

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16. Выпуск 4.

УДК 514.7,517.9

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ПОРОЖДАЕМЫЕ РАНДОМИЗИРОВАННЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

И. И. Баврин (г. Москва), В. И. Паньженский (г. Пенза),
О. Э. Яремко (г. Пенза)

Аннотация

Методы дифференциальной геометрии находят применения в исследовании информационных массивов (семейств вероятностных распределений пространств квантовых состояний, нейронных сетей и т.п.). Исследования по информационной геометрии восходят к С. Рао, который на основе фишеровской информационной матрицы определил риманову метрику на многообразии распределений вероятностей. Дальнейшие исследования привели к понятию статистического многообразия. Статистическое многообразие это гладкое конечномерное многообразие, на котором задана метрически-аффинная структура, т.е. риманова метрика и линейная связность без кручения, совместимая с заданной метрикой; при этом выполняется условие Кодаци. Геометрическое многообразие в том числе и статистическое многообразие задается структурным тензором.

В предлагаемом исследовании рассматриваются статистические структуры, порождаемые рандомизированными плотностями нормального распределения и распределения Коши. В основу исследования положено утверждение о том, что рандомизированную плотность вероятности нормального распределения можно рассматривать как решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, а рандомизированную плотность вероятности распределения Коши можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Обратно, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности можно рассматривать как рандомизированную плотность вероятности нормального распределения, а решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа как рандомизированную плотность вероятности распределения Коши. Основная задача работы состояла в том, чтобы для каждого из этих двух случаев найти компоненты информационной матрицы Фишера и структурного тензора.

Для преодоления вычислительных трудностей, нами обнаружены нелинейные дифференциальные уравнения первого, второго и третьего порядков для плотности нормального распределения и плотности Коши. Компоненты метрического тензора (информационной матрицы Фишера)

и компоненты тензора деформации вычисляются по формулам, в которых присутствует функция правдоподобия, т.е. логарифм от плотности распределения. Из положительной определенности информационной матрицы Фишера получаются неравенства, которым заведомо удовлетворяют решения задачи Коши с неотрицательными начальными условиями в случае уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: информационной матрицы Фишера, структурный тензор, плотность распределения, формула Пуассона, уравнение теплопроводности, задача Дирихле, уравнение Лапласа.

Библиография: 23 названия.

STATISTIC STRUCTURE GENERATED BY RANDOMIZE DENSITY

I. I. Bavrin (Moscow), V. I. Panzhensky (Penza),
O. E. Iaremko (Penza)

Abstract

Differential geometry methods of have applications in the information files study (families of probability distributions of spaces of quantum states, neural networks, etc.). Research on geometry information back to the S. Rao that based by Fisher information matrix defined the Riemannian metric of probability distributions manifold. Further investigation led to the concept of statistical manifold. Statistical manifold is a smooth finite-dimensional manifold on which a metrically-affine structure, ie, metric and torsion-free linear connection that is compatible with a given metric; while the condition Codazzi. Geometric manifold and the manifold is given statistical structure tensor.

In the present study examines the statistical structure of the generated randomized density of the normal distribution and the Cauchy distribution. The study put the allegation that a randomized probability density of the normal distribution can be regarded as the solution of the Cauchy problem for the heat equation, and randomized probability density of the Cauchy distribution can be considered as a solution to the Dirichlet problem for the Laplace equation. Conversely, the solution of the Cauchy problem for the heat equation can be regarded as a randomized probability density of the normal distribution, and the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation as randomized probability density of the Cauchy distribution. The main objective of the study was the fact that for each of these two cases to find the Fisher information matrix components and structural tensor.

We found nonlinear differential equations of the first, second and third order for the density of the normal distribution and Cauchy density computational difficulties to overcome. The components of the metric tensor (the Fisher information matrix) and the components of the strain tensor are calculated according to formulas in which there is the log-likelihood function, ie, logarithm of the density distribution. Because of the positive definiteness of the Fisher

information matrix obtained inequality, which obviously satisfy the Cauchy problem solution with nonnegative initial conditions in the case of the Laplace equation and the heat equation.

Keywords: Fisher information matrix, structure tensor, random density, Poisson formula, Heat equation, Dirichlet problem, Laplace equation.

Bibliography: 23 titles.

1. Введение

В настоящее время широко используются методы дифференциальной геометрии в исследовании информационных массивов (семейств вероятностных распределений пространств квантовых состояний, нейронных сетей и т.п.). Исследования по информационной геометрии восходят к статье С.Рао [1], где на основе фишеровской информационной матрицы [2] была определена риманова метрика на многообразии распределений вероятностей. Дальнейшие исследования привели к понятию статистического многообразия [3] как гладкого n мерного многообразия на M на котором задана метрически-аффинная структура [4] $(g, \bar{\nabla})$, где g -риманова метрика, а $\bar{\nabla}$ -линейная связность без кручения, совместимая с метрикой g , т.е. для g и $\bar{\nabla}$ выполняется условие Кодацци [5, 6]

$$\bar{\nabla}_x g(y, z) = \bar{\nabla}_y g(x, z)$$

для любых векторных x, y, z на M . Такая метрически-аффинная структура называется статистической. Так как $\nabla = \bar{\nabla} + \bar{T}$, где ∇ связность Леви-Чевита метрики g , а $\bar{T}$ ее тензор деформации, то ковариантный тензор деформации [7] $T(x, y, z) = g((T(x, y), z)$, в силу условия Кодацци, симметричен по своим аргументам. Таким образом статистическая структура определяется заданием на M пары тензорных полей [8] (g, T) .

Статистической моделью [19, 20, 21, 22, 23] называется гладко параметризованное конечным числом действительных параметров $\theta^i (i = 1, \dots, n)$ семейство S распределений вероятностей $P_\theta | \theta \in R^n$ случайной величины [10]. Всякое распределение вероятностей P_θ случайной величины ξ характеризуется своей плотностью $p(\xi | \theta)$ на выборочном пространстве $\Omega, \xi \in \Omega$ или некоторой функцией от p из непрерывного 1-параметрического семейства функций

$$\varphi_2(p) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{1-\alpha} p^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \alpha \neq 1 \\ \ln p, \alpha = 1 \end{pmatrix}$$

При $\alpha = 1$ получаем функцию правдоподобия $\varphi = \ln p$. В этом случае компоненты g_{ij} метрического тензора [1, 2, 19] g (информационная матрица Фишера) и компоненты T_{ijk} тензора деформации вычисляются по следующим формулам:

$$g_{ij}(\theta) = \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot p d\xi \quad (1)$$

$$T_{ijk}(\theta) = -\frac{1}{2} \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot \partial_k \ln p \cdot d\xi \quad (2)$$

где $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$.

2. Рандомизированная плотность нормального распределения и соответствующая статистическая структура

Рассмотрим уравнение теплопроводности с начальным условием [11, 12, 16]

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (3)$$

где $f(x)$ начальное распределение температурного поля. Решение задачи Коши выражается через фундаментальное решение [11]

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

при помощи следующей формулы:

$$u(x, t) = \int \Phi(x - \xi, t) f(\xi) d\xi. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f(\xi)$ -некоторая плотность вероятности [18], то решение задачи Коши (1) можно интерпретировать как рандомизированную плотность [10] нормального распределения с параметрами $(x, \sqrt{2t})$.

Обозначим

$$h(t, x - \xi) = 2\sqrt{\pi t} \Phi(x - \xi, t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$

ЛЕММА 1. *Справедливы соотношения*

$$\frac{h'_t h'_t}{h} = h''_{tt} + \frac{2}{t} h'_t, \quad \frac{h'_x h'_x}{h} = h''_{xx} + \frac{1}{2t} h, \quad \frac{h'_t h'_x}{h} = h''_{tx} + \frac{1}{t} h'_x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$h'_x = -\frac{x - \xi}{2t} h, \quad h'_x h'_x = \frac{(x - \xi)^2}{4t^2} h^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h''_{xx} &= -\frac{1}{2t} h + \frac{(x - \xi)^2}{4t^2} h, \quad \frac{h'_x h'_x}{h} = h''_{xx} + \frac{1}{2t} h, \\ h'_t &= \frac{(x - \xi)^2}{4t^2} h, \quad h'_t h'_t = \left(\frac{(x - \xi)^2}{4t^2} \right)^2 h^2, \end{aligned}$$

$$h''_{tt} = -\frac{(x-\xi)^2}{2t^3}h + \left(\frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right)^2 h.$$

Значит,

$$\frac{h'_t h'_t}{h} = h''_{tt} + \frac{2}{t} h'_t.$$

Аналогично,

$$\frac{h'_t h'_x}{h} = h''_{tx} + \frac{1}{t} h'_x.$$

ЛЕММА 2. *Выполняются следующие тождества*

$$\frac{h_x^3}{h^2} = h'''_{xxx} + \frac{3}{2t} h'_x$$

$$\frac{h_x^2 h'_t}{h^2} = h'''_{xxt} + \frac{2}{t} h''_{xx} + \frac{1}{2t} h'_t + \frac{1}{2t^2} h$$

$$\frac{h_t^3}{h^2} = h'''_{ttt} + \frac{6}{t} h''_{tt} + \frac{6}{t^2} h'_t$$

$$\frac{h_t^2 h'_x}{h^2} = h'''_{xtt} + \frac{4}{t} h''_{tx} + \frac{2}{t^2} h'_x$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно продифференцировать по переменной t или x каждое из равенств в лемме 1.

ЛЕММА 3. *Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на действительной оси, а функция $u(t, x)$ определяется формулой (1), тогда функция*

$$p(\xi, x, t) = \frac{h(t, x - \xi)f(\xi)}{2\sqrt{\pi t}u(t, x)}$$

является плотностью распределения [14], здесь $\theta^1 = x, \theta^2 = t$ — параметры семейства S распределений вероятностей, ξ — случайная величина на выборочном пространстве R .

Найдем статистическую структуру на S в случае, когда φ является функцией правдоподобия, т.е. $\varphi = \ln p$. В этом случае информационная матрица Фишера вычисляется явно.

ТЕОРЕМА 1. *Элементы информационной матрицы Фишера-компоненты метрического тензора g имеют вид*

$$g_{11} = (\ln u)''_{xx} + \frac{1}{2t}$$

$$g_{22} = (\ln u)''_{tt} + \frac{2}{t} (\ln u)'_t + \frac{1}{2t^2}$$

$$g_{12} = (\ln u)''_{xt} + \frac{1}{t} (\ln u)'_x$$

Доказательство. Вычислим информационную матрицу

$$\begin{aligned} g_{11} &= \int (\ln p)'_x (\ln p)'_x p d\xi = \int ((\ln h)'_x (\ln h)'_x - 2(\ln h)'_x (\ln u)'_x + (\ln u)'_x (\ln u)'_x) \frac{hf}{u} = \\ &= \int \frac{h'_x h'_x}{h} \frac{f}{u} d\xi - 2(\ln u)'_x \int \frac{h'_x f}{u} d\xi + (\ln u)'_x (\ln u)'_x \end{aligned}$$

По формулам (1) вычисляем слагаемые

$$\begin{aligned} \int \frac{h'_x f}{u} d\xi &= \frac{u'_x}{u} \\ \int \frac{h'_x h'_x}{h} \frac{f}{u} d\xi &= \int \left(h''_{xx} + \frac{1}{2t} h \right) \frac{f}{u} d\xi = \frac{u''_{xx}}{u} + \frac{1}{2t} \end{aligned}$$

В результате

$$g_{11} = (\ln u)''_{xx} + \frac{1}{2t}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} g_{12} &= \int (\ln p)'_x (\ln p)'_t p d\xi = \int ((\ln h)'_x (\ln h)'_t - (\ln h)'_x (\ln \sqrt{tu})'_t - \\ &\quad - (\ln h)'_t (\ln \sqrt{tu})'_x + (\ln \sqrt{tu})'_x (\ln \sqrt{tu})'_t) \frac{hf}{\sqrt{tu}} = \\ &= \int \frac{h'_x h'_t}{h} \frac{f}{\sqrt{tu}} d\xi - (\ln \sqrt{tu})'_t \int \frac{h'_x f}{\sqrt{tu}} d\xi - (\ln \sqrt{tu})'_x \int \frac{h'_t f}{\sqrt{tu}} d\xi + (\ln \sqrt{tu})'_x (\ln \sqrt{tu})'_t = \\ &= (\ln \sqrt{tu})''_{xt} + \frac{1}{t} (\ln \sqrt{tu})'_x = (\ln u)''_{xt} + \frac{1}{t} (\ln u)'_x \end{aligned}$$

Точно так же

$$\begin{aligned} g_{22} &= \int (\ln p)'_t (\ln p)'_t p d\xi = \\ &= \int \left((\ln h)'_t (\ln h)'_t - 2(\ln h)'_t (\ln \sqrt{tu})'_t + (\ln \sqrt{tu})'_t (\ln \sqrt{tu})'_t \right) \frac{hf}{\sqrt{tu}} = \\ &= \int \frac{h'_t h'_t}{h} \frac{f}{\sqrt{tu}} d\xi - 2(\ln \sqrt{tu})'_t \int \frac{h'_t f}{\sqrt{tu}} d\xi + (\ln \sqrt{tu})'_t (\ln \sqrt{tu})'_t = \\ &= (\ln \sqrt{tu})''_{tt} + \frac{2}{t} (\ln \sqrt{tu})'_t = (\ln u)''_{tt} + \frac{2}{t} (\ln u)'_t + \frac{1}{2t^2} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Компоненты структурного тензора имеют вид

$$\begin{aligned} T_{111} &= -\frac{1}{2} (\ln u)'''_{xxx} - \frac{3}{4t} (\ln u)'_x \\ T_{112} &= -\frac{1}{2} (\ln u)'''_{xxt} - \frac{1}{t} (\ln u)''_{xx} - \frac{1}{4t} (\ln u)'_t - \frac{1}{4t^2} \\ T_{122} &= -\frac{1}{2} (\ln u)''_{xtt} - \frac{2}{t} (\ln u)''_{tx} - \frac{1}{t^2} (\ln u)'_x \\ T_{222} &= -\frac{1}{2} (\ln u)'''_{ttt} - \frac{3}{t} (\ln u)''_{tt} - \frac{3}{t^2} (\ln u)'_t \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned}
 T_{222}(\theta) &= -\frac{1}{2} \int \partial_t \log p(\xi; t, x) \cdot \partial_t \log p(\xi; t, x) \cdot \partial_t \log p(\xi; t, x) \cdot p(\xi; t, x) d\xi = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{h'_t}{h} - \frac{v'_t}{v} \right)^3 \frac{hf(\xi)}{v} d\xi = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{h_t'^3}{h^3} - 3 \frac{h_t'^2 v'_t}{h^2 v} + 3 \frac{h'_t v_t'^2}{h v^2} - \frac{v_t'^3}{v^3} \right) \frac{hf(\xi)}{v} d\xi
 \end{aligned}$$

Применим лемму 2 и воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned}
 \int h(t, x - \xi) f(\xi) d\xi &= v(t, x), \quad \int h'_t(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = v'_t(t, x), \\
 \int h''_{tt}(t, x - \xi) f(\xi) d\xi &= v''_{tt}(t, x), \quad \int h'''_{ttt}(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = v'''_{ttt}(t, x), \quad v = 2\sqrt{\pi t} u
 \end{aligned}$$

Элементарными преобразованиями получим требуемую компоненту структурного тензора. Остальные компоненты вычисляются аналогично.

3. Рандомизированная плотность распределения Коши и статистическая структура

Рассмотрим задачу Дирихле [12, 16] для уравнения Лапласа для полуплоскости

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 & (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbf{R} \\ u(0, y) = f(y) \end{cases} \quad (5)$$

где $f(y)$ граничное значение. Решение задачи Дирихле выражается через фундаментальное решение [11]

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

при помощи следующей формулы:

$$u(x, t) = \int \Phi(x, y - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f(\xi)$ -некоторая плотность вероятности, то решение задачи Дирихле (3) можно интерпретировать как рандомизированную плотность [10] распределения Коши [18]. Обозначим

$$h(x, y - \xi) = \frac{\pi \Phi(x, y - \xi)}{x} = \frac{1}{(x^2 + (y - \eta)^2)},$$

ЛЕММА 4. Плотность распределения Коши удовлетворяет нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка [17]

$$\frac{h'_x h'_x}{h} = h''_{xx} - \frac{1}{x} h'_x$$

$$\frac{h'_y h'_y}{h} = h''_{yy} - \frac{1}{x} h'_x$$

$$\frac{h'_y h'_x}{h} = \frac{1}{2} h''_{yx}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем соотношения

$$h'_x = -\frac{2x}{x^2 + (y - \eta)^2} h, h'_x h'_x = \frac{4x^2}{(x^2 + (y - \eta)^2)^2} h^2$$

Тогда

$$h''_{xx} = -\frac{2}{x^2 + (y - \eta)^2} h + \frac{4x^2}{(x^2 + (y - \eta)^2)^2} h$$

$$\frac{h'_x h'_x}{h} = h''_{xx} - \frac{1}{x} h'_x$$

$$h'_y = -\frac{2(y - \eta)}{x^2 + (y - \eta)^2} h, h'_y h'_y = \frac{4(y - \eta)^2}{(x^2 + (y - \eta)^2)^2} h^2$$

$$h''_{yy} = -\frac{2}{x^2 + (y - \eta)^2} h + \frac{4(y - \eta)^2}{(x^2 + (y - \eta)^2)^2} h$$

Значит

$$\frac{h'_y h'_y}{h} = h''_{yy} - \frac{1}{x} h'_x$$

Аналогично

$$\frac{h'_y h'_x}{h} = \frac{1}{2} h''_{yx}$$

ЛЕММА 5. Плотность распределения Коши удовлетворяет нелинейным дифференциальным уравнениям третьего порядка [17]

$$\frac{h_x^3}{h^2} = h'''_{xxx} - \frac{3}{x} h''_{xx} + \frac{3}{x^2} h'_x$$

$$\frac{h_y^3}{h^2} = h'''_{yyy} - \frac{3}{2x} h''_{xy}$$

$$\frac{h_y^2 h'_x}{h^2} = \frac{1}{3} h'''_{yyx} - \frac{1}{3x} h''_{xy} + \frac{1}{3x^2} h'_x$$

$$\frac{h_x^2 h'_y}{h^2} = \frac{1}{3} h'''_{xxy} - \frac{1}{3x} h''_{xy}$$

ЛЕММА 6. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на действительной оси. Тогда формула

$$p(\xi, x, y) = \frac{xh(t, x - \xi)f(\xi)}{\pi u(x, y)}$$

определяет плотность распределения.

ТЕОРЕМА 3. Элементы информационной матрицы имеют вид

$$g_{11} = (\ln u)''_{xx} - \frac{1}{x}(\ln u)'_x + \frac{2}{x^2}$$

$$g_{12} = \frac{1}{2}(\ln u)''_{xy}$$

$$g_{22} = (\ln u)''_{xx} - \frac{1}{x}(\ln u)'_x + \frac{2}{x^2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} g_{11} &= \int (\ln p)'_x (\ln p)'_x p d\xi = \int ((\ln h)'_x (\ln h)'_x - 2(\ln h)'_x (\ln v)'_x + (\ln v)'_x (\ln v)'_x) \frac{hf}{v} = \\ &= \int \frac{h'_x h'_x}{h} \frac{f}{v} d\xi - 2(\ln v)'_x \int \frac{h'_x f}{v} d\xi + (\ln v)'_x (\ln v)'_x, \end{aligned}$$

где $v = \frac{\pi}{x}u$. По лемме вычисляем слагаемые

$$\begin{aligned} \int \frac{h'_x f}{v} d\xi &= \frac{v'_x}{v} \\ \int \frac{h'_x h'_x}{h} \frac{f}{v} d\xi &= \int \left(h''_{xx} - \frac{1}{x} h'_x \right) \frac{f}{v} d\xi = \frac{v''_{xx}}{v} - \frac{1}{x} \frac{v'_x}{v} \end{aligned}$$

В результате находим

$$g_{11} = (\ln v)''_{xx} - \frac{1}{x}(\ln v)'_x$$

Аналогично

$$\begin{aligned} g_{12} &= \int (\ln p)'_x (\ln p)'_y p d\xi = \\ &= \int ((\ln h)'_x (\ln h)'_y - (\ln h)'_x (\ln v)'_y - (\ln h)'_y (\ln v)'_x + (\ln v)'_x (\ln v)'_y) \frac{hf}{v} = \\ &= \int \frac{h'_x h'_y}{h} \frac{f}{v} d\xi - (\ln v)'_y \int \frac{h'_x f}{v} d\xi - (\ln v)'_x \int \frac{h'_y f}{v} d\xi + (\ln v)'_x (\ln v)'_y = \frac{1}{2} \frac{v''_{xy}}{v} - \frac{v'_x v'_y}{v^2} \\ g_{22} &= \int (\ln p)'_y (\ln p)'_y p d\xi = \int ((\ln h)'_y (\ln h)'_y - 2(\ln h)'_y (\ln v)'_y + (\ln v)'_y (\ln v)'_y) \frac{hf}{v} = \\ &= \int \frac{h'_y h'_y}{h} \frac{f}{v} d\xi - 2(\ln v)'_y \int \frac{h'_y f}{v} d\xi + (\ln v)'_y (\ln v)'_y = \\ &= (\ln v)''_{xx} - \frac{1}{x}(\ln v)'_x \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Компоненты структурного тензора имеют вид

$$\begin{aligned} T_{111} &= -\frac{1}{2}(\ln u)'''_{xxx} + \frac{3}{2x}(\ln u)''_{xx} - \frac{3}{2x^2}(\ln u)'_x - \frac{4}{x^3} \\ T_{112} &= -\frac{1}{6}(\ln u)'''_{xxy} + \frac{1}{6x}(\ln u)''_{xy} \\ T_{122} &= -\frac{1}{6}(\ln u)'''_{yyx} + \frac{1}{6x}(\ln u)''_{xy} - \frac{1}{6x^2}(\ln u)'_x + \frac{1}{6x^3} \\ T_{222} &= -\frac{1}{2}(\ln u)'''_{yyy} + \frac{3}{4x}(\ln u)''_{xy} \end{aligned}$$

Рассуждения проводятся по образцу теоремы 1 с использованием лемм 4, 5, 6.

4. Заключение

Нами проведено исследование статистических структур, порождаемых рандомизированными плотностями нормального распределения и распределения Коши. В основу исследования положено утверждение о том, что рандомизированную плотность вероятности нормального распределения можно рассматривать как решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, а рандомизированную плотность вероятности распределения Коши можно рассматривать как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Обратно, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности можно рассматривать как рандомизированную плотность вероятности нормального распределения, а решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа как рандомизированную плотность вероятности распределения Коши.

Для каждого из этих двух случаев мы нашли компоненты информационной матрицы Фишера и структурного тензора. Предложен новый метод вычисления этих компонент, основанный на выведенных нами нелинейных дифференциальных уравнениях первого, второго и третьего порядков для плотностей нормального распределения и плотности Коши. В качестве следствия из положительной определенности информационной матрицы Фишера, можно получить неравенства, которым заведомо удовлетворяют решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с неотрицательным начальным условием и решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с неотрицательным краевым значением для случая уравнения Лапласа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 548 с.

2. Prokopenko, M., Lizier, Joseph T., Lizier, J. T., Obst, O., Wang, X. R. Relating Fisher information to order parameters // Physical Review E. American Physical Society. 2011. 84 (4), С. 1–11.
3. Норден А. П. Пространства аффинной связности. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 432 с.
4. Lang S. Introduction to differentiable manifolds. 2nd.ed. Springer-Verlag New York, Inc., 2002. 250 p.
5. Dodson, C. T. J.; Poston, T. Tensor geometry, Graduate Texts in Mathematics (2nd ed.), Berlin, New York. Springer-Verlag. 1991. 447 p.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
7. Hazewinkel, Michiel. Levi-Civita connection, Encyclopedia of Mathematics. Springer, 2001.
8. Sternberg, S. Lectures on differential geometry. New York: Chelsea. 1983. 137 p.
9. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 664 с.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1984, 528 с.
11. Evans, L. C. Partial Differential Equations, American Mathematical Society. 1998. 749 p.
12. Тихонов А. Н, Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.
13. N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions, Volume 1. New York, Wiley. 1994. 784 p.
14. Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов. М.: Наука. 1996. 400 с.
15. Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. Conduction of Heat in Solids (2nd ed.), Oxford University Press. 1959. 510 p.
16. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 686 с.
17. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 576 с.

18. Королук В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука. 1985. 640 с.
19. Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука. 1972. 520 с.
20. Amari S. I. Differential-Geometrical Methods in Statistics. Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag. 1985. vol. 28. 127 p.
21. McCullagh P. "Tensor Methods in Statistics", Chapman Hall/CRC Monographs on Statistics Applied Probability. 1987. 280 p.
22. Степанов С. Е., Шандра И. Г., Степанова Е. С. Сопряженные связности на статистических многообразиях // Известия вузов. Математика. 2007. №11. С. 90–98
23. Pratt, J. W. Edgeworth F. , Fisher R. on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation, The Annals of Statistics. 1976. 4(3): pp. 501–514.

REFERENCES

1. Rao C. R. 2002, "Linear Statistical Inference and its Applications", (2nd ed.), Wiley. 656 p.
2. Prokopenko, M., Lizier, Joseph T., Lizier, J. T., Obst, O. & Wang, X. R. 2011, "Relating Fisher information to order parameters", *Physical Review E*. vol. 84(4), pp. 1–11.
3. Norden A. P. 1976, Prosttranstva affinnoj svjaznosti [Spaces with affine connection], (2nd ed.). M, Nauka. 432 p.
4. Lang S. 2002, "Introduction to differentiable manifolds". (2nd. edition) *Springer-Verlag*. 250 p.
5. Dodson, C. T. J. & Poston, T. 1991, "Tensor geometry, Graduate Texts in Mathematics"(2nd ed.), Berlin, New York: *Springer-Verlag*. 447 p.
6. Dubrovin B. A., Fomenko A. T. & Novikov S. P. 1984, "Modern Geometry. Methods and Applications", *Springer-Verlag*.
7. Hazewinkel, Michiel 2001, "Levi-Civita connection", *Encyclopedia of Mathematics*, Springer.
8. Sternberg, Shlomo 1983, "Lectures on differential geometry", New York. Chelsea. 137 p.

9. Rashevskii P. K. 1967, *Rimanova geometrija i tenzornyj analiz*, [Riemannian geometry and tensor analysis], (3rd Edition). *M, Nauka*. 664 p.
10. Feller W. 1966, "An introduction to probability theory and its applications", *Wiley.*, vol. 2, 528 p.
11. Evans, L. C. 1998, "Partial Differential Equations", *American Mathematical Society*. 749 p.
12. Tichonov A. N. and Samarskii A. A. 1963, "Equations of mathematical physics", *Pergamon Press*. 480 p.
13. Johnson N. L., S. Kotz, and N. Balakrishnan 1994. "Continuous Univariate Distributions", *New York: Wiley.*, vol. 1, 784 p.
14. Ventsel A. 1996, "Теория случайных процессов". [Theory of random processes], *M. : Nauka*. 400 p.
15. Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C. 1959, "Conduction of Heat in Solids"(2nd edition), *Oxford University Press*. 510 p.
16. Vladimirov V. S. 1971, "Equations of Mathematical Physics", *M. Dekker*. 640 p.
17. Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. 2003, "Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations", (2nd edition), *Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton*. 1543 p.
18. Korolyuk V. S. , Portenko N. I. , Skorokhod A. V. & Turbin, A. F. 1985, "Справочник по теории вероятностей и математической статистике". [Handbook on probability theory and mathematical statistics]. *M. : Nauka*.
19. Chentsov N. N. 1972, "Статистические решающие правила и оптимальные выводы". [Statistical decisive rules and optimum conclusions], *M.: Nauka*.
20. Amari S. I. 1985, "Differential-Geometrical Methods in Statistics. Lecture Notes in Statistics", *Springer-Verlag*, vol. 28, 127 p.
21. McCullagh P. 1987, "Tensor Methods in Statistics", *Chapman Hall/CRC Monographs on Statistics Applied Probability*. 280 p.
22. Stepanov S. E., Shandra I. G. & Stepanova E. S. 2007, "Conjugate connectivities on statistical manifolds", *Izv. Mathematics*, no. 11, pp. 90–98.
23. Pratt, J. W. 1976, "F. Y. Edgeworth and R. A. Fisher on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation", *The Annals of Statistics* vol. 4(3), pp. 501–514.

Московский педагогический государственный университет.

Пензенский государственный университет.

Поступило 9.11.2015.