi, \tau)$ задача ставится в первой четверти плоскости растянутых переменных (ξ, τ):

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(\xi, \tau) \mid \xi > 0, \, \tau > 0\},$$

и имеет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{1}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{2}$$

$$P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{3}$$

где

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z\right) + F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right) + F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right) \tag{4}$$

и $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$. Для определенности будем считать, что в угловой точке (0, 0) граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. Кроме этого, будем рассматривать случай, когда функция $F(u)$ положительна на промежутке $[\bar{u}_0, \varphi]$.

Для доказательства существования решения задачи (1)–(4) используется метод верхних и нижних решений (см. [3] – [5]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \;\; D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе} \;\; \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leqslant Z \leqslant Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leqslant 0, \quad L(Z_-) \geqslant 0, \quad Z_- \leqslant Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leqslant h \leqslant Z_+.$$

Основную трудность в применении этого метода представляет построение барьерных функций. Кроме роли барьерных эти функции, в нашем случае, еще должны удовлетворять экспоненциальным оценкам убывания.

Определение. *Барьерную функцию $Z(\xi, \tau)$ назовем опорной, если ее использование в качестве барьера задачи (1)–(4) приводит к неравенству, линейному относительно функции $F(u)$.*

Опорные барьерные функции впервые появились в работах [6], [7], однако отдельно не изучались. К настоящему моменту удалось выделить три опорных барьерных функции. Рассмотрим эти функции, из которых, при необходимости, конструируются более сложные барьеры.

2. Первая опорная барьерная функция

Первая опорная барьерная функция – нулевая:

$$Z_1 = 0.$$

Для этой функции на границе области $\mathbb{R}^2_+$ выполняются неравенства

$$Z_1(0, \tau) = 0 > -\Pi_0(0, \tau), \quad Z_1(\xi, 0) = 0 > -Q_0(\xi, 0).$$

Поэтому Z_1 может претендовать только на роль верхнего барьера. Внутри области $\mathbb{R}^2_+$ для верхнего барьера должно выполняться неравенство $L(Z_1) \leq 0$. Имеем

$$L(Z_1) = -F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0\right) + F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right) + F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right). \tag{5}$$

Для краткости обозначим

$$\Pi_0(0, \tau) = s, \quad Q_0(\xi, 0) = t. \tag{6}$$

В результате выражение (5) примет вид

$$L(Z_1) = -F\left(\bar{u}_0 + s + t\right) + F\left(\bar{u}_0 + s\right) + F\left(\bar{u}_0 + t\right),$$

и можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция*

$$Z_1 = 0$$

является верхним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi, \tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ величина

$$L(0) = -F\left(\bar{u}_0 + s + t\right) + F\left(\bar{u}_0 + s\right) + F\left(\bar{u}_0 + t\right) \leq 0. \tag{7}$$

3. Вторая опорная барьерная функция

Вторая опорная барьерная функция имеет вид

$$Z_2 = -\frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}.$$

Такой вид продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} = (\varphi - \bar{u}_0)\left(1 - \left(1 - \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right)\left(1 - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right)\right), \tag{8}$$

из которого следует, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_2 \in (\bar{u}_0; \varphi].$$

На границе области $\mathbb{R}^2_+$ имеем

$$Z_2(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau),$$

$$Z_2(\xi,0) = -Q_0(\xi,0),$$

$$Z_2(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty.$$

Поэтому Z_2 может претендовать на роль как верхнего, так и нижнего барьера. Внутри области $\mathbb{R}^2_+$ имеем

$$L(Z_2) = -a^2 \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0}\frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} + \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\frac{d\Pi_0}{d\tau} - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) +$$

$$+F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) =$$

$$= -\frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0} F(\bar{u}_0 + Q_0) - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0} F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) +$$

$$+F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) =$$

$$= \left(1 - \frac{\Pi_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + Q_0) + \left(1 - \frac{Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - \frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right)$$

при обозначениях (6). Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция*

$$Z_2 = -\frac{\Pi_0 Q_0}{\varphi - \bar{u}_0}$$

является барьером для решения $P_0 = P_0(\xi,\tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0, \varphi - \bar{u}_0]$ выражение

$$L(Z_2) = \left(1 - \frac{s}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + t) + \left(1 - \frac{t}{\varphi - \bar{u}_0}\right) F(\bar{u}_0 + s) - F\left(\bar{u}_0 + s + t - \frac{st}{\varphi - \bar{u}_0}\right) \tag{9}$$

сохраняет свой знак.

4. Третья опорная барьерная функция

Третья опорная барьерная функция определяется с помощью погранслойных функций $\Pi_0 = \Pi_0(0,\tau)$ и $Q_0 = Q_0(\xi, 0)$ как

$$Z_3 = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}.$$

Выбор такого вида продиктован соотношением

$$\Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = \left(\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0}\right)^2, \tag{10}$$

которое показывает, что величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_3 \in [\bar{u}_0; \varphi),$$

так как Π_0, $Q_0 \in (0; \varphi - \bar{u}_0]$.

Задача для определения функции $\Pi_0 = \Pi_0(0,\tau)$ имеет вид

$$-\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right), \quad \Pi_0(0,0) = \varphi - \bar{u}_0$$

(см. [2]). Поэтому

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right),$$

и решение $\Pi_0(0,\tau)$ представляет собой функцию, убывающую от $\Pi_0(0,0) = \varphi - \bar{u}_0 > 0$ до $\Pi_0(0,\infty) = 0$.

Задача для определения функции $Q_0(\xi, 0)$ имеет вид

$$a^2 \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right), \quad Q_0(0,0) = \varphi - \bar{u}_0, \quad Q_0(\infty, 0) = 0,$$

(также см. [2]). Поэтому

$$\frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0),$$

и, понижая порядок уравнения, получаем

$$\left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du.$$

Выбираем случай отрицательной производной:

$$\frac{dQ_0}{d\xi} = -\frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du,$$

и решение $Q_0(\xi, 0)$, которое является функцией, убывающей от $Q_0(0,0) = \varphi - \bar{u}_0 > 0$ до $Q_0(\infty, 0) = 0$.

На границе области $\mathbb{R}^2_+$ имеем

$$Z_3(0,\tau) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0)\Pi_0} < -\Pi_0,$$

$$Z_3(\xi, 0) = -2\sqrt{(\varphi - \bar{u}_0) Q_0} < -Q_0,$$

$$Z_3(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty,$$

поэтому Z_3 может претендовать только на роль нижнего барьера.

Внутри области $\mathbb{R}^2_+$ имеем

$$L\left(-2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) = -2a^2\sqrt{\Pi_0}\,\frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} - 2\sqrt{Q_0}\,\frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} -$$
$$-F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right) + F\left(\bar{u}_0 + Q_0\right). \tag{11}$$

Здесь

$$-2a^2\sqrt{\Pi_0}\,\frac{d^2\sqrt{Q_0}}{d\xi^2} = -2a^2\sqrt{\Pi_0}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d\sqrt{Q_0}}{d\xi}\right) = -2a^2\sqrt{\Pi_0}\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{dQ_0}{d\xi}\right) =$$
$$= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\left(-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}}\left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{d^2Q_0}{d\xi^2}\right) =$$
$$= -2a^2\sqrt{\Pi_0}\left(-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}}\frac{2}{a^2}\int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0+u)du + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}}\frac{1}{a^2}F(\bar{u}_0+Q_0)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{\Pi_0}}{Q_0\sqrt{Q_0}}\int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0+u)du - \frac{\sqrt{\Pi_0}}{\sqrt{Q_0}}F(\bar{u}_0+Q_0),$$

а

$$-2\sqrt{Q_0}\frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}}\frac{d\Pi_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}}F\left(\bar{u}_0 + \Pi_0\right).$$

Собираем все вместе и с учетом замены (6) получаем

$$L(Z_3) = \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0+u)du - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}F(\bar{u}_0+t) - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}F\left(\bar{u}_0+s\right) -$$
$$-F\left(\bar{u}_0+s+t-2\sqrt{st}\right) + F(\bar{u}_0+s) + F(\bar{u}_0+t) =$$
$$= \left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0+t\right) + \left(1-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0+s\right) - F\left(\bar{u}_0+s+t-2\sqrt{st}\right) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0+u)du.$$

Таким образом, верно следующее утверждение.

Лемма 3. *Функция*

$$Z_3 = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$$

является нижним барьером для решения $P_0 = P_0(\xi,\tau)$ задачи (1)–(4), если при любых значениях s и t из промежутка $(0,\varphi-\bar{u}_0]$ величина

$$L\left(Z_3\right) = \left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}}\right)F\left(\bar{u}_0+t\right) + \left(1-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}\right)F\left(\bar{u}_0+s\right) -$$
$$-F\left(\bar{u}_0+s+t-2\sqrt{st}\right) + \frac{\sqrt{s}}{t\sqrt{t}}\int_0^t F(\bar{u}_0+u)du \geq 0. \tag{12}$$

5. Сравнение опорных барьерных функций

При любых значениях s и t из промежутка $(0,\varphi-\bar{u}_0]$ справедливо неравенство

$$2\sqrt{st} - \frac{st}{\varphi-\bar{u}_0} = \sqrt{st}\left(2-\frac{\sqrt{st}}{\varphi-\bar{u}_0}\right) > 0.$$

Поэтому

$$-2\sqrt{st} < -\frac{st}{\varphi-\bar{u}_0}$$

и имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Опорные барьерные функции находятся между собой в следующем порядке:*

$$Z_3 < Z_2 < Z_1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990.
2. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций для сингулярно возмущенных параболических задач с кубическими нелинейностями // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 25–40.
3. Amann H. On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. Vol.21, № 2. P. 125 - 146.
4. Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979 - 1000.
5. Amann H. // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. - New York etc: Acad press, cop. 1978. – XIII. P. 1 - 29.
6. Денисов И.В. Об асимптотическом разложении решения сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в прямоугольнике // Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач: Сб. научн. тр. - Бишкек: Илим, 1991. - С. 37.
7. Денисов И.В. Квазилинейные сингулярно возмущенные эллиптические уравнения в прямоугольнике // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - Т.35. № 11. 1995. - С. 1666-1678. (English transl.: Denisov I.V. Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Equations in a Rectangle // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1995. Vol. 35. № 11. pp. 1341-1350.)

REFERENCES

1. Vasilyeva, A. B., Butuzov, V. F. 1990. “Asymptotic methods in the theory of singular perturbations”, *M.: Higher school.*
2. Denisov A.I., Denisov I.V., 2024. "Nonlinear method of angular boundary functions for singularly perturbed parabolic problems with cubic nonlinearities” , *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 25, № . 1, pp. 25–40.
3. Amann H., 1971. “On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems”, *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21, № 2. pp. 125–146.
4. Sattinger D.H., 1972. “Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems”, *Indiana Univ. Math. J.*, Vol.21. № 11. pp. 979–1000.
5. Amann H., 1978. “Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al.”, *New York etc: Acad press, cop. – XIII.* pp. 1–29.
6. Denisov I.V., 1991. “On the asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed elliptic equation in a rectangle”, *Asymptotic methods of the theory of singularly perturbed equations and ill-posed problems: Collection of articles. scientific. tr. - Bishkek: Ilim*, p. 37.
7. Denisov I.V., 1995. “Quasilinear Singularly Perturbed Elliptic Equations in a Rectangle”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 35. № 11. pp. 1341-1350.

Получено: 06.03.2024
Принято в печать: 28.06.2024