ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-139-168

Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана; Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com
Рахмонов Фируз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Аннотация

При $n \geqslant 3$ получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде суммы $r = 2^n + 1$ слагаемых, каждое из которых является n-ой степенью натуральных чисел x_i, $i = \overline{1, r}$, удовлетворяющих условиям

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \qquad \theta(n,r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа и $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$. Этот результат является усилением теоремы Е. М. Райта.

Ключевые слова: проблема Варинга, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля, малая окрестность центров больших дуг.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 139–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 511. 344 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-139-168

Asymptotic formula in the Waring's problem with almost proportional summands

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the NAS of Tajikistan; A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru, zarullo.rakhmonov@gmail.com
Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

For $n \geq 3$, an asymptotic formula is derived for the number of representations of a sufficiently large natural number N as a sum of $r = 2^n + 1$ summands, each of which is an n-th power of natural numbers x_i, $i = \overline{1, r}$, satisfying the conditions

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \qquad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)},$$

where $\mu_1, \ldots, \mu_r$ are positive fixed numbers, and $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$. This result strengthens the theorem of E.M. Wright.

Keywords: Waring problem, almost proportional summands, short exponential sum of G. Weyl, small neighborhood of centers of major arcs.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, 2024. “Asymptotic formula in the Waring’s problem with almost proportional summands” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 139–168.

1. Введение

Проблему Варинга с почти пропорциональными слагаемыми впервые исследовал М. Е. Райт [1, 2]. Для количества представлений достаточно большого числа N в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant N^{1-\theta}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, а число $\theta = \theta(n, r)$ определяется из соотношения

$$\theta(n, r) = \frac{1}{n} \min\left(\frac{(r-2^n)(2^{n-1}+1)}{(nr+n-2^n-3)2^{n-1}+r}, \frac{r-(n-2)2^{n-1}-4}{r+2^{n-1}-4}, \frac{r-2^{n-1}}{nr-2^{n-1}+n-1}\right), \tag{2}$$

он нашёл асимптотическую формулу при

$$r \geqslant r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5. \tag{3}$$

Отсюда, в частности для $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ при $r = (n-2)2^{n-1} + 5$, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(n) = (n-2)2^{n-1} + 5$	9	21	53	133	325	773	1797	4101
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{325}$	$\frac{1}{966}$	$\frac{1}{2695}$	$\frac{1}{6279}$	$\frac{1}{18441}$	$\frac{1}{46090}$

Таблица 1

В 2010 г. Дерк Деймон [3] пользуясь теоремой о среднем И. М. Виноградова и процедурой «биномиального спуска», при $r \geqslant r_n$, где

$$r_2 = 9, \quad r_3 = 19, \quad r_4 = 49, \quad r_5 = 113, \quad r_6 = 243, \quad r_7 = 417, \quad r_8 = 675, \quad r_9 = 1083,$$
$$r_{10} = 1773, \qquad r_n = 2\left[\frac{5n^2}{3}\ln n + \frac{29n^2}{30}\ln\ln n + \frac{7n^2}{3}\ln\ln\ln n + Cn^2\right] + 1, \qquad n > 10, \tag{4}$$

C — абсолютная постоянная, доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1), при выполнении условий

$$X-Y\leqslant x_j\leqslant X+Y,\quad 1\leqslant j\leqslant r,\quad X=\left[\left(\frac{N}{r}\right)^{\frac{1}{n}}\right],\quad Y=\sqrt{X}Y_n,\quad Y_n=(\ln X)^{r_{n-1}},$$

где Y_2 – функция от X, стремящаяся к бесконечности вместе с X, (см. также [4, 5]).

Заметим, что теорема М. Райта об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми при $\mu_1=\ldots=\mu_r=\frac{1}{r}$, то есть при

$$\sqrt[n]{\frac{N}{r}-N^{1-\theta}}\leqslant x_j\leqslant\sqrt[n]{\frac{N}{r}+N^{1-\theta}}.$$

превращается в теорему об асимптотической формуле в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми с параметрами $\theta=\theta(n,r)$ и $r=r(n)$, которые определяются в формулах (2) и (3). Эта асимптотическая формула в сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

Воспользовавшись поведением коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x}e(\alpha m^n),$$

в больших дугах [6, 7] в сочетании с нетривиальными оценками этих сумм в малых дугах [8], были доказаны асимптотические формулы для количества решений в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Варинга с почти равными слагаемыми для $n=3,4,5$ [9, 10, 11, 7], то есть для количества решений диофантова уравнения (5) с условиями

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right|\leqslant H,\qquad i=1,\ldots,2^n+1,\qquad H\geqslant N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon},$$

  при

$$\theta(3)=\frac{1}{30},\qquad\theta(4)=\frac{1}{108},\qquad\theta(5)=\frac{1}{340}.$$

- в обобщении [12, 6, 13] тернарной проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми о представлении достаточно большого натурального числа в виде

$$p_1+p_2+m^n=N,$$

  при $n=2,3,4$, в простых числах p_1, p_2 и натурального m, с условиями

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\quad i=1,2,\qquad\left|m^n-\frac{N}{3}\right|\leqslant H,\qquad H\geqslant N^{1-\theta(n)}\mathscr{L}^{c_n},$$

  соответственно при

$$\theta(2)=\frac{1}{4},\quad c_2=2;\qquad\theta(3)=\frac{1}{6},\quad c_3=3;\qquad\theta(4)=\frac{1}{12},\quad c_4=\frac{40}{3}.$$

В этой работе доказано, что теорема Е. М. Райта об асимптотической формуле в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми имеет место при условии

$$\theta(n,r)=\frac{2}{(r+1)(n^2-n)},\qquad r=2^n+1. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_r = 1,$$

$J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|x_i^n - \mu_i N| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, r \qquad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}. \tag{6}$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r \gamma(n,r)}{n^r} \prod_{i=1}^{r} \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}}\right),$$

где $\gamma(n, r)$ — абсолютная постоянная, которая определяется соотношением

$$\gamma(n, r) = \frac{r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \ldots}{2^r (r-1)!},$$

$\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное, а постоянное под знаком O зависит от чисел $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

Отсюда, в частности, имеем

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$r = 2^n + 1$	9	17	33	64	129	257	513	1025
$\theta(n, r)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{340}$	$\frac{1}{990}$	$\frac{1}{2730}$	$\frac{1}{7224}$	$\frac{1}{18504}$	$\frac{1}{46170}$

Таблица 2

Из теоремы 1 следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти равными слагаемыми.

Следствие 1. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geqslant 3$ — натуральное число, $r = 2^n + 1$, $J_{n,r}(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями*

$$\left|x_i^n - \frac{N}{r}\right| \leqslant H, \qquad i = 1, \ldots, r \qquad \theta(n, r) = \frac{2}{(r+1)(n^2-n)}.$$

Тогда при $H \geqslant N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{2^r r^{r-\frac{r}{n}} \gamma(n,r)}{n^r} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}}\right).$$

Заметим, что теорема 1 является усилением теоремы Е. М. Райта, а из формулы (4) и таблицы 2 следует также, что следствие 1 сильнее теоремы Дерка Деймона в смысле количества слагаемых при $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова и при $n = 3$ ранее был доказан в работе [14]. Основными утверждениями, позволившими получить новые значения (5) для параметров $\theta(n, r)$ и r, являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2 теоремы 2);

- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha;x,y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 3 теоремы 2);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha;x,y)$ в малых дугах (лемма 1);
- теорема 3 о среднем значении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha;x,y)$.

Р. Вон [15] изучая суммы Г.Вейля вида $T(\alpha,x)$ в больших дугах, воспользовавшись оценкой Хуа Ло-кена для полных тригонометрических сумм вида

$$S_b(a,q)=\sum_{k=1}^{q}e\left(\frac{ak^n+bk}{q}\right),\qquad S(a,q)=S_0(a,q),$$

(лемма 3), методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha,x)=\sum_{m\leqslant x}e(\alpha m^n)=\frac{S(a,q)}{q}\int_0^x e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\left(1+x^n|\lambda|\right)^{\frac12}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть при выполнении условия

$$|\lambda|\le\frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha,x)=\frac{x\ S(a,q)}{q}\int_0^1 e\left(\lambda t^n\right)dt+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right).\tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, тогда при $\{n|\lambda|x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha;x,y)=\frac{S(a,q)}{q}T(\lambda;x,y)+O\left(q^{\frac12+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n|\lambda|x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha,x,y)|\ll q^{1-\frac1n}\ln q+\min(yq^{-\frac1n},\lambda^{-\frac12}x^{1-\frac{n}{2}}q^{-\frac1n}).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda|\leqslant\frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha;x,y)=\frac{y}{q}S(a,q)\gamma(\lambda;x,y)+O(q^{\frac12+\varepsilon}),$$
$$\gamma(\lambda;x,y)=\int_{-0,5}^{0,5}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}+yt\right)^n\right)dt.$$

Следствие 3. *Пусть $\tau\ge 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}}<|\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha;x,y)\ll q^{1-\frac1n}\ln q+\min\left(yq^{-\frac1n},x^{\frac12}q^{\frac12-\frac1n}\right).$$

Следствие 2 является обобщением формулы (7) для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha;x,y)$. Частный случай теоремы 2 при $n=3$ ранее был доказан в [6] и является уточнением теоремы 1 работы [7]. Доказательство теоремы 2 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Ван дер Корпута с применением формулы суммирования Пуассона [16] и оценки Хуа Ло-кена для полных тригонометрических сумм $S_b(a,q)$ (лемма 3).

Теорема 3. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leqslant x(\ln x)^{-1}$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} \, d\alpha \ll y^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Эта теорема является обобщением теоремы Хуа Ло-кена ([17], лемма 2.5) о среднем значении тригонометрической суммы $T(\alpha, x)$, то есть оценки

$$\int_0^1 |T(\alpha, x)|^{2^k} \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Обозначения. $N > N_0$ – натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathscr{L} = \ln N$.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. [8]. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, $\tau(h)$ — функция делителей, α – вещественное число,*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1,$$

тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \leqslant 2y \left(4n! \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^n} \right) \max_{h < y^{n-1}} \tau(h) \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}},$$

Эта оценка нетривиальна при $q \gg 2^{2n-1} 4n! \tau(y^{n-1})$, то есть при $q \gg y^{\varepsilon}$.

Лемма 2. [16]. *Пусть $f(u)$ — действительная функция, $f''(u) > 0$ в интервале $[a, b]$, α, β, η произвольные числа с условиями $\alpha \leqslant f'(a) \leqslant f'(b) \leqslant \beta$ и $0 < \eta < 1$. Тогда*

$$\sum_{a < n \leqslant b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \eta < h \leqslant \beta + \eta} \int_a^b e(f(u) - hu) du + O(\eta^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)),$$

где постоянная в знаке O является абсолютной.

Лемма 3. [18]. *Пусть $(a, q) = 1$, q — натуральное число, b – произвольное целое число, δ — произвольное положительное число, не превосходящее* 0.00001. *Тогда имеем*

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n + bk}{q} \right) \ll q^{\frac{1}{2} + \delta} (b, q).$$

Лемма 4. [19]. *Пусть действительная функция $f(u)$, и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geqslant m_1 > 0$ и $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m_1}.$$

Лемма 5. [19]. *Пусть $(a, q) = 1$, q — натуральное число. Тогда имеем*

$$S(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e\left(\frac{ak^n}{q} \right) \ll q^{1 - \frac{1}{n}},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n.

Лемма 6. [19]. *Пусть при $a \leqslant u \leqslant b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n – го порядка ($n > 1$), причём при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \leqslant |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_a^b e(f(u))du \leqslant \min(b-a, 6nA^{-\frac{1}{n}}).$$

Лемма 7. . ([20] стр. 174). *При $m > 0$ и натуральном r имеет место формула*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^r mt}{t^r}dt = \frac{\pi m^{m-1}}{2^r(r-1)!}\left(r^{r-1} - \frac{r}{1!}(r-2)^{r-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1} - \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1} + \ldots\right).$$

3. Доказательство теоремы 2 о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля в больших дугах

Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e\left(\frac{ak^n}{q} + \lambda m^n\right) \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv m \bmod q}}^{q-1} 1 = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q), \tag{8}$$

где

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e\left(\lambda m^n - \frac{bm}{q}\right), \quad T(\lambda; x, y) = T_0(\lambda; x, y).$$

Далее не ограничивая общности будем читать, что $\lambda \geqslant 0$. Случай $\lambda \leqslant 0$, сводится к случаю $\lambda \geqslant 0$, если формуле (8) придадим форму

$$\overline{T(\alpha; x, y)} = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_{q-b}(-\lambda; x, y) S_{q-b}(q-a, q) = \frac{1}{q}\sum_{b=0}^{q-1} T_b(-\lambda; x, y) S_b(q-a, q).$$

Имея в виду, что $n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda; x, y)$ в виде

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e\left(f_b(m)\right),$$
$$f_b(m) = \lambda m^n - (n\lambda x^{n-1} - \{n\lambda x^{n-1}\})m - \frac{bm}{q}.$$

Находим производную первого и второго порядка функции $f_b(m)$:

$$f_b'(m) = n\lambda(m^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q}, \qquad f_b''(m) = n(n-1)\lambda m^{n-2} \geqslant 0.$$

Следовательно функция $f_b'(m)$, $m \in (x-y, x]$ является неубывающей, поэтому при любом b, $b = 0, 1, \ldots, q-1$ имеет место неравенство

$$f_b'(x-y) < f_b'(m) \leqslant f_b'(x). \tag{9}$$

Оценивая $f'_b(x)$ сверху, имеем:

$$f'_b(x) = \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} < 1 - \frac{b}{q}. \tag{10}$$

Для оценки снизу $f'_b(x-y)$ воспользовавшись неравенством

$$W = \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^k \geqslant 0, \quad n \geqslant 3, \quad 3x \geqslant (n-3)y, \tag{11}$$

а также условиями $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$ и $\tau \geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$, имеем

$$\begin{aligned}
f'_b(x-y) &= -n\lambda\left(x^{n-1} - (x-y)^{n-1}\right) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} = \\
&= -n(n-1)\lambda x^{n-2}y + n\lambda W + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} \geqslant \\
&\geqslant -n(n-1)\lambda x^{n-2}y - \frac{b}{q} \geqslant -\frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} - \frac{b}{q} \geqslant -1 + \frac{1}{2q}.
\end{aligned}$$

Отсюда, из (10) и (9), получим

$$-1 + \frac{1}{2q} < f'_b(m) < 1 - \frac{1}{q}.$$

С учётом этого неравенства, применяя к сумме $T_b(\lambda; x, y)$ формулу суммирования Пуассона (лемма 2), при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\eta = 0,5$, получим

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{h=-1}^{1} I_b(h) + O(1), \tag{12}$$

$$I_b(h) = \int_{x-y}^{x} e(f_b(u,h))du, \quad f_b(u,h) = f_b(u) - hu.$$

Функция

$$f'_b(u,h) = n\lambda(u^{n-1} - x^{n-1}) + \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h$$

на отрезке $u \in [x-y, x]$ является неубывающей функцией, поэтому имеет место неравенство

$$f'_b(x-y,h) \leqslant f'_b(u,h) \leqslant f'_b(x,h).$$

Воспользовавшись формулой (11), а также условиями $|\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$ и $\tau \geqslant 2n(n-1)x^{n-2}y$, эту неравенство представим в виде

$$\{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f'_b(u,h) \leqslant \{n\lambda x^{n-1}\} - \frac{b}{q} - h, \tag{13}$$

$$\eta = n(n-1)\lambda x^{n-2}y - n\lambda W \leqslant n(n-1)\lambda x^{n-2}y \leqslant \frac{n(n-1)x^{n-2}y}{q\tau} \leqslant \frac{1}{2q}.$$

Далее, подставляя (12) при $b \neq 0$ в (8), найдём

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S_0(a,q)}{q} T_0(\lambda; x, y) + \sum_{h=-1}^{1} \mathcal{T}(h) + \mathcal{R}, \tag{14}$$

$$\mathcal{T}(h) = \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} I_b(h) S_b(a,q), \qquad \mathcal{R} \ll \frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a,q)|.$$

Пользуясь леммой 3 при $\delta=0,5\varepsilon$ оценим остаточный член $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}\leqslant\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}|S_b(a,q)|\ll q^{-\frac{1}{2}+\delta}\sum_{b=1}^{q-1}(b,q)=q^{-\frac{1}{2}+\delta}\sum_{d|q}d\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant q-1\\(b,q)=d}}1=$$

$$=q^{-\frac{1}{2}+\delta}\sum_{d|q}d\varphi\left(\frac{q}{d}\right)\leqslant q^{\frac{1}{2}+\delta}\tau(q)\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (15)$$

Оценим сверху суммы $\mathcal{T}(1)$ и $\mathcal{T}(-1)$. Полагая $h=1$ в (13), получим

$$f_b'(u,1)\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}-1\leqslant-\frac{b}{q}<0,$$

и оценивая интеграл $|I_b(1)|$ по величине первой производной (лемма 4), имеем

$$|I_b(1)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_b(u,1))du\right|\ll\frac{q}{b}.$$

Воспользовавшись этой оценкой, а затем леммой 3 при $\delta=0,5\varepsilon$, имеем

$$\mathcal{T}(1)=\frac{1}{q}\sum_{b=1}^{q-1}I_b(1)S_b(a,q)\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\delta}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (16)$$

Полагая $h=-1$ в (13), имеем

$$f_b'(u,-1)>\{n\lambda x^{n-1}\}+\frac{q-b}{q}-\eta\geqslant\frac{q-b}{2q}.$$

Интеграл $I(-1,b)$ также оценим по величине первой производной (лемма 4). Имеем

$$|I_b(-1)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_b(u,-1))du\right|\ll\frac{q}{q-b}.$$

Отсюда, поступая аналогично случаю оценки $\mathcal{T}(1)$, получим

$$\mathcal{T}(-1)=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I_b(-1)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{q-b}\ll q^{\frac{1}{2}+\delta}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (17)$$

Подставляя оценки $\mathcal{T}(1)$, $\mathcal{T}(-1)$ и $\mathcal{R}$ соответственно из (16), (17) и (15) в правую часть (14), получим

$$T(\alpha;x,y)=\frac{S_0(a,q)}{q}T_0(\lambda;x,y)+\mathcal{T}(0)+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (18)$$

Теперь воспользовавшись этим соотношением отдельно докажем первую и вторую утверждения теоремы, то есть соответственно в случаях $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$ и $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$.

1. Случай $\{n\lambda x^{n-1}\}\leqslant\frac{1}{2q}$. Оценим $\mathcal{T}(0)$. Для этого, полагая $h=0$ в (13), имеем

$$f_b'(u,0)\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}\leqslant\frac{1-2b}{2q}\leqslant-\frac{b}{2q}<0.$$

Пользуясь этим неравенством, оценивая интеграл $I_b(0)$ по величине первой производной (лемма 4), найдём

$$|I_b(0)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_b(u,0))du\right|\ll\frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично случаю оценки $\mathcal{T}(1)$, получим

$$\mathcal{T}(0)=\sum_{b=1}^{q-1}\frac{I_b(0)S_b(a,q)}{q}\ll\sum_{b=1}^{q-1}\frac{|S_b(a,q)|}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\delta}\sum_{b=1}^{q-1}\frac{(b,q)}{b}\ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (18), а также имея в виду что

$$S_0(a,q)=S(a,q)\qquad T(\lambda;x,y)=T_0(\lambda;x,y),$$

получим первое утверждение теоремы.

2. Случай $\{n\lambda x^{n-1}\}>\frac{1}{2q}$. Применяя к сумме $T_0(\lambda;x,y)$ в соотношении (18) формулу (12), а затем переходя к оценкам и воспользовавшись оценкой $S_b(a,q)\ll q^{1-\frac{1}{n}}$(лемма 5), находим

$$\begin{aligned}T(\alpha;x,y)&=\frac{S_0(a,q)}{q}\left(\sum_{h=-1}^{1}I_0(h)+O(1)\right)+\mathcal{T}(0)+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=\\&=\frac{S_0(a,q)}{q}\left(I_0(-1)+I_0(1)\right)+\sum_{b=0}^{q-1}\frac{I_b(0)S_b(a,q)}{q}+O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\ll\\&\ll q^{-\frac{1}{n}}\left(I_0(-1)+I_0(1)+\mathcal{R}(0)\right)+q^{\frac{1}{2}+\varepsilon},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\mathcal{R}(0)=\sum_{b=0}^{q-1}I_b(0).\tag{20}$$

В соотношении (13) полагая $b=0$ и $h=-1$, имеем

$$f_0'(u,-1)>\{n\lambda x^{n-1}\}+1-\eta\geqslant 1-\frac{1}{2q}\geqslant\frac{1}{2},$$

и воспользовавшись этим неравенством, оценивая интеграл $I_0(-1)$ по величине первой производной (лемма 4), найдём

$$|I_0(-1)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_0(u,-1))du\right|\ll 1.\tag{21}$$

Интеграл $I_0(1)$ оценим по величине производного второго порядка (лемма 6). Для этого пользуясь неравенством $f_0''(u,1)\geqslant n(n-1)\lambda(x-y)^{n-2}\gg\lambda x^{n-2}$, найдём

$$|I_0(1)|=\left|\int_{x-y}^{x}e(f_0(u,1))du\right|\ll\min\left(y,\lambda^{-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{n}{2}}\right).\tag{22}$$

Оценим теперь сумму $\mathcal{R}(0)$. Определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q}\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}<\frac{r+1}{2q},\qquad 1\leqslant r\leqslant 2q-1.$$

Отсюда, из неравенства (13) при $h=0$ и условия $\eta\leqslant\frac{1}{2q}$, найдём

$$f_b'(u,0)>\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}-\eta\geqslant\frac{r-2b-1}{2q},\tag{23}$$

$$f_b'(u,0)\leqslant\{n\lambda x^{n-1}\}-\frac{b}{q}<\frac{r-2b+1}{2q}.\tag{24}$$

Пусть $r = 2\rho$ – чётное $(1 \leqslant \rho \leqslant q-1)$. Отрезок суммирования $0 \leqslant b \leqslant q-1$ в сумме $\mathcal{R}(0)$ разобьём на следующие три множества:

$$0 \leqslant b \leqslant \rho - 1, \qquad b = \rho, \qquad \rho + 1 \leqslant b \leqslant q - 1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (23) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (24) меньше нуля, то есть

$$\begin{aligned} f_b'(u,0) &> \frac{2\rho - 2b - 1}{2q} \geqslant \frac{\rho - b}{2q}, && 0 \leqslant b \leqslant \rho - 1,\\ f_b'(u,0) &< \frac{2\rho - 2b + 1}{2q} \leqslant \frac{\rho - b}{2q}, && \rho + 1 \leqslant b \leqslant q - 1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценивая интеграл $I_b(0)$ по величине первой производной, найдём

$$I_b(0) = \int_{x-y}^{x} e(f_b(u,0))du \ll \frac{q}{|\rho - b|}, \quad b \neq \rho.$$

В случае $b = \rho$, пользуясь соотношением

$$f_\rho''(u,) = n(n-1)\lambda(x-y)^{n-2} \gg \lambda x^{n-2},$$

оценивая интеграл $I_\rho(0)$ по величине производной второго порядка (лемма 6), найдём

$$|I_\rho(0)| \ll \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $I_b(0)$ в (20), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) = \sum_{\substack{b=0\\ b\neq\rho}}^{q-1} I_b(0) + I_\rho(0) &\ll \sum_{\substack{b=0\\ b\neq\rho}}^{q-1} \frac{q}{|\rho - b|} + \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right) \ll \\ &\ll q\ln q + \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $r = 2\rho + 1$ – нечётное $(0 \leqslant \rho \leqslant q-1)$. Отрезок суммирования $0 \leqslant b \leqslant q-1$ в сумме R_0 разобьём на следующие три множества:

$$0 \leqslant b \leqslant \rho - 1, \qquad b = \rho,\ \rho + 1, \qquad \rho + 2 \leqslant b \leqslant q - 1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (23) больше нуля, а в третьем — правая часть неравенства (24) меньше нуля, то есть

$$\begin{aligned} f_b'(u,0) &> \frac{2\rho - 2b - 1}{2q} \geqslant \frac{\rho - b}{2q}, && 0 \leqslant b \leqslant \rho - 1,\\ f_b'(u,0) &< \frac{2\rho + 1 - 2b + 1}{2q} \leqslant \frac{\rho - b}{2q}, && \rho + 2 \leqslant b \leqslant q - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_b(0) = \int_{x-y}^{x} e(f_b(u,0))du \ll \frac{q}{|\rho - b|}, \qquad b \neq \rho - 1, \quad b \neq \rho.$$

В случае $b = \rho - 1$ или $b = \rho$, поступая аналогично предыдущей оценке $I_\rho(0)$, найдём

$$|I_b(0)| \ll \min\left(y, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $I_b(0)$ в (20), получим

$$\mathcal{R}(0)=\sum_{\substack{b=0\\ b\neq\rho-1,\,\rho}}^{q-1} I_b(0)+I_{\rho-1}(0)+I_\rho(0)\ll\sum_{\substack{b=0\\ b\neq\rho-1,\,\rho}}^{q-1}\frac{q}{|\rho-b|}+\min\left(y,\lambda^{-\frac12}x^{1-\frac{n}{2}}\right)\ll$$
$$\ll q\ln q+\min\left(y,\lambda^{-\frac12}x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Подставляя оценки для $I_0(-1)$ и $I_0(1)$ соответственно из формул (21) и (22) и оценку для $\mathcal{R}(0)$, в (19), получим второе утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 3 о среднем значении короткой тригонометрической суммы $T(\alpha;x,y)$

Лемма 8. *Пусть Δ_k означает k-ое применение разностного оператора, так что для любой функции действительного переменного $f(u)$*

$$\begin{aligned}&\Delta_1(f(u);h)=f(u+h)-f(u),\\ &\Delta_{k+1}(f(u);h_1,\ldots,h_{k+1})=\Delta_1(\Delta_k(f(u);h_1,\ldots,t_k);h_{k+1}).\end{aligned}\tag{25}$$

Тогда при $k=1,\ldots,n-1$ имеет место соотношение

$$\Delta_k(u^n;h_1,\ldots,h_k)=h_1\ldots h_k g_k(u;h_1,\ldots,h_k),$$

где $g_k=g_k(u;h_1,\ldots,h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(u;h_1,\ldots,h_k)=\frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k}+\ldots.$$

Доказательство. Применяя формулу (25), найдём

$$\Delta_1(u^n;h_1)=(u+h_1)^n-u^n=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1},$$

$$\Delta_2(u^n;h_1,h_2)=\Delta_1\left(\Delta_1(u^n;h_1);h_2\right)=\Delta_1\left(\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1};h_2\right)=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}(u+h_2)^{n-i_1}-\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}u^{n-i_1}=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}\sum_{i_2=1}^{n-i_1}C_{n-i_1}^{i_2}h_2^{i_2}u^{n-i_1-i_2}.$$

Последовательно применяя формулу (25), легко можно показать, при $k=1,2,\ldots,n-1$, что имеет место

$$\Delta_k(u^n;h_1,\ldots,h_k)=\sum_{i_1=1}^{n}C_n^{i_1}h_1^{i_1}\ldots\sum_{i_k=1}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}C_{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}^{i_k}h_k^{i_k}u^{n-i_1-\ldots-i_k}.$$

Из этой формулы следует, что имеет место формула

$$\Delta_k(u^n;h_1,\ldots,h_k)=h_1\ldots h_k g_k(u;h_1,\ldots,h_k),$$

где $g_k=g_k(u;h_1,\ldots,h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(u;h_1,\ldots,h_k)=\frac{n!}{(n-k)!}u^{n-k}+\ldots.$$

Лемма 9. *Пусть $f = f(m)$ – многочлен степени n, x и y — целые положительные числа, $y < x$,*

$$\mathbb{T}(f;x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x} e(f(m)),$$

тогда при $k=1,\ldots,n-1$ имеет место

$$|\mathbb{T}(f;x,y)|^{2^k}\le(2y)^{2^k-k-1}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\mathbb{T}_k,$$

$$\mathbb{T}_k=\left|\sum_{m\in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)} e(\Delta_k(f(m);h_1,\ldots,h_k))\right|,$$

где интервалы $I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)$ определяются соотношениями:

$$I_1(x,y;h_1)=(x-y,x]\cap(x-y-h_1,x-h_1],$$
$$I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)=I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})\cap I_{k-1}(x-h_k,y;h_1,\ldots,h_{k-1}).$$

т.е. интервал $I_{k-1}(x-h_k,y;h_1,\ldots,h_{k-1})$ получается из $I_{k-1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k-1})$ сдвигом на $-h_k$ всех интервалов, пересечением которых он является.

Доказательство. Доказательство проводим методом математической индукции по k. При $k=1$ имеем

$$|\mathbb{T}(f;x,y)|^2=\sum_{x-y<m\leqslant x}\sum_{x-y-m<h\leqslant x-m} e(f(m+h)-f(m))=$$
$$=\sum_{|h|<y}\sum_{m\in I_1(x,y;h_1)} e(\Delta_1(f(m);h))\leqslant\sum_{|h|<y}\mathbb{T}_1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется при k, $1\leqslant k\leqslant n-2$, то есть

$$|\mathbb{T}(f(m);x,y)|^{2^k}\le(2y)^{2^k-k-1}\sum_{|h_1|<y}\sum_{|h_2|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\mathbb{T}_k.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, затем последовательно применяя к суммам по $h_1,\ldots,h_k$ неравенство Коши, найдём

$$|\mathbb{T}(f(m);x,y)|^{2^{k+1}}\leqslant(2y)^{2^{k+1}-(k+1)-1}\sum_{|h_1|<y}\ldots\sum_{|h_k|<y}\mathbb{T}_k^2. \tag{26}$$

Из эквивалентности соотношений $m_1\in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)$ и $m_1-m\in I_k(x-m,y;h_1,\ldots,h_k)$, имеем

$$\mathbb{T}_k^2=\sum_{\substack{m\in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)\\ m_1-m\in I_k(x-m,y;h_1,\ldots,h_k)}} e(\Delta_k(f(m_1);h_1,\ldots,h_k)-\Delta_k(f(m);h_1,\ldots,h_k)).$$

Обозначая разность m_1-m через h_{k+1}, затем сделав сумму по h_{k+1} внешней, воспользовавшись эквивалентностью соотношений $h_{k+1}\in I_k(x-m,y;h_1,\ldots,h_k)$ и $m\in I_k(x-h_{k+1},y;h_1,\ldots,h_k)$ и соотношением (25), имеем

$$\mathbb{T}_k^2=\sum_{|h_{k+1}|<y}\sum_{\substack{m\in I_k(x,y;h_1,\ldots,h_k)\\ m\in I_k(x-h_{k+1},y;h_1,\ldots,h_k)}} e(\Delta_{k+1}(f(m);h_1,\ldots,h_{k+1}))=$$
$$=\sum_{|h_{k+1}|<y}\sum_{m\in I_{k+1}(x,y;h_1,\ldots,h_{k+1})} e(\Delta_{k+1}(f(m);h_1,\ldots,h_{k+1}))\leqslant\sum_{|h_{k+1}|<y}\mathbb{T}_{k+1}.$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (26), получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся методом математической индукции по k. При $k=1$ воспользовавшись тем, что при $x-y<m_1,m_2\leqslant x$ диофантовы уравнения $m_1^n=m_2^n$ и $m_1=m_2$ эквивалентны, имеем

$$\int_0^1 |T(\alpha;x,y)|^2 d\alpha = \sum_{x-y<m_1,m_2\leqslant x}\int_0^1 e(\alpha(m_1^n-m_2^n))d\alpha = \sum_{x-y<m_1\leqslant x} 1 \ll y.$$

Пусть теперь утверждение теоремы имеет место при $2\leqslant k\leqslant n-1$, то есть

$$\int_0^1 |T(\alpha;x,y)|^{2^k} d\alpha \leqslant y^{2k-k+\varepsilon}. \tag{27}$$

В лемме 9, полагая $f(m)=\alpha m^n$, имеем

$$|T(\alpha;x,y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k-k-1}\sum_{|h_1|<y}\dots\sum_{|h_k|<y}\left|\sum_{m\in I_k} e\left(\alpha\Delta_k(m^n;h_1,\dots,h_k)\right)\right|.$$

Воспользовавшись леммой 8, находим

$$\Delta_k(m^n;h_1,\dots,h_k)=h_1\dots h_k g_k(m;h_1,\dots,h_k),$$

где $g_k=g_k(m;h_1,\dots,h_k)$ является формой $n-k$-го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно m степень $n-k$ и старший коэффициент $n(n-1)\dots(n-k+1)$, то есть

$$g_k(m;h_1,\dots,h_k)=\frac{n!}{(n-k)!}m^{n-k}+\dots.$$

Отсюда и из условий $x-y<m\leqslant x$, $|h_i|<y$, $i=1,\dots,k$, $\sqrt{x}<y\leqslant x(\ln x)^{-1}$ следует, что существует x_0, такое что при $x>x_0$, выполняется неравенство

$$g_k(m;h_1,\dots,h_k)>0. \tag{28}$$

Обозначая через $r(h)$ — число решений диофантова уравнения

$$h_1\dots h_k g_k(m;h_1,\dots,h_k)=h,$$

относительно переменных m и $h_1\dots h_k$, $|h_i|<y$, $m\in I_k$, найдём

$$|T(\alpha;x,y)|^{2^k} \leq (2y)^{2^k-k-1}\sum_h r(h)e(\alpha h), \tag{29}$$

Заметим, что, если $h\neq 0$, то $r(h)\ll \tau_{k+1}(h)\ll h^{\varepsilon}$. Из неравенства (28) следует, что уравнение

$$h_1\dots h_k g_k(m;h_1,\dots,h_k)=0$$

имеет только решение вида $(0,h_2,\dots,h_k,m)$, $(h_1,0,h_3,\dots,h_k,m)$, $\dots$,
$(h_1,\dots,h_{k-1},0,m)$, для количества которых справедлива оценка

$$r(0)\leqslant k\sum_{|h_2|<y}\dots\sum_{|h_k|<y}\sum_{m\in I_3} 1\leqslant k(2y)^{k-1}|I_k|\leqslant k2^{k-1}y^k.$$

С другой стороны,

$$|T(\alpha;x,y)|^{2^k}=\sum_h \rho(h)(-\alpha h), \tag{30}$$

где $\rho(h)$ – число решений уравнения

$$s_1^n + \ldots + s_\nu^n - t_1^n - \ldots - t_\nu^n = h, \qquad x - y < s_1, t_1, \ldots, s_\nu, t_\nu \leqslant x, \qquad \nu = 2^k.$$

В равенстве (30), полагая $\alpha = 0$, находим

$$\sum_h \rho(h) = |T(0; x, y)|^{2^k} \leqslant y^{2^k}. \tag{31}$$

Пользуясь предположением индукции, то есть соотношением (27), имеем

$$\rho(0) = \int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \leqslant y^{2k-k+\varepsilon}.$$

Умножая (29) и (30), интегрируя по α, а затем воспользовавшись значениями $r(0)$, $\rho(0)$, оценкой $r(h) \ll h^\varepsilon$ и соотношением (31), найдём

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^{k+1}} d\alpha \leqslant (2y)^{2^k-k-1} \int_0^1 \sum_h r(h) e(\alpha h) \sum_{h'} \rho(h') e(-\alpha h') d\alpha =$$
$$= (2y)^{2^k-k-1} \left(r(0)\rho(0) + \sum_{h\neq 0} r(h)\rho(h) \right) \leqslant$$
$$\leqslant (2y)^{2^k-k-1} \left(r(0)\rho(0) + \max_{h\neq 0} r(h) \sum_{h\neq 0} \rho(h) \right) \ll$$
$$\ll y^{2^k-k-1} \left(y^k \cdot y^{2k-k+\varepsilon} + y^\varepsilon \cdot y^{2^k} \right) \ll y^{2^{k+1}-k-1+\varepsilon}.$$

5. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}, \qquad \theta(n,r) = \frac{2}{(n^2-n)(r+1)}, \qquad \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_r. \tag{32}$$

Пользуясь обозначениями

$$N_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}}, \qquad H_k = (\mu_k N + H)^{\frac{1}{n}} - (\mu_k N - H)^{\frac{1}{n}},$$
$$\tau = 2(n-1) n N_1^{n-2} H_1, \qquad æ\tau = 1,$$

число решений диофантова уравнения (1) при выполнении условий (6) представим в виде

$$J_{n,r}(N,H) = \int_{-æ}^{1-æ} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{r} \sum_{|m^n - \mu_k N| \leqslant H} e(\alpha m^n) d\alpha =$$
$$= \int_{-æ}^{1-æ} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{r} \left(T(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k \right) d\alpha,$$

где $|\theta_k|$ равен 1, если $N_k - H_k$ — целое число, и 0 в противном случае. Верхняя граница N_k и длина H_k суммы $T(\alpha; N_k, H_k)$ относительно параметров N и H выражаются через следующие асимптотические формулы

$$N_k = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N} \right) \right), \tag{33}$$

$$H_k = \mu_k^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(\left(1 + \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} - \left(1 - \frac{H}{\mu_k N} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{2H}{n \mu_k^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2} \right) \right). \tag{34}$$

При $\nu = 1, 2, \ldots, r$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r$, вводя обозначение

$$\mathscr{D}_\nu = \mathscr{D}(i_1, \ldots, i_\nu) = \{1, 2, \ldots, r\} \setminus \{i_1, \ldots, i_\nu\}$$

и воспользовавшись тождеством

$$\prod_{k=1}^{r} (T(\alpha; N_k, H_k) + \theta_k) = \prod_{k=1}^{r} T(\alpha; N_k, H_k) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \prod_{j=1}^{\nu} T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j}) \prod_{k \in \mathscr{D}_\nu} \theta_k + \prod_{k=1}^{r} \theta_k,$$

представим $J_{n,r}(N, H)$, в виде

$$J_{n,r}(N, H) = \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(-\alpha N) \prod_{k=1}^{r} T(\alpha; N_k, H_k) d\alpha + R_{n,r}(N, H), \tag{35}$$
$$R_{n,r}(N, H) = \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \prod_{k \in \mathscr{D}_\nu} \theta_k \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(-\alpha N) \prod_{j=1}^{\nu} T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j}) d\alpha.$$

В сумме $R_1(N, H)$, переходя к оценкам, и пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел, не превосходит их среднего арифметического, а затем сопоставляя каждой ν число k, которое однозначно определяется соотношением $2^k \leqslant \nu < 2^{k+1}$, помня, что $r - 1 = 2^n$, имеем

$$R_{n,r}(N, H) \leqslant \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \int_0^1 \prod_{j=1}^{\nu} |T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})| d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{r-1} \frac{I(\nu)}{\nu} = I(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{I(\nu)}{\nu} + \frac{I(r-1)}{r-1}, \tag{36}$$
$$I(\nu) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \sum_{j=1}^{\nu} \int_0^1 \left|T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})\right|^\nu d\alpha.$$

При $2 \leqslant \nu \leqslant r - 1$ оценим сверху $I(\nu)$. Пользуясь тривиальной оценкой суммы $|T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})|$ и теоремой 3, имеем

$$I(\nu) \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \sum_{j=1}^{\nu} \max \left|T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})\right|^{\nu - 2^k} \int_0^1 \left|T(\alpha; N_{i_j}, H_{i_j})\right|^{2^k} d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \sum_{j=1}^{\nu} |H_{i_j}|^{\nu - 2^k} \cdot |H_{i_j})|^{2^k - k + \varepsilon} \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\nu \leqslant r} \sum_{j=1}^{\nu} |H_{i_j}|^{\nu - k + \varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (36), и воспользовавшись тривиальной оценкой $J(1)$, а затем пользуясь неравенством $H_k \ll HN^{\frac{1}{n}-1}$, которое следует из (34), найдём

$$\begin{aligned}
R_{n,r}(N,H) \ll & \sum_{1\leqslant i_1\leqslant r} H_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\sum_{j=1}^{\nu}|H_{i_j}|^{\nu-k+\varepsilon}+\\
&+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{r-1}\leqslant r}\sum_{j=1}^{r-1}|H_{i_j}|^{r-1-n+\varepsilon} \ll rHN^{\frac{1}{n}-1}+\\
&+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} C_r^\nu \nu\left(HN^{\frac{1}{n}-1}\right)^{\nu-k+\varepsilon}+C_r^{r-1}(r-1)\left(HN^{\frac{1}{n}-1}\right)^{r-1-n+\varepsilon}\ll\\
&\ll HN^{\frac{1}{n}-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(HN^{\frac{1}{n}-1}\right)^{2^{k+1}-1-k+\varepsilon}+\left(HN^{\frac{1}{n}-1}\right)^{r-1-n+\varepsilon}\ll\\
&\ll\left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}\right)^{r-1-n+\varepsilon}=\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}}\left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2(n-\varepsilon)}\varepsilon}}{H}\right)^{n-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1-\frac{1}{n^2}+\frac{n-1}{n^2(n-\varepsilon)}\varepsilon \leqslant 1-\theta(n)+0,5\varepsilon,$$

находим

$$R_{n,r}(N,H)) \ll \frac{H^{r-1}\mathscr{L}^{\frac{1}{n}}}{N^{r-\frac{r}{n}}}\left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{n-\varepsilon}N^{-0,5\varepsilon(n-\varepsilon)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}.$$

Отсюда и из (35) имеем

$$J_{n,r}(N,H)=\int_{-æ}^{1-æ} e(-\alpha N)\prod_{k=1}^{r}T(\alpha;N_k,H_k)d\alpha+O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}\right). \tag{37}$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ,\ 1-æ]$ представимо в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \qquad (a,q)=1, \qquad 1\leqslant q\leqslant \tau, \qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}. \tag{38}$$

Легко видеть, что в этом представлении $0\leqslant a\leqslant q-1$, причём $a=0$ лишь при $q=1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α, для которых в представлении (38) выполняется условие $q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}$. Через $\mathfrak{m}$ обозначим оставшиеся α. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{M}_1=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}}\ \bigcup_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1}\mathfrak{M}_1(a,q), \qquad \mathfrak{M}_1(a,q)=\left[\frac{a}{q}-\eta_q\leqslant\alpha\leqslant\frac{a}{q}+\eta_q\right],\\
\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{M}_1, \qquad \eta_q=\frac{1}{2nqN_r^{n-1}}, \qquad \eta=\frac{\mathscr{L}}{2nH_rN_{r-1}}\leqslant\eta_q.
\end{gathered} \tag{39}$$

Обозначая через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$, с учётом (37) получим

$$J_{n,r}(N,H)=J(\mathfrak{M}_1)+J(\mathfrak{M}_2)+J(\mathfrak{m})+O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}}\right). \tag{40}$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $J_{n,r}(N,H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

5.1. Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$

По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \int\limits_{|\lambda|\leqslant\eta_q} \prod_{k=1}^{r} T\left(\frac{a}{q}+\lambda; N_k, H_k\right) e\left(-\left(\frac{a}{q}+\lambda\right)N\right) d\lambda. \tag{41}$$

Для суммы $T\left(\frac{a}{q}+\lambda; N_k, H_k\right)$ выполняются оба условия следствия 2 теоремы 2. Действительно, ввиду соотношений (33), (34) и (32) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \tau =& 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 = \frac{4(n-1)H}{\mu_1^{\frac{1}{n}}N^{\frac{1}{n}}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right) \geqslant \\ &\geqslant \frac{4(n-1)H}{\mu_k^{\frac{1}{n}}N^{\frac{1}{n}}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = 2(n-1)nN_k^{n-2}H_k, \end{aligned} \tag{42}$$

а из соотношений $|\lambda|\leqslant\eta_q$, $\quad \eta_q = \dfrac{1}{2nqN_r^{n-1}}$ и $\dfrac{1}{2nqN_r^{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2qN_k^{n-1}}$ следует, что

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Поэтому согласно этому следствию для $k=1,\ldots,r$ имеем

$$T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_k, H_k\right) = \frac{H_kS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_k, H_k) + R, \qquad R \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Умножая обе части этих формул по всем $k=1,2,\ldots,r$, а затем применяя тождество

$$\prod_{k=1}^{r}(a_k+b) = \prod_{k=1}^{r}a_k + b^r + \sum_{\nu=1}^{r-1}b^{r-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\prod_{k=1}^{\nu}a_{i_k},$$

при $a_k = \dfrac{H_kS(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_k, H_k)$ и $b=R$, получим

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{r} T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_k, H_k\right) = \frac{S^r(a,q)}{q^r}\prod_{k=1}^{r}H_k\gamma(\lambda; N_k, H_k) + R^r + \\ + \sum_{\nu=1}^{r-1}R^{r-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\prod_{k=1}^{\nu}\frac{H_{i_k}S(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k}). \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями $R \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, и $|S(a,q)| \ll q^{\frac{n-1}{n}}$ (лемма 5), последние два слагаемые оценим сверху:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{r} T\left(\frac{a}{q}+\lambda, N_k, H_k\right) - \frac{S^r(a,q)}{q^r}\prod_{k=1}^{r}H_k\gamma(\lambda; N_k, H_k) \ll \\ \ll \sum_{\nu=1}^{r-1}q^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(r-\nu)-\frac{\nu}{n}}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\prod_{k=1}^{\nu}H_{i_k}|\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| + q^{0,5r+r\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (41) находим

$$J(\mathfrak{M}_1) = \prod_{i=1}^{r} H_i \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} \mathscr{A}(r,q) \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a,q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_1(\mathfrak{M}_1) + R_2(\mathfrak{M}_1), \tag{43}$$

$$\mathscr{A}(r,q) = \int_{|\lambda|\leqslant\eta_q} \prod_{k=1}^{r} \gamma(\lambda; N_k, H_k) e(-\lambda N) d\lambda,$$

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r} \int_{|\lambda|\leqslant\eta_q} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} |\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| d\lambda, \tag{44}$$

$$\sigma(\nu) = \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) r + 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\varepsilon\right)\nu,$$

$$R_2(\mathfrak{M}_1) \ll \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{0,5r+r\varepsilon}\varphi(q)\cdot 2\eta_q = \frac{1}{nN_r^{n-1}} \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} \varphi(q) q^{0,5r-1+r\varepsilon}.$$

5.2. Оценка $R_2(\mathfrak{M}_1)$

Воспользовавшись формулами (34) и (33), имеем

$$R_2(\mathfrak{M}_1) \ll \frac{1}{N_r^{n-1}} \left(\frac{H_r}{\mathscr{L}}\right)^{0,5r+1+r\varepsilon} \ll N^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{H}{N^{\frac{n-1}{n}}\mathscr{L}}\right)^{0,5r+1+r\varepsilon} =$$

$$= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon}.$$

Отсюда имея в виду, что

$$1-\frac{1}{n} < 1-\theta(n), \qquad \frac{r}{2}-2-r\varepsilon > 2,$$

а также пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$R_2(\mathfrak{M}_1) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{0,5r+1+r\varepsilon}} \left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\frac{r}{2}-2-r\varepsilon} N^{-\varepsilon\left(\frac{r}{2}-2-r\varepsilon\right)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{r-1}}. \tag{45}$$

5.3. Оценка $R_1(\mathfrak{M}_1)$

Оценим сначала тригонометрический интеграл

$$\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k}) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(f_{i_k}(u)\right) du, \qquad f_{i_k}(u) = \lambda\left(N_{i_k} - \frac{H_{i_k}}{2} + H_{i_k}u\right)^n.$$

Воспользовавшись соотношениями (33) и (34), при $i = 1,\ldots,n$, находим

$$N_k^{n-i}H_k^i = \frac{2^iN^{1-i}H^i}{n\mu_k^{i-1}}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \qquad \frac{H_k}{N_k} = \frac{2H}{n\mu_kN}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right). \tag{46}$$

Пользуясь этими соотношениями оценим снизу $f'_{i_k}(u)$. Имеем

$$|f'_{i_k}(u))| = n|\lambda|H_{i_k}\left(N_{i_k} - \frac{H_{i_k}}{2} + H_{i_k}u\right)^{n-1} \geqslant n|\lambda|H_{i_k}(N_{i_k} - H_{i_k})^{n-1} =$$

$$= n|\lambda|N_{i_k}^{n-1}H_{i_k}\left(1-\frac{H_{i_k}}{N_{i_k}}\right)^{n-1} = 2|\lambda|H\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right) \geqslant |\lambda|H.$$

Отсюда и из леммы 4, найдём

$$|\gamma(\lambda; N_{i_k}, H_{i_k})| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{|\lambda|H}\right). \tag{47}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (44), получим

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r} \int_{|\lambda|\leqslant\eta_q} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} \min\left(1, \frac{1}{|\lambda|H}\right) d\lambda = \\ &= 2\sum_{\nu=1}^{r-1} I(\nu) \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r} \prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k}, \\ I(\nu) &= \int_0^{\eta_q} \min\left(1, \frac{1}{\lambda^\nu H^\nu}\right) d\lambda. \end{aligned} \tag{48}$$

Воспользовавшись условием $q \leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}$, а затем и соотношением (46), находим

$$\eta_q H = \frac{H}{2nqN_r^{n-1}} \geqslant \frac{H\mathscr{L}}{2nH_rN_r^{n-1}} = \frac{H\mathscr{L}}{2n\cdot\frac{2H}{n}\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)} = \frac{\mathscr{L}}{4\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)} \geqslant \frac{\mathscr{L}}{5},$$

то есть $H^{-1} < \eta_q$. При $\nu \geqslant 2$, разбивая отрезок интегрирования в интеграле $I(\nu)$ на отрезки $[0, H^{-1}]$ и $[H^{-1}, \eta_q]$, имеем

$$I(\nu) = \int_0^{H^{-1}} d\lambda + \frac{1}{H^\nu}\int_{H^{-1}}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^\nu} = \frac{1}{H}\left(1 + \frac{1}{\nu-1}\left(1 - \left(\frac{1}{\eta_q H}\right)^{\nu-1}\right)\right) \leqslant \frac{\nu}{(\nu-1)H}.$$

В случае $\nu = 1$ аналогично получим

$$I(1) = \int_0^{H^{-1}} d\lambda + \frac{1}{H}\int_{H^{-1}}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{H} + \frac{\ln(\eta_q H)}{H} \leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}.$$

Воспользовавшись соотношениями (34) и (32), найдём

$$\prod_{k=1}^{\nu} H_{i_k} = \prod_{k=1}^{\nu} \frac{2H}{n\mu_{i_k}^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}}\left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right) \ll \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}\right)^\nu.$$

Подставляя правую часть этого неравенства и оценку для интеграла $I(\nu)$ в (48), а затем пользуясь при $k = r$ формулой (34), имеем

$$\begin{aligned} R_1(\mathfrak{M}_1) &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r} \frac{\mathscr{L}^{1+\nu}}{H}\left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}\right)^\nu \sum_{q\leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{\sigma(\nu)} \ll \\ &\ll \sum_{\nu=1}^{r-1} C_r^\nu \frac{\mathscr{L}^{1+\nu}}{H}\left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}\right)^{\sigma(\nu)+\nu+1} \ll \frac{\mathscr{L}^r}{H}\left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}\right)^{\sigma(r-1)+r} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}}\mathscr{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon}\left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H}\right)^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \theta(n), \qquad \frac{r}{n} - \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \varepsilon > 1,$$

и пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$R_1(\mathfrak{M}_1) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}}\mathscr{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon}\left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}}{H}\right)^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon} N^{-\varepsilon\left(\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon\right)} =$$
$$= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}}\mathscr{L}^{\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon}\cdot N^{-\varepsilon\left(\frac{r}{n}-\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\varepsilon\right)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{r-1}}. \tag{49}$$

5.4. Вычисление интеграла $\mathscr{A}(r,q)$

Имеем

$$\mathscr{A}(r,q) = \int_{|\lambda|\leqslant\eta_q}\prod_{k=1}^{r}\gamma(\lambda; N_k, H_k)e(-\lambda N)d\lambda, \qquad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Разбивая интервал интегрирования на интервалы $|\lambda| \leqslant \eta$ и $\eta < |\lambda| \leqslant \eta_q$, где число η определяется в формуле (39), и обозначая интегралы по этим интервалам соответственно через $\mathscr{A}_1(r,q)$ и $\mathscr{A}_2(r,q)$, получим

$$\mathscr{A}(r,q) = \mathscr{A}_1(r,q) + \mathscr{A}_2(r,q). \tag{50}$$

Заметим, что число η определяется в формуле (39) и согласно (46), имеем

$$\eta = \frac{\mathscr{L}}{2nH_rN_r^{n-1}} = \frac{\mathscr{L}}{4H\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)} \leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}. \tag{51}$$

В формуле (50) интеграл $\mathscr{A}_1(r,q)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $\mathscr{A}(r,q)$, а $\mathscr{A}_2(r,q)$ входит в его остаточный член. Найдем сначала асимптотическую формулу для $\mathscr{A}_1(r,q)$. Пользуясь соотношением $N_k^n = \mu_k N + H$, формулами (46) и (51), имеем

$$f_k(u) = \lambda\left(N_k + H_k\left(u-\frac{1}{2}\right)\right)^n = \lambda N_k^n + \lambda\sum_{i=1}^{n}C_n^iN_k^{n-i}H_k^i\left(u-\frac{1}{2}\right)^i =$$
$$= \mu_kN\lambda + 2H\lambda u + O\left(\frac{H^2}{N}|\lambda|\right) + \lambda\sum_{i=2}^{n}C_n^i\frac{2^iN^{1-i}H^i}{n\mu_k^{i-1}}\left(u-\frac{1}{2}\right)^i\left(1+O\left(\frac{H}{N}\right)\right)$$
$$= \mu_kN\lambda + 2H\lambda u + R_3(N,H), \qquad R_3(N,H) \ll \frac{H^2}{N}\eta \ll \frac{H\mathscr{L}}{N}.$$

Отсюда имея в виду, что $e(R_3(N,H)) = 1 + O(HN^{-1}\mathscr{L})$, найдём

$$e\left(f_k(u)\right) = e\left(\mu_kN\lambda\right)e(2Hu\lambda) + O\left(\frac{H\mathscr{L}}{N}\right).$$

Следовательно

$$\gamma(\lambda; N_k, H_k) = e\left(\mu_kN\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda} + R_4(N,H), \qquad R_4(N,H) \ll \frac{H\mathscr{L}}{N}.$$

Умножая обе части этих формул по всем $k = 1, 2, \ldots, r$, применяя тождество

$$\prod_{k=1}^{r}(a_k+b) = \prod_{k=1}^{r}a_k + b^r + \sum_{\nu=1}^{r-1}b^{r-\nu}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\prod_{k=1}^{\nu}a_{i_k},$$

а затем, воспользовавшись условием $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_r=1$, имеем

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{r}\gamma_n(\lambda;N_k,H_k)&=\prod_{k=1}^{r}\left(e\left(\mu_kN\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda}+R_4(N,H)\right)=\\&=\frac{\sin^r\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^r}e\left(N\lambda\right)+R_5(N,H),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R_5(N,H)&=R_4^r(N,H)+\sum_{\nu=1}^{r-1}R_4^{r-\nu}(N,H)\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}\prod_{k=1}^{\nu}e\left(\mu_{i_k}N\lambda\right)\frac{\sin\left(2\pi H\lambda\right)}{2\pi H\lambda}=\\&=R_4^r(N,H)+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{\sin^\nu\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^\nu}R_4^{r-\nu}(N,H)\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_\nu\leqslant r}e\left(\lambda N\sum_{k=1}^{\nu}\mu_{i_k}\right)\ll\\&\ll\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{|\sin(2\pi H\lambda)|^\nu}{|2\pi\lambda H|^\nu}\left(\frac{H\mathscr{L}}{N}\right)^{r-\nu}\ll\frac{H^r\mathscr{L}^r}{N^r}+\frac{|\sin(2\pi H\lambda)|^{r-1}}{|2\pi\lambda H|^{r-1}}\cdot\frac{H\mathscr{L}}{N}.\end{aligned}$$

Отсюда, из определения интеграла $\mathscr{A}_1(k,q)$ и (51), находим

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1(r,q)&=\int_{|\lambda|\leqslant\eta}\left(\frac{\sin^r\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^r}e\left(N\lambda\right)+R_5(N,H)\right)e(-\lambda N)d\lambda=\\&=\frac{1}{\pi H}\int_0^{2\pi H\eta}\frac{\sin^r t}{t^r}dt+R_6(N,H)+R_7(N,H),\\R_6(N,H)&\ll\int_{|\lambda|\leqslant\eta}\frac{H^r\mathscr{L}^r}{N^r}d\lambda\leqslant\frac{2H^{r-1}\mathscr{L}^{r+1}}{N^r}=\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\cdot\frac{H^r\mathscr{L}^{r+8}}{N^r}\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^7},\\R_7(N,H)&\ll\frac{H\mathscr{L}}{N}\int_{|\lambda|\leqslant\eta}\frac{\sin^{r-1}\left(2\pi H\lambda\right)}{(2\pi H\lambda)^{r-1}}d\lambda=\frac{\mathscr{L}}{\pi N}\int_0^{2\pi H\eta}\frac{\sin^{r-1}t}{t^{r-1}}dt\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^7}.\end{aligned}$$

Заменив интеграл по t близким к нему несобственным интегралом, независящим от $2\pi H\eta$, а также воспользовавшись при $i=1$ формулой (46), получим

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1(r,q)&=\frac{1}{\pi H}\int_0^{\infty}\frac{\sin^r t}{t^r}dt+R_8(N,H)+O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\right),\\R_8(N,H)&=\frac{1}{\pi H}\int_{2\pi H\eta}^{\infty}\frac{\sin^r t}{t^r}dt\leqslant\frac{1}{\pi H}\cdot\frac{1}{(2\pi H\eta)^r}\ll\frac{1}{H^{r+1}\eta^r}=\\&=\frac{1}{H^{r+1}}\cdot\left(\frac{2nN_r^{n-1}H_r}{\mathscr{L}}\right)^r\ll\frac{1}{H^{r+1}\mathscr{L}^r}\left(\frac{2H}{n}\right)^r\ll\frac{1}{H\mathscr{L}^r}.\end{aligned}$$

Пользуясь для вычисления несобственного интеграла леммой 7 при $m=1$, имеем

$$\mathscr{A}_1(r,q)=\frac{\gamma(n,r)}{H}+O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^7}\right).\tag{52}$$

$$\gamma(n,r)=\frac{r^{r-1}-\frac{r}{1!}(r-2)^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2!}(r-4)^{r-1}-\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(r-6)^{r-1}+\ldots}{2^r(r-1)!}.$$

Теперь оценим сверху интеграл $\mathscr{A}_2(r,q)$. Воспользовавшись оценкой (47), затем соотношением (51), имеем

$$\mathscr{A}_2(r,q) \leqslant 2\int_{\eta}^{\eta_q} \prod_{k=1}^{r} |\gamma(\lambda; N_k, H_k)| d\lambda \leqslant 2\int_{\eta}^{\eta_q} \min\left(1, \frac{1}{\lambda^r H^r}\right) d\lambda =$$
$$= \frac{2}{H^r}\int_{\eta}^{\eta_q} \frac{d\lambda}{\lambda^r} = \frac{2}{(r-1)H^r}\left(\frac{1}{\eta^{r-1}} - \frac{1}{\eta_q^{r-1}}\right) \leqslant \frac{2}{(r-1)H^r\eta^{r-1}} =$$
$$= \frac{2}{(r-1)H^r} \cdot \left(\frac{4H\left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right)}{\mathscr{L}}\right)^{r-1} \ll \frac{1}{H\mathscr{L}^{r-1}}.$$

Из этой оценки и формулы (52) ввиду (50), находим

$$\mathscr{A}(r,q) = \frac{\gamma(n,r)}{H} + O\left(\frac{1}{H\mathscr{L}^{r-1}}\right). \tag{53}$$

5.5. Вывод асимптотической формулы для интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$

Подставляя правые части формул (53), (49) и (45) в (43), найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{\gamma(n,r)}{H}\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathscr{L}}\right)\prod_{i=1}^{r} H_i + R_9(N,H) + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{r-1}}\right), \tag{54}$$

$$\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathscr{L}}\right) = \sum_{q \leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a,q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$R_9(N,H) \ll \frac{1}{H\mathscr{L}^{r-1}}\prod_{i=1}^{r} H_i \sum_{q \leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}} \left|\sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a,q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right)\right|.$$

Вычислим двойную сумму $\mathfrak{S}\left(N, H_r\mathscr{L}^{-1}\right)$. Для этого сумму по q заменим близким к ней бесконечным рядом $\mathfrak{S}(N)$, независящим от $H_r\mathscr{L}^{-1}$. Воспользовавшись леммой 5, соотношениями (33) и (34), а затем явными значениями параметров H и r, то есть формулой (32), имеем

$$\left|\sum_{q > H_r\mathscr{L}^{-1}} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a,q)}{q^r} e\left(-\frac{aN}{q}\right)\right| \ll \sum_{q > H_r\mathscr{L}^{-1}} q^{-\frac{r}{n}+1} \ll$$
$$\ll \left(\frac{H_r}{\mathscr{L}}\right)^{-\frac{r}{n}+2} \ll \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}{H}\right)^{\frac{r}{n}-2} \ll \frac{1}{\mathscr{L}^{r-1}}.$$

Следовательно

$$\mathfrak{S}\left(N, \frac{H_r}{\mathscr{L}}\right) = \mathfrak{S}(N) + O\left(\frac{1}{\mathscr{L}^{r-1}}\right), \tag{55}$$
$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q-1} \frac{S^r(a,q)}{q^9} e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Заметим, что сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ превосходит некоторое положительное число $c(N)$ (см. [17], теоремы 4.6).

Применяя формулу (34), имеем

$$\prod_{i=1}^{r} H_i = \frac{2^r H^r}{n^r N^{r-\frac{r}{n}}} \prod_{i=1}^{r} \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right). \tag{56}$$

Для оценки $R_9(N,H)$, пользуясь последней формулой и леммой 5 и условием $\dfrac{r}{n} - 1 \geqslant 2$, имеем

$$R_9(N,H) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}^{r-1}} \sum_{q \leqslant H_r \mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{q^{\frac{r}{n}-1}} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}^{r-1}}. \tag{57}$$

Подставляя (55), (56) и (57) в (54), найдём

$$J(\mathfrak{M}_1) = \frac{2^r \gamma(n,r)}{n^r} \prod_{i=1}^{r} \mu_i^{-1+\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} + O\left(\frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}} \mathscr{L}^{r-1}}\right). \tag{58}$$

5.6. Оценка интеграла $J(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$J(\mathfrak{M}_2) = \int_{\mathfrak{M}_2} \prod_{k=1}^{r} T(\alpha; N_k, H_k) e(-\alpha N) d\alpha. \tag{59}$$

Суммы $T(\alpha; N_k, H_k)$ в произведении $\prod\limits_{k=1}^{r} T(\alpha; N_k, H_k)$ симметричны, поэтому не ограничивая общности будем считать, что выполняется соотношение

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant r} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_k, H_k)| = \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant r.$$

С учётом этого равенства, переходя в интеграле (59) к оценкам, и пользуясь тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, а затем, применяя теорему 3 и соотношение $H_\nu \leqslant H_1 \ll H N^{-1+\frac{1}{n}}$, последовательно имеем

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{M}_2) &\leqslant \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \int_0^1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^{r} |T(\alpha; N_k, H_k)| \, d\alpha \leqslant \\
&\leqslant \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \frac{1}{r-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^{r} \int_0^1 |T(\alpha; N_k, H_k)|^{r-1} \, d\alpha \ll \\
&\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \frac{1}{r-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^{r} H_k^{2^n - n + \varepsilon} \ll \\
&\ll \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}\right)^{2^n - n + \varepsilon} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| = \\
&= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|.
\end{aligned} \tag{60}$$

Оценим $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad \eta_q < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{H_r}{\mathscr{L}}, \quad \eta_q = \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Рассмотрим два возможных случая: $\eta_q < |\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqN_\nu^{n-1}}$ и $\frac{1}{2nqN_\nu^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Для суммы $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ согласно соотношению (42) выполняется неравенство

$$\tau = 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 \geqslant 2(n-1)nN_\nu^{n-2}H_\nu,$$

то есть первое условие следствия 2 теоремы 2, а второе условие следует из условия рассматриваемого случая

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqN_r^{n-1}}.$$

Согласно этому следствию имеем

$$T(\alpha; N_\nu, H_\nu) = \frac{H_\nu S(a,q)}{q}\gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{61}$$

Оценивая тригонометрический интеграл $\gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu)$, воспользовавшись оценкой (47), находим

$$\gamma(\lambda; N_\nu, H_\nu) \leqslant \min\left(1, \frac{1}{H|\lambda|}\right) \leqslant \frac{1}{H\eta_q} = \frac{2nqN_r^{n-1}}{H} \ll \frac{qN^{\frac{n-1}{n}}}{H}.$$

Подставляя эту оценку и оценку суммы $S(a,q)$ из леммы 5 в (61), а затем с пользовавшись формулой (34), получим

$$|T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| \ll \frac{H}{N^{\frac{n-1}{n}}q^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{qN^{\frac{n-1}{n}}}{H} + q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll q^{\frac{n-1}{n}} \ll$$
$$\ll \left(\frac{H_r}{\mathscr{L}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ll \left(\frac{H}{n\mu_k^{1-\frac{1}{n}}N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \ll \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}}\mathscr{L}^{1-\frac{1}{n}}}.$$

Подставляя последнюю оценку в (60), находим

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{\frac{n-1}{n}}}{N^{\frac{(n-1)^2}{n^2}}\mathscr{L}^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{1-\frac{1}{n}}}\left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H}\right)^{\deg(H)},$$
$$\deg(N) = n - \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{(n-1)^2}{n^2} = n - 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\varepsilon,$$
$$\deg(H) = n - \varepsilon - \frac{n-1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n} - \varepsilon,$$
$$\frac{\deg(N)}{\deg(H)} = 1 - \frac{1-n\varepsilon}{n^3-n^2+n-n^2\varepsilon} = 1 - \frac{1}{n^3-n^2+n} + \eta(n),$$
$$\eta(n) = \frac{n^2-n}{(n^2-n+1)(n^2-n+1-n\varepsilon)}\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{n^2-n+1}.$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1 - \frac{1}{n^3-n^2+n} + \eta(n) \leqslant 1 - \theta(n) + 0{,}5\varepsilon$$

находим

$$J(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{1-\frac{1}{n}}}\left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^3-n^2+n}+\eta(n)}}{H}\right)^{\deg(H)} \ll$$
$$\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{1-\frac{1}{n}}}\left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\deg(H)} N^{-0{,}5\varepsilon\deg(H)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{r-1}}. \tag{62}$$

Случай 2. В этом случае для суммы $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ выполняются оба условия следствия 3 теоремы 2, то есть

$$\tau = 2(n-1)nN_1^{n-2}H_1 \geqslant 2(n-1)nN_\nu^{n-2}H_\nu, \qquad \frac{1}{2qN_\nu^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Согласно этому следствию, условиям $H_r < N_r\mathscr{L}^{-1}$ и $q \leqslant H_r\mathscr{L}^{-1}$, а также соотношениям (33) и (34), имеем

$$\begin{aligned}|T(\alpha; N_\nu, H_\nu)| &\ll q^{\frac{n-1}{n}}\ln q + \min\left(H_\nu q^{-\frac{1}{n}}, N_\nu^{\frac12} q^{\frac12-\frac1n}\right) \leqslant \\ &\leqslant q^{1-\frac1n}\ln q + N_\nu^{\frac12}q^{\frac12-\frac1n} \ll H_r^{1-\frac1n}\mathscr{L}^{\frac1n} + N_r^{\frac12}H_r^{\frac12-\frac1n}\mathscr{L}^{-\frac12+\frac1n} = \\ &= N_r^{\frac12}H_r^{\frac12-\frac1n}\mathscr{L}^{-\frac12+\frac1n}\left(H_r^{\frac12}N_r^{-\frac12}\mathscr{L}^{\frac12}+1\right) \ll \\ &\ll N_r^{\frac12}H_r^{\frac12-\frac1n}\mathscr{L}^{-\frac12+\frac1n} \ll H^{\frac12-\frac1n}N^{-\frac12+\frac2n-\frac1{n^2}}\mathscr{L}^{-\frac12+\frac1n}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (60), находим

$$\begin{aligned}J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}}\cdot\frac{N^{n-\frac1n-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}}\cdot H^{\frac12-\frac1n}N^{-\frac12+\frac2n-\frac1{n^2}}\mathscr{L}^{-\frac12+\frac1n} = \\ &= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}\mathscr{L}^{\frac12-\frac1n}}\left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H}\right)^{\deg(H)}, \\ \deg(N) &= n-\frac1n-\frac{n-1}{n}\varepsilon-\frac12+\frac2n-\frac1{n^2} = n-\frac12+\frac1n-\varepsilon-\frac1{n^2}+\frac1n\varepsilon, \\ \deg(H) &= n-\frac12+\frac1n-\varepsilon, \\ \frac{\deg(N)}{\deg(H)} &= 1-\frac{1-n\varepsilon}{n^3-0,5n^2+n-n^2\varepsilon} = 1-\frac{1}{n^3-0,5n^2+n}+\eta(n), \\ \eta(n) &= \frac{n^2-0,5n}{(n^2-0,5n+1)(n^2-0,5n+1-n\varepsilon)}\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{n^2-n+1}.\end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что

$$1-\frac{1}{n^3-0,5n^2+n}+\eta(n) \leqslant 1-\theta(n)+0,5\varepsilon,$$

находим

$$\begin{aligned}J(\mathfrak{M}_2) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}\mathscr{L}^{\frac{n-1}{n}}}\left(\frac{N^{1-\frac{1}{n^3-0,5n^2+n}+\eta(n)}}{H}\right)^{\deg(H)} \ll \\ &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}\mathscr{L}^{\frac{n-1}{n}}}\left(\frac{N^{1-\theta(n)+\varepsilon}}{H}\right)^{\deg(H)}N^{-0,5\deg(H)} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}\mathscr{L}^{r-1}}.\end{aligned} \tag{63}$$

5.7. Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$

Поступая аналогично, как в случае оценки $J(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac rn}}\cdot\frac{N^{n-\frac1n-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}}\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|T(\alpha; N_\nu, H_\nu)|, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant r. \tag{64}$$

Оценим $T(\alpha; N_\nu, H_\nu)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad \frac{H_r}{\mathscr{L}} < q \leqslant \tau, \quad \tau = 2n(n-1)N_1^{n-2}H_1.$$

Пользуясь леммой 1, обозначением $r = 2^n + 1$, затем соотношениями

$$H_\nu \asymp \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}, \qquad N_\nu \asymp N^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}} \ll q \ll \frac{H}{N^{\frac{1}{n}}}$$

которые являются следствиями формул (34) и (33), имеем

$$\begin{aligned}
T(\alpha; N_\nu, H_\nu) &\ll H_\nu^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{H_\nu} + \frac{1}{q} + \frac{q}{H_\nu^n} \right)^{\frac{2}{r-1}} \ll \\
&\ll \frac{H^{1+\varepsilon}}{N^{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon)}} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}}\mathscr{L}}{H} + \frac{H}{N^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{N^{n-1}}{H^n} \right)^{\frac{2}{r-1}} = \\
&= \frac{H^{1-\frac{2n-2}{r-1}+\varepsilon}}{N^{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon)-\left(n-1-\frac{1}{n}\right)\frac{2}{r-1}}} \left(\frac{H^{n-2}\mathscr{L}}{N^{n-2}} + 1 \right)^{\frac{2}{r-1}}.
\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (64), находим

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{m}) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \cdot \frac{N^{n-\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}\varepsilon}}{H^{n-\varepsilon}} \cdot \frac{H^{1-\frac{2n-2}{r-1}+\varepsilon}}{N^{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon)-\left(n-1-\frac{1}{n}\right)\frac{2}{r-1}}} = \\
&= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{\frac{\deg(N)}{\deg(H)}}}{H} \right)^{\deg(H)}, \qquad (65)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\deg(N) &= \frac{1}{r-1} \left((r+1)(n-1) - (2r-2)\varepsilon - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}(r-1)\varepsilon \right), \\
\deg(H) &= \frac{rn - r + n - 1}{r-1} - 2\varepsilon = \frac{(r+1)(n-1) - (2r-2)\varepsilon}{r-1}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись значениями $\deg(N)$ и $\deg(H)$, а также обозначением $r - 1 = 2^n$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\deg(N)}{\deg(H)} &= 1 - \frac{2 - (2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = 1 - \theta(n, r) + \eta(n), \\
\eta(n) &= \frac{2}{(r+1)(n^2-n)} - \frac{2 - (2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = \\
&= \frac{\left(1 - \frac{2}{(r+1)(n-1)}\right)(2r-2)\varepsilon}{(r+1)(n^2-n) - (2r-2)n\varepsilon} = \frac{\left(1 - \frac{2}{(2^n+2)(n-1)}\right)2^{n+1}\varepsilon}{(n-1+2^{1-n}(n-1)-2\varepsilon)2^n n} \leqslant \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{(n-1)n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Из этой оценки и из (65), пользуясь соотношением $H = N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned}
J(\mathfrak{m}) &\ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\frac{\varepsilon}{2}}}{H} \right)^{\deg(H)} = \\
&= \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}} \left(\frac{N^{1-\theta(n,r)+\varepsilon}}{H} \right)^{\deg(H)} N^{-\frac{\deg(H)}{2}\varepsilon} \ll \frac{H^{r-1}}{N^{r-\frac{r}{n}}\mathscr{L}^{r-1}}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные оценки для $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно из (58), (62), (63) и (65) в (40) получим утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright E. M. Proportionality conditions in Waring's problem // Mathematische Zeitschrift. 1934. V. 38. P. 730 – 746.

2. Wright E. M. An extension of Waring's problem // Philos. Trans. R. Soc. Lond. 1933. Ser. A 232. P. 1 – 26.

3. Dirk Daemen. The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums // Bull. London Math. Soc., 2010. V. 42. P. 75 – 82.

4. Dirk Daemen. Localized solutions in Waring's problem: the lower bound // Acta Arithmetica. 2010. V. 142. № 2. P. 129 – 143.

5. Dirk Daemen. On sums of 13 'almost equal' cubes // Quart. J. Math. 2010. V. 61, P. 29 – 32.

6. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

7. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

8. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублоев Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.

9. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

10. Рахмонов З. Х., Азамов А. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

11. Рахмонов З. Х., Назрублоев Н. Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. № 11 – 12. С. 823 – 830.

12. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

13. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.

14. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94

15. Vaughan R. C. Some remarks onWeyl sums // Topics in Classical Number Theory, Colloquia. Math. Soc. Janos Bolyai, 34. 1981. P. 1585 – 1602.

16. Карацуба А. ,А., Королёв М. А. Теорема о замене тригонометрической суммы более короткой // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71. № 2. С. 123 – 150.

17. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда — Москва: Мир, 1985.

18. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и её применения в теории чисел — Москва: Мир, 1964.

19. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — Москва: Наука. 1987 г.

20. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа — Изд. 2–е. Перев. с англ. Москва: Физматгиз, 1963 г. -342 с.

REFERENCES

1. Wright E. M., 1934, “Proportionality conditions in Waring's problem”, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 38, pp. 730-746.

2. Wright E. M., 1933, “An extension of Waring's problem”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, vol. 232. pp. 1-26.

3. Dirk Daemen, 2010., “The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums”, *Bull. London Math. Soc.*, vol. 42, pp. 75-82.

4. Dirk Daemen, 2010, “Localized solutions in Waring's problem: the lower bound”, *Acta Arithmetica*, vol. 142, pp. 129-143.

5. Dirk Daemen, 2010, “ On sums of 13 ‘almost equal’ cubes”, *Quart. J. Math.*, vol. 61, pp. 29-32. doi:10.1093/qmath/han024

6. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “The Estermann cubic problem with almost equal summands“, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

7. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., Rakhimov A.O., 2015, “Short Weyl sums and their applications”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247, (in Russian).

8. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., Nazrubloev N. N., 2018, “Of short Weyl's exponential sum in minor arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, no 7-8, pp. 609-614, (in Russian).

9. Rakhmonov Z. Kh., & Mirzoabdugafurov K. I., 2008, “Waring's problem for cubes with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

10. Rakhmonov Z. Kh., & Azamov A.Z., 2011, “An asymptotic formula in Waring's problem for fourth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

11. Rakhmonov Z. Kh., & Nazrubloev N. N., 2014, “Waring's problem for fifth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no 11-12, pp. 823-830, (in Russian).

12. Rakhmonov Z. Kh., 2003, “Estermann's ternary problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542. doi.org/10.1023/A:1026199928464.

13. Rakhmonov F. Z., & Rakhimov A. O., 2015, “On an additive problem with almost equal summands”, *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel'stvo: Saratovskiy natsional'nyy issledovatel'skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87–89, (in Russian).

14. Rakhmonov Z. Kh., 2023, "Generalization of Waring's problem for nine almost proportional cubes", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. 3, pp. 71–94, (in Russian).

15. Vaughan R. C., 1981, "Some remarks on Weyl sums", *Topics in Classical Number Theory, Colloquia. Math. Soc. Janos Bolyai, 34*. 1981. P. 1585 – 1602.

16. Karatsuba A. A. & Korolev M. A. 2007. "A theorem on the approximation of a trigonometric sum by a shorter one", *Izvestiya: Mathematics*, 71(2), pp. 341 – 370.

17. Vaughan R. C., 1981. "The Hardy-Littlewood method", *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 172 p.

18. Hua Loo-Keng, 1964. "Method of Trigonometric Sums and Its Applications in Number Theory", *Nauka, Moscow, 190 p. (Russian translation)*; *Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. 2. völlig neu bearb. Auf*, Enzyklopädie Math. Wiss. Band. I, 2. Teil, Heft 13, Art. 29. Leipzig: B. G. Teubner Verlag. 123 S. (1959).

19. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. "Trigonometric sums in number theory and analysis", *Berlin–New-York: Walter de Gruyter*, 554 p.

20. Whittaker G. E., & Watson T. N., 1915. "A Course of Modern Analysis. Part 1.", *The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions*, Cambridge, Cambridge University Press, 620.

Получено: 21.01.2024
Принято в печать: 28.06.2024