

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 510.635

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-222-234

Специальные случаи интерполяционной теоремы для
классического исчисления предикатов

Д. А. Цибульский

Цибульский Дмитрий Алексеевич — аспирант, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (г. Санкт-Петербург).

e-mail: cybulski@pdmi.ras.ru

Аннотация

В статье доказываются специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов без функциональных символов и равенства. Накладывая ограничения на интерполируемые формулы, можно доказать существование интерполянта особого вида: универсального, экзистенциального, хорновского и универсального хорновского. Наиболее интересен случай универсального хорновского интерполянта: аксиомы многих алгебраических систем задаются универсальными хорновскими формулами. Результаты, полученные в данной работе, могут быть полезны как с точки зрения теории доказательств, так и в приложениях, например, при решении задач искусственного интеллекта и разработке языков логического программирования. Статья написана в духе теории доказательств, основным инструментом для решения задачи служат секвенциальные исчисления и такие техники преобразования выводов, как обращение применений правил вывода, перестановка применений правил по С. К. Клини и прополка по В. П. Оревкову.

Статья состоит из введения, разбитой на 3 параграфа основной части и заключения. Введение содержит краткий исторический обзор и обсуждение актуальности работы. В первом параграфе основной части вводятся необходимые определения и формулируется главный результат. Второй параграф посвящён описанию построенного В. П. Оревковым секвенциального исчисления **KGL**. Третий отведён доказательству основной теоремы. Заключение содержит обсуждение полученных результатов и краткий обзор перспектив дальнейшей работы.

Ключевые слова: интерполяционная теорема, классическое исчисление предикатов, универсальный интерполянт, хорновский интерполянт.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Д. А. Цибульский. Специальные случаи интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 222–234.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 510.635

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-222-234

Special cases of the interpolation theorem for classical predicate calculus

D. A. Cybulski

Cybulski Dmitry Alekseevich — postgraduate student, St. Petersburg Branch of the Steklov Mathematical Institute of the RAS (St. Petersburg).

e-mail: cybulski@pdmi.ras.ru

Abstract

The article proves special cases of the interpolation theorem for the classical predicate calculus without functional symbols and equality. By imposing restrictions on the interpolated formulas, it is possible to prove the existence of an interpolant of a special kind: universal, existential, Horn and universal Horn. The most interesting case is the universal Horn interpolant: the axioms of many algebraic systems are given by universal Horn formulas. The results obtained in this work can be useful both from the point of view of proof theory and in applications, for example, when solving problems of artificial intelligence and developing logical programming languages. The article is written in the spirit of proof theory, the main tools are sequential calculus and such techniques for proof transforming as reversing the applications of inference rules, rearranging the applications of rules according to S. K. Kleene and weeding according to V. P. Orevkov.

The article consists of an introduction, the main part divided into 3 paragraphs, and a conclusion. The introduction contains a brief historical overview and discussion of the relevance of the work. In the first paragraph of the main part, the necessary definitions are introduced and the main result is formulated. The second paragraph is devoted to the description of the sequential calculus **KGL** constructed by V. P. Orevkov. The third one is devoted to the proof of the main theorem. The conclusion contains a discussion of the results obtained and a brief overview of the prospects for further work.

Keywords: interpolation theorem, classical predicate calculus, universal interpolant, Horn interpolant

Bibliography: 16 titles.

For citation:

D. A. Cybulski, 2024. “Special cases of the interpolation theorem for predicate calculus”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 222–234.

1. Введение

Интерполяционная теорема — это утверждение следующего вида: Пусть секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в исчислении **I**, причём выполнены некоторые *дополнительные условия*. Тогда существует формула C , все параметры которой общие для A и B и такая, что в **I** доказуемы секвенции $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$. Формула C называется *интерполянт* формул A и B .

Говоря неформально, интерполяционная теорема означает следующее: если из формулы A выводима формула B , то формулы A и B имеют “общую часть” — интерполянт. Интерполянт выявляет структурные свойства формул, которые играют главную роль в доказательстве.

Для классической логики предикатов интерполяционная теорема была доказана У. Крейгом в 1957. Дополнительным условием теоремы Крейга стало наличие общего для A и B предикатного параметра (см. [1]). В 1959 Р. К. Линдон опубликовал доказательство ¹⁾ усиленной интерполяционной теоремы для случая, когда секвенции $A \rightarrow$ и $\rightarrow B$ недоказуемы (см. [2]). В 1962 К. Шютте распространил интерполяционную теорему Крейга на интуиционистскую логику предикатов (см. [5]). Впоследствии интерполяционные теоремы были доказаны разными авторами и для других логик. Например, Л. Л. Максимовой были получены варианты интерполяционной теоремы для суперинтуиционистских и модальных логик (см. [6] и [7]).

Среди следствий интерполяционной теоремы упомянем теоремы Бета об определмости и Робинсона о непротиворечивости (см. [8]–[10]).

Данная работа посвящена *специальным случаям* интерполяционной теоремы для классического исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Накладывая ограничения на структуру формул A и B , можно доказать существование интерполанта специального вида. Такие утверждения полезны

1. В теории доказательств, поскольку позволяют уточнить формулировки теоремы Бета об определмости и теоремы Робинсона о непротиворечивости (см. ниже);
2. В решении задач искусственного интеллекта, где успешно используются универсальные хорновские формулы;
3. При разработке языков программирования, основанных на хорновском программировании.

В качестве примера к пункту 1 сформулируем теорему Робинсона для теорий с хорновскими аксиомами.

Пусть S_1 и S_2 — формальные системы (или множества формул), построенные на основе классического исчисления предикатов. Пусть каждая из систем S_1 и S_2 просто непротиворечива, причём все аксиомы S_1 представлены хорновскими формулами. Допустим, что объединение $S_1 \cup S_2$ теорий противоречиво. Тогда существует такая замкнутая хорновская формула I , которая содержит только общие предикаты теорий S_1 и S_2 , что I выводима в S_1 , а $\neg I$ выводима в S_2 .

Доказательство этого специального случая получается элементарной модификацией доказательства общей теоремы Робинсона при помощи пункта 7 нашей основной теоремы.

Работа написана в духе теории доказательств. Все представленные методы — синтаксические; понятие интерпретации не используется.

Определениям и формулировкам результатов работы посвящён параграф 2.1. В параграфе 2.2 описывается построенное В. П. Оревковым классическое исчисление предикатов **KGL**. Доказательства полученных результатов приведены в параграфе 2.3.

Автор рад возможности выразить признательность В. П. Оревкову, по инициативе которого написана данная работа.

2. Основной текст статьи

2.1. Определения и формулировки.

Пусть V — вхождение подформулы в формулу A исчисления предикатов. Если V представлено самой формулой A , будем говорить, что V *входит в A положительно*. Пусть теперь

¹⁾ Доказательство Линдона, как показал в 1960 М. А. Тайцлин, было неверным [3]. В 1963 году корректное доказательство теоремы Линдона дал Л. А. Хенкин [4].

A имеет один из следующих видов: $\forall xA'$, $\exists xA'$, $\neg A'''$, $(A' \vee A'')$, $(A' \& A'')$, $(A''' \supset A')$. Будем говорить, что V входит в A положительно (отрицательно), если V входит в A' или в A'' положительно (отрицательно) либо в A''' отрицательно (положительно). Положительные (отрицательные) вхождения подформулы в секвенцию суть положительные (отрицательные) вхождения в заключение секвенции и отрицательные (положительные) вхождения в её посылки. Знак вхождения логического символа в формулу (в секвенцию) определяется как знак вхождения наименьшей содержащей его подформулы.

Пусть A и B — формулы исчисления предикатов без функциональных знаков и равенства. Формулу C будем называть *интерполянт* A и B (по Линдону), если она удовлетворяет условиям:

- 1) Секвенция $A \rightarrow C$ доказуема в исчислении предикатов;
- 2) Секвенция $C \rightarrow B$ доказуема в исчислении предикатов;
- 3) В C входят положительно лишь те предикаты, что входят положительно как в A , так и в B ;
- 4) В C входят отрицательно лишь те предикаты, что входят отрицательно как в A , так и в B ;
- 5) В C входят свободно лишь общие для A и B свободные переменные.

Пусть $\circ$ — один из логических символов $\forall, \exists, \neg, \vee, \& \text{amp}, \supset$. Положительное (отрицательное) вхождение $\circ$ в формулу будем называть *вхождением типа $\circ^+$ (типа $\circ^-$)*.

Формула исчисления предикатов называется

- *позитивной*, если она не содержит вхождений символов $\supset, \neg$;
- *хорновской*, если она не содержит вхождений типа $\vee^+, \supset^-, \neg^-$;
- *универсальной*, если она не содержит вхождений типа $\forall^-, \exists^+$;
- *экзистенциальной*, если она не содержит вхождений типа $\forall^+, \exists^-$.

Формулы этих классов обладают следующими теоретико-модельными свойствами: позитивные — устойчивы при переходах к гомоморфным образам; хорновские — мультипликативно устойчивы; универсальные — устойчивы при переходах к подсистемам; экзистенциальные — устойчивы при переходах к надсистемам (см. [11]).

Сформулируем основной результат данной работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть A и B — предикатные формулы, не содержащие функциональных знаков. Допустим, что выполняются условия:

- 1) секвенция $A \rightarrow B$ доказуема в классическом исчислении предикатов;
- 2) ни секвенция $A \rightarrow$, ни секвенция $\rightarrow B$ не доказуемы в классическом исчислении предикатов.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Предположим, что существует доказательство секвенции $A \rightarrow B$, в котором не применяются правила $\forall \rightarrow, \rightarrow \exists$ и сечения. Тогда существует интерполянт формул A и B , построенный с помощью связок исчисления высказываний из общих подформул формул A и B , в которые не входят свободно связанные переменные этих формул.

2. Предположим, что B — универсальная формула. Тогда существует универсальный интерполянт формул A и B .

3. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — универсальная формула,
- 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует универсальный интерполянт формул A и B .

4. Предположим, что B — универсальная хорновская формула. Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

5. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — универсальная хорновская формула,
- 2) каждая свободная переменная A является свободной переменной B .

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

6. Допустим, что выполняются следующие условия:

- 1) A — хорновская формула,
- 2) B — универсальная формула.

Тогда существует универсальный хорновский интерполянт формул A и B .

7. Допустим, что A — хорновская формула. Тогда существует хорновский интерполянт формул A и B .

8. Предположим, что B — хорновская формула и в B не содержится вхождений типа $\exists^+$. Тогда существует хорновский интерполянт формул A и B , который не содержит вхождений типа $\exists^+$.

2.2. Исчисление KGL.

Классическое исчисление предикатов **KGL** было описано В. П. Оречковым в [12].

В дальнейшем посредством $\Gamma, \Delta, \Theta, \Xi, \Pi, \Sigma$ (возможно, с индексами, штрихами и звёздочками) мы будем обозначать (конечные) списки формул исчисления предикатов, а посредством A, B, C (возможно, с индексами и звёздочками) — формулы исчисления предикатов. Выражение $[S]_t^x$ будет обозначать результат подстановки термина t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу или секвенцию S при условии, что терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в S .

Аксиомы исчисления **KGL** — это секвенции вида

$$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, A, \Delta_2.$$

Логические правила исчисления **KGL** имеют вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2} \rightarrow \supset_1; \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \supset B), \Delta_2} \rightarrow \supset_2;$$

$$\frac{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta; \quad \Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \supset \rightarrow;$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta_1, (A \& B), \Delta_2; \quad \Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \& B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \& B), \Delta_2} \rightarrow \&; \\
 \frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_1; \quad \frac{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \& \rightarrow_2; \\
 \frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2} \rightarrow \vee_1; \quad \frac{\Gamma \rightarrow B, \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, (A \vee B), \Delta_2} \rightarrow \vee_2; \\
 \frac{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, A \rightarrow \Delta; \quad \Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2, B \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \vee \rightarrow; \\
 \frac{\Gamma, A \rightarrow \Delta_1, \neg A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \neg A, \Delta_2} \rightarrow \neg; \quad \frac{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta}{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \neg \rightarrow; \\
 \frac{\Gamma \rightarrow [A]_a^x, \Delta_1, \forall x A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \forall x A, \Delta_2} \rightarrow \forall; \quad \frac{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2, [A]_t^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \forall \rightarrow; \\
 \frac{\Gamma \rightarrow [A]_t^x, \Delta_1, \exists x A, \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \exists x A, \Delta_2} \rightarrow \exists; \quad \frac{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2, [A]_a^x \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \exists \rightarrow.
 \end{array}$$

Структурное правило *сечения* исчисления **KGL** имеет вид

$$\frac{\Gamma \rightarrow A, \Delta; \quad \Gamma, A \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}.$$

В правилах $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$ исчисления **KGL** переменная a не входит свободно в формулы заключения правила.

Переменную a в применении L правила $\rightarrow \forall$ или $\exists \rightarrow$ называют *собственной переменной применения правила L* .

Терм t в применении L правила $\forall \rightarrow$ или $\rightarrow \exists$ называют *собственным термом применения правила L* .

Пусть L — одно из правил исчисления **KGL**. Вхождения формул в посылку L , преобразуемые L , называют *боковыми вхождениями применения правила L* . Антецедентное боковое вхождение лежит в посылке L непосредственно перед $\rightarrow$, а сукцедентное — непосредственно после $\rightarrow$. Вхождение формулы в заключение L , в которое L преобразует боковые вхождения, называют *главным вхождением применения правила L* . Формулу, которой представлено главное или боковое вхождение применения L , называют соответственно *главной* или *боковой формулой применения L* .

Вхождения формулы A в сукцедент и в антецедент аксиомы S исчисления **KGL** называют *главными вхождениями аксиомы S* , а формулу A — *главной формулой аксиомы S* .

В секвенциальных исчислениях части одних секвенций в доказательствах преобразуются в части других секвенций. Чтобы корректно описывать такие переходы, С. К. Клини разработал язык отношений родства в доказательствах. Мы будем пользоваться этой терминологией (см. [10]). В частности, вхождение V формулы в доказательство D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы) называется *потомком (образом) вхождения W формулы в D в качестве члена секвенции (в качестве подформулы)*, если W преобразуется применениями правил вывода в V . В этом случае W называется *предком (прообразом) вхождения V* .

Отметим некоторые свойства исчисления **KGL**.

Доказательство D называется *регулярным*, если главные формулы всех аксиом в D элементарны. Всякая доказуемая в **KGL** секвенция, очевидно, обладает регулярным доказательством.

Будем говорить, что вхождение формулы в доказательство *прослеживается до аксиом*, если среди предков этого вхождения есть главное вхождение аксиомы. Доказательство D называется *прополотым*, если все боковые вхождения применений правил вывода в D прослеживаются до аксиом. Всякая доказуемая в **KGL** секвенция обладает прополотым доказательством (см. [13]).

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma \rightarrow \Delta_1, \forall x A, \Delta_2.$$

Индукцией по высоте доказательство D , не увеличивая высоты, можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma \rightarrow \Delta_1, [A]_a^x, \Delta_2,$$

где переменная a не входит в секвенции D ни свободно, ни связано.

Таким образом, все применения в D правила $\rightarrow \forall$, образы главных вхождений которых совпадают с вхождением $\forall x A$, перемещаются к последней секвенции доказательства.

Заметим, что в D могут применяться сечения. Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\exists \rightarrow$, $\neg \rightarrow$ и $\rightarrow \neg$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma_1, (A \& B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\rightarrow \vee$ и $\rightarrow \supset$.

Пусть D — регулярное доказательство в исчислении **KGL** секвенции

$$\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Индукцией по высоте доказательство D можно перестроить в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow A, \Delta$$

и в регулярное доказательство секвенции

$$\Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \Delta.$$

Аналогично можно построить алгоритм обращения правил $\rightarrow \&$ и $\vee \rightarrow$.

Аналогичный алгоритм обращения правил $\rightarrow \exists$ и $\forall \rightarrow$ построить нельзя.

Более подробно обратимость правил секвенциальных исчислений доказывается, например, в [14].

Для исчисления **KGL** справедлива основная теорема Г. Генцена: всякая доказуемая секвенция может быть доказана без использования правила сечения (см. [15]).

С. К. Клини была доказана теорема о перестановочности применений правил вывода в секвенциальных исчислениях (см. [16]). Для наших нужд подойдёт следующая её формулировка:

*Пусть D — доказательство секвенции S в исчислении **KGL** и пусть $X \uplus Y$ — такое разбиение множества вхождений логических символов секвенции S , что*

- *Если $L \in Y$ — вхождение логического символа, находящееся в области действия вхождения L' , то $L' \in Y$.*
- *Если $L \in Y$ — вхождение квантора, которому принадлежит применение одного из правил $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, а L' — вхождение квантора, которому принадлежит применение одного из правил $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$, то $L' \in Y$ или L' находится в области действия L .*

Тогда применения логических правил в D можно, не изменяя заключительной секвенции, переставить так, что применения логических правил, принадлежащие вхождению логических символов из X , будут выше применений правил, принадлежащих вхождению логических символов из Y .

Частным случаем теоремы о перестановочности применений правил является теорема Г. Генцена о средней секвенции (см. [15]).

Мы расширим понятие *средней секвенции* и будем называть так секвенции, выше которых в доказательстве располагаются все применения, принадлежащие символам из X , и только они.

2.3. Доказательство основной теоремы.

Пусть Γ — непустой список формул. Посредством $\&\Gamma$ (посредством $\vee\Gamma$) обозначим конъюнкцию (дизъюнкцию) членов Γ . Запись $A \supset$ (запись $\supset A$) будет обозначать формулу $\neg A$ (формулу A).

ЛЕММА. Пусть D — регулярное пропалотое доказательство без сечений в исчислении **KGL** секвенции $A \rightarrow B$, в котором выше применений правил, принадлежащих A , нет применений правил, принадлежащих B .

Предположим, что $S_1, \dots, S_k$ — список всех “средних” секвенций доказательства D . Выше S_i нет применений, принадлежащих B , а ниже нет применений, принадлежащих A . Секвенция S_i имеет вид

$$A, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

В поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемы до аксиом вхождения формулы B и неэлементарных формул списков Σ_i и Π_i . Удалив в поддоказательстве секвенции S_i не прослеживаемые до аксиом вхождения формул, получим доказательство секвенции

$$A, \Sigma'_i \rightarrow \Pi'_i,$$

где Σ'_i и Π'_i — подписки элементарных формул списков Σ_i и Π_i .

Тогда интерполянтотом формул A и B является универсальная формула

$$C \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \dots x_n \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i),$$

где $x_1, x_2 \dots x_n$ — все переменные, которые входят свободно в формулу B или в формулу списка $\Sigma_1, \Pi_1, \Sigma_2, \Pi_2, \dots, \Sigma_k, \Pi_k$, но не входят свободно в A .

1. Очевидно, что C содержит лишь общие (по Линдону) для A и B параметры.

2. Эскиз доказательства секвенции $A \rightarrow C$ представлен деревом:

$$\frac{\frac{\frac{A, \Sigma'_1 \rightarrow \Pi'_1}{A, \&\Sigma'_1 \rightarrow \Pi'_1}}{A, \&\Sigma'_1 \rightarrow \vee \Pi'_1} \quad \dots \quad \frac{\frac{A, \Sigma'_k \rightarrow \Pi'_k}{A, \&\Sigma'_k \rightarrow \Pi'_k}}{A, \&\Sigma'_k \rightarrow \vee \Pi'_k}}{A \rightarrow (\&\Sigma'_1 \supset \vee \Pi'_1) \quad \dots \quad A \rightarrow (\&\Sigma'_k \supset \vee \Pi'_k)} \quad \dots \quad \frac{A \rightarrow \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)}{A \rightarrow \forall x_1, x_2 \dots x_n \bigwedge_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)}.$$

3. Доказуемость секвенции $C, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$ следует из доказуемости

$$\big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i), \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

Эта секвенция, в свою очередь, следует из тривиально выводимых

$$(\&\Sigma'_1 \supset \vee \Pi'_1), \dots, (\&\Sigma'_k \supset \vee \Pi'_k), \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B.$$

при помощи введения конъюнкции в антецедент.

4. Доказательство секвенции $C \rightarrow B$ получается из D заменой поддоказательств секвенций S_i доказательствами $C, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$. Ограничения на переменные в кванторных правилах сохраняются, поскольку C содержит лишь те переменные, что входят в A .

Перейдём к доказательству основной теоремы. Главная идея: перестроить доказательство секвенции $A \rightarrow B$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться леммой либо её модификацией. Не оговаривая особо, посредством $S_1, \dots, S_k$ мы будем обозначать список всех “средних” секвенций $S_i : A, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$, посредством Σ'_i и Π'_i — подписки прослеживаемых до аксиом (элементарных) формул списков Σ_i и Π_i , а посредством $\bar{x}$ — список всех переменных, которые входят свободно в формулу B или в формулу списка $\Sigma_1, \Pi_1, \Sigma_2, \Pi_2, \dots, \Sigma_k, \Pi_k$, но не входят свободно в A . Условие 2) основной теоремы гарантирует существование по крайней мере одной “средней” секвенции.

1. Применим к выводу D секвенции $A \rightarrow B$ процесс, описанный в доказательстве теоремы 40 из книги [10]. Мы получим доказательства D^A и D^B секвенций $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$, где C — интерполянт по Линдону формул A и B . В частности, в C входят только общие переменные формул A и B и не входят собственные переменные применений кванторных правил. Заметим, что вхождению C в заключительные секвенции D^A и D^B не принадлежат применения кванторных правил. Действительно, в D не применяются правила $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, и следовательно, ни одна из переменных, входящих в предки C , не исчезает. Кванторы, соответственно, при построении C не вводятся; C строится из общих подформул A и B с помощью пропозициональных связок. Связанные переменные этих формул не входят свободно в C в силу чистоты переменных в доказательстве P и пункта б) определения интерполянта по Линдону.

В дальнейшем будем рассматривать регулярные доказательства без сечений.

2. В любом доказательстве секвенции $A \rightarrow B$ универсальной формуле B принадлежат лишь применения обратимых правил. Спустим применения правил, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. По лемме универсальная формула

$$\forall \bar{x} \big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

3. Разобьём множества применений правил вывода на два класса: к “верхнему” отнесём принадлежащие вхождению A в заключительную секвенцию, к “нижнему” — те, что принадлежат вхождению B . Заметим, что вхождению A в заключительную секвенцию не принадлежат применения правил $\rightarrow \forall$ и $\exists \rightarrow$, так как им соответствовали бы вхождения кванторов типа $\forall^-$ и $\exists^+$. Таким образом, мы можем перестроить доказательство секвенции $A \rightarrow B$ в соответствии с разбиением. По лемме универсальная формула

$$\forall \bar{x} \big\&_{i=1}^k (\&\Sigma'_i \supset \vee \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

4. В доказательстве секвенции $A \rightarrow B$ универсальной хорновской формуле B не принадлежат применения правил $\forall \rightarrow, \rightarrow \exists, \rightarrow \vee, \supset \rightarrow, \neg \rightarrow$. Все правила, принадлежащие B , во-первых, обратимы, во-вторых, при обращении сингулярной (т.е. содержащей не более одной формулы в сукцеденте) секвенции дают сингулярные секвенции. Спустим применения правил, принадлежащие B , к доказываемой секвенции. Списки Π'_i содержат не более одной формулы. Универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

есть интерполянт A и B .

5. Перестроим доказательство аналогично пункту 3. Заметим, что хорновской формуле A не принадлежат применения правил $\vee \rightarrow, \rightarrow \supset, \rightarrow \neg$. Следовательно, списки Π'_i содержат не более одной формулы. Универсальная хорновская формула

$$\forall \bar{x} \& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

будет интерполянтом A и B .

6. Перестроим доказательство аналогично пункту 2 и воспользуемся наблюдением из пункта 5.
7. Пусть $A^* \equiv A$ и $B^* \equiv B$ — предварённые формулы. По теореме о средней секвенции существует такое доказательство D секвенции $A^* \rightarrow B^*$, что все применения пропозициональных правил в D находятся выше секвенции $S : A, \Sigma, A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n, \Pi, B$ и принадлежат вхождениям бескванторных формул $A_1, \dots, A_m$ и $B_1, \dots, B_n$, а все применения кванторных правил в D располагаются ниже S . Спустим применения правил, принадлежащие вхождениям $B_1, \dots, B_n$, к секвенции S . Пусть в поддоказательстве D , оканчивающемся секвенцией S , “средние” секвенции суть $S_1, \dots, S_k$,

$$S_i : A, \Sigma, A_1, \dots, A_m, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B_1, \dots, B_m, \Pi, B.$$

Формулы $A_1, \dots, A_m$ — предки хорновской A^* , и им не принадлежат применения правил $\vee \rightarrow, \rightarrow \supset, \rightarrow \neg$, следовательно, в сукцедентах секвенций $S_1, \dots, S_k$ до аксиом прослеживается не более одной формулы. По лемме хорновская формула

$$\& (\& \Sigma'_i \supset \Pi'_i)$$

есть интерполянт

$$\&_{i=1}^m A_i \quad \text{и} \quad \bigvee_{i=1}^n B_i.$$

Интерполянт C формул A^* и B^* (и следовательно, формул A и B) получается из данной хорновской формулы квантованием некоторых переменных.

8. Спустим все применения правил, принадлежащие B и не принадлежащие применениям правила $\forall \rightarrow$, к заключительной секвенции. Мы придём к “псевдосредним” секвенциям $S_1, \dots, S_k$ вида $S_i : A, \Xi_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, B$, где Ξ_i — списки формул, начинающихся с $\forall$. При этом в списках Π_i (аналогично 4) до аксиом прослеживается не более одной формулы. Формулы списков Ξ_i — позитивные.

Пусть $A^* \equiv A$ — предварённая формула и пусть списки Ξ_i^* получены из Ξ_i заменой формул эквивалентными им предварёнными. Положим $S_i^* : A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i$. Переход

от $S_1, \dots, S_k$ к $S_1^*, \dots, S_k^*$ правомерен, поскольку формула $B^* \equiv B$, полученная заменой вхождений подформул списков Ξ_i соответствующими формулами списков Ξ_i^* — хорновская и не содержит $\exists^+$.

Пусть $A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i, \Gamma_i, \Delta_i \rightarrow \Pi_i$ — “средняя” секвенция подходящего доказательства S_i^* ; поддерево между “средней” и заключительной секвенцией обозначим посредством D_i . Квантование формул списков Γ_i даёт A^* ; формул списков Δ_i — списки Ξ_i^* . Спустив применения правил, принадлежащие вхождениям формул списка Δ_i , придём к секвенциям $A^*, \Xi_i^*, \Sigma_i, \Gamma_i, \Delta_i, \Theta_{ij} \rightarrow \Pi_i$, где Θ_{ij} , $j \in [1 : l_i]$, суть списки атомов. Будем считать, что, во-первых, списки Θ_{ij}, Σ_i и Π_i не содержат общих формул, а во-вторых, что секвенции $\Gamma_i \rightarrow$ недоказуемы. Списки $\Theta'_{ij}; \Sigma'_i; \Pi'_i$ получим из $\Theta_{ij}; \Sigma_i; \Pi_i$ удалением вхождений формул, не прослеживаемых до аксиом.

Положим

$$C_i \Leftarrow \left(\bigvee_{j=1}^{l_i} \&\Theta'_{ij} \&\Sigma'_i \right), \quad i \in [1 : k].$$

Нетрудно построить доказательства D_i^1, D_i^2, D_i^3 секвенций

$$\Gamma_i, C_i \rightarrow \Pi'_i; \quad \Delta_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, C_i; \quad \Pi'_i, \Delta_i, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i.$$

Таким образом, $(C_i \supset \Pi'_i)$ — интерполянт списков Γ_i и $\neg\Delta_i, \neg\Sigma_i, \Pi_i$.

Введём кванторы в Γ_i и Δ_i в последовательности, определяемой деревом D_i . Если собственная переменная v применения L правила $\forall \rightarrow$ исчезает в результате этого применения из потомков Γ_i (потомков Δ_i), в доказательствах, полученных из D_i^1 и D_i^2 квантованием переменных из Γ_i и Δ_i , следующим шагом надлежит связать переменную v в потомке C_i всеобщностью (существованием), если, конечно, v входит в C_i .

В результате построим доказательства секвенций

$$A^*, C_i^* \rightarrow \Pi'_i; \quad \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i, C_i^*; \quad \Pi'_i, \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i.$$

Формулы C_i^* получены из C_i присоединением кванторных приставок.

Итак, мы доказали $A \rightarrow (C_i^* \supset \Pi'_i)$ и $(C_i^* \supset \Pi'_i), \Xi_i^*, \Sigma_i \rightarrow \Pi_i$ для всех $i \in [1 : k]$. Отсюда несложно вывести

$$A \rightarrow \forall \bar{x} \&_{i=1}^k (C_i^* \supset \Pi'_i) \quad \text{и} \quad \forall \bar{x} \&_{i=1}^k (C_i^* \supset \Pi'_i) \rightarrow B,$$

где $\bar{x}$ — список всех переменных, входящих свободно в формулы списка $C_1^*, \Pi'_1, \dots, C_k^*, \Pi'_k$ и не входящих свободно в B .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если из формулировок пунктов **3** и **5** убрать условие 2), то в интерполянт может понадобиться ввести кванторы существования. Пусть, например, R — одноместный предикатный символ. Тогда $R(a)$ — универсальная хорновская формула, но для секвенции $R(a) \rightarrow \exists x R(x)$ не существует универсального интерполянта.

3. Заключение

Нами получен ряд достаточных условий существования интерполянтов специального вида: универсального, хорновского, универсального хорновского, хорновского без вхождений типа $\exists^+$. Дуализация доказательств даёт также достаточные условия существования экзистенциальных и экзистенциальных хорновских интерполянтов.

Мы показали, что интерполянт во многих случаях сохраняет структурные свойства интерполируемых формул. Дальнейшая работа по теме может состоять как в более глубоком исследовании этой структурной связи, так и в приложении полученных результатов к нуждам теории доказательств. Кроме того, интересно рассмотреть ту же задачу для интуиционистской логики предикатов и для других нестандартных логик.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Craig W. Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem. // Jour. symbolic logic, Vol. 22, P. 250-268.
2. Lyon R. C. An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus. // Pacific jour. math., Vol. 9, P. 129-142.
3. Тайцлин М. А. Реферат на ст. Линдона. // Jour. symbolic logic., Vol. 25, P. 273-274.
4. Henkin L. A. An Extension of the Craig–Lyndon Interpolation Theorem. // Ibid., Vol. 28, P. 201-216.
5. Schütte K. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikaten-logik. // Math. Ann., Vol. 148, P. 192-200.
6. Максимова Л. Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр. // Алгебра и логика, т. 16:6, с. 643-681.
7. Maksimova L. On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics. // Studia Logica, Vol. 55, P. 99-112.
8. Beth E. W. On Padoa’s Method in the Teory of Definition. // Ibid., Vol. 56, P. 330-339.
9. Robinson A. A Result of Consistency and It’s Application to the Theory of Definition. // Kon. Ned. Akad., Amsterdam, Proc., Ser. A, Vol. 59, P. 47-58.
10. Kleene S. C. Mathematical Logic. // John Wiley & Sons, inc., 1967, New York, P. 394-441.
11. Мальцев А. И. Алгебраические системы. // Наука, 1970, Москва, с. 163-192.
12. Оревков В. П. Верхние оценки удлинения выводов при устранении сечений. // Записки науч. семинаров ЛОМИ, т. 137, с. 87-98.
13. Оревков В. П. О гливенковских классах секвенций. // Труды ордена Ленина Мат. института им. Стеклова, т. 98, с. 131-154.
14. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. // Наука, 1987, Москва, с. 209-214.
15. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. I, II. // Math. Zeitschrift, Vol. 39, P. 176-210, 405-443.
16. Kleene S. C. Permutability of inferences in Gentzen’s caculi LK and LJ. // Memories of the Am. math. society, Vol. 10, P. 1-26.

REFERENCES

1. Craig, W. "Linear Reasoning. A New Form of the Herbrand–Gentzen Theorem", *Jour. symbolic logic*, vol. 22, pp. 250-268.
2. Lyndon, R. C. "An Interpolation Theorem in the Predicate Calculus", *Pacific jour. math.*, vol. 9, pp. 129-142.
3. Tayclin, M. A. "Abstract of Lyndon's article", *Jour. symbolic logic.*, vol. 25, pp. 273-274.
4. Henkin, L. A. "An Extension of the Craig–Lyndon Interpolation Theorem", *Ibid.*, vol. 28, pp. 201-216.
5. Schütte, K. "Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikaten-logik", *Math. Ann.*, vol. 148, pp. 192-200.
6. Maksimova, L. "Craig's Theorem for Superintuitionistic Logics and Amalgamated Varieties of Pseudo-Boolean Algebras", *Algebra and Logic*, vol. 16:6, pp. 643-681.
7. Maksimova, L. "On Variable Separation in Modal and Superintuitionistic Logics", *Studia Logica*, vol. 55, pp. 99-112.
8. Beth, E. W. "On Padoa's Method in the Teory of Definition. *Ibid.*, vol. 56, pp. 330-339.
9. Robinson, A. "A Result of Consistency and It's Application to the Theory of Definition. *Kon. Ned. Akad.*, Amsterdam, Proc., Ser. A, vol. 59, pp. 47-58.
10. Kleene, S. C. "Mathematical Logic", *John Wiley & Sons, inc.*, 1967, New York, pp. 394-441.
11. Maltsev, A. I., 1970. "Algebraic Systems", *Nauka*, Moscow, pp. 163-192.
12. Orevkov, V. P. "Upper Bounds of Inference Elongation When Eliminating Cuts", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol. 137, pp. 87-98.
13. Orevkov, V. P. "On Glivenko's Classes of Sequents", *Trudy ordena Lenina Matematicheskogo Instituta Steklova*, vol. 98, pp. 131-154.
14. Ershov, Yu. L., Paliutin, E. A., 1987. "Mathematical Logic", *Nauka*, Moskov, pp. 209-214.
15. Gentzen, G. "Untersuchungen über das logische Schließen. I, II", *Math. Zeitschrift*, vol. 39, pp. 176-210, 405-443.
16. Kleene, S. C. "Permutability of inferences in Gentzen's caculi LK and LJ", *Memories of the Am. math. society*, vol. 10, pp. 1-26.

Получено: 11.03.2024

Принято в печать: 28.06.2024