

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-82-101

Устойчивость выработки в блочных средах¹

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова

Канель-Белов Алексей Яковлевич — Магнитогорский государственный технический университет имени Г. И. Носова (г. Магнитогорск).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Кирова Валерия Орлановна — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Москва).

Kirova_vo@mail.ru

Аннотация

При решении вопроса об устойчивости выработки часто сталкиваются с ситуацией, когда разрушение происходит только за счет движения цельных блоков, а не их разрушения, из-за прочности породы и горного давления. В таком случае возникает вопрос о том, способна ли форма блока (и выработанного пространства рядом с ним) двигаться под действием силы тяжести или горного давления внутрь выработки. Важно учесть роль сил трения и определить относительное число опасных блоков, которые могут выпасть в выработку. Аналогичные проблемы возникают при изучении разломов, когда выдвинувшиеся блоки могут препятствовать движению вдоль разлома. Для решения задач, связанных с кинематикой блока при учете указанных сил, были разработаны решения, представленные в работах Гудмана и Ши-Ген-Хуа. В данной статье представлен краткий обзор метода Гудмана с модифицированными доказательствами основных теорем, а также рассмотрены задачи, связанные с определением среднего числа опасных блоков. Предполагается, что трещины группируются в конечное число систем взаимнопараллельных трещин, которые моделируются плоскостями. Рассматриваются две модели - пуассоновская и равноотстоящая, отличающиеся распределением расстояний между трещинами.

Ключевые слова: Эргодический подход, эргодическая теорема

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. Я. Канель-Белов, В. О. Кирова. Устойчивость выработки в блочных средах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 82–101.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-19-20073.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-82-101

Stability of production in block environments

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — Nosov Magnitogorsk State Technical University (Magnitogorsk).

e-mail: Kanelster@gmail.com

Kirova Valeria Orlanovna — National Research University “Higher School of Economics” (Moscow).

Kirova_vo@mail.ru

Abstract

When solving the issue of the stability of workings, they often face a situation where destruction occurs only due to the movement of solid blocks, and not their destruction, due to the strength of the rock and rock pressure. In this case, the question arises as to whether the shape of the block (and the worked-out space next to it) is capable of moving under the influence of gravity or rock pressure into the workings. It is important to take into account the role of friction forces and determine the relative number of dangerous blocks that can fall into the mine. Similar problems arise when studying faults, when protruding blocks can impede movement along the fault. To solve problems related to the kinematics of the block, taking into account these forces, the solutions presented in the works of Goodman and Shi-Gen-Hua were developed. This article provides a brief overview of the Goodman method with modified proofs of the main theorems, as well as the tasks associated with determining the average number of dangerous blocks. It is assumed that cracks are grouped into a finite number of systems of mutually parallel cracks, which are modeled by planes. Two models are considered - Poisson and equidistant, differing in the distribution of distances between cracks.

Keywords: Ergodic approach, ergodic theorem

Bibliography: 16 titles.

For citation:

A. Ya. Kanel-Belov, V. O. Kirova, 2024. “Stability of production in block environments”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 82–101.

1. Основные положения метода Гудмана**1.1. Теоремы Shi-Gen-Hua**

Изложим в несколько модифицированном виде основные положения этого метода, ограничившись вначале для простоты случаем, когда можно не учитывать влияние сил трения.

Рассмотрим прежде всего один отдельно взятый блок B . Каковы возможные направления его движения?

Во-первых, блок может двигаться только в ту сторону от своей грани, не выходящей полностью на поверхность выработки, где находится он сам (иначе блок упрется в окружающую породу). С каждой гранью, таким образом, связано полупространство направлений. Вектор возможного перемещения должен принадлежать пересечению всех этих полупространств. Если это пересечение нулевое, то блок в заклинен, если нет — то он может двигаться.

Таким образом, если знать направления всех граней блока, то вопрос о его подвижности можно решить, однако в действительности мы знаем только направления тех граней блока, которые примыкают к поверхности выработки.

В этом случае условия, задаваемые такими гранями — первую группу условий называют *условиями незаклиненности* и вместо рассмотрения остальных граней блока, рассматривают вторую группу условий.

Если, блок B движется, то какая-то из его граней Γ , выходящая на поверхность выработки, движется вглубь выработки. мы должны взять для каждой точки границы Γ множество направлений движения, ведущих вглубь выработки.

Направление реального движения $\vec{v}$ лежит в каждом таком множестве, а, следовательно, и в их пересечении имеем второе условие.

Если рассматривать выражение блока B под действием только силы тяжести, то множество направлений, удовлетворяющим только первым двум условиям нужно пересечь с полупространством направлений, ведущих вниз; если $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — вектор такого перемещения, то $\bar{z} < 0$.

THEOREM 1 (Shi-Gen-Hua.). *Блок B является замковым тогда и только тогда, когда пересечение множеств направлений, задаваемых всеми условиями — непусто. Замковым называется блок, который может двигаться.*

В чем идея доказательства? Рассмотрим грани блока, примыкающие к поверхности выработки $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$. Пусть Π_i — полупространство направлений, разрешенных Γ_i . Если Γ_i продолжить мысленно вглубь породы, то их пересечение образует область, содержащую B . Если эта область O сама по себе может двигаться вглубь выработки, то блок B и подавно: он получается из O сечением полупространствами, соответствующими его остальным граням. На самом деле верно и обратное. Назовем блок в бесконечным, если область O , соответствующая блоку, бесконечна (выработку мы считаем полупространством).

THEOREM 2. *Блок B подвижен только тогда, когда он конечный.*

Рассмотрим теперь случай, когда выработка представляет собой полупространство. Пусть оно задано уравнением $z \leq 0$. множество направлений возможного перемещения блока можно представить чисто геометрически.

Пусть α_i — плоскости граней Γ_i . Перенесем плоскости $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ параллельно самим себе в точку 0. Тогда получим конус направлений, в которых грани $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$ разрешают блоку B двигаться, образованный пересечением образов полупространств Π_i при этом переносе.

Множество направлений, ведущих вглубь выработки, можно отождествлять с множеством лучей исходящих из точки 0 (см.рис.). так, что множество векторов возможного перемещения можно отождествлять с конусом. Поскольку направления вектора можно естественным образом отождествлять с точкой на единичной сфере, то конусу направлений возможных перемещений соответствует область на единичной сфере. Гудман и Shi-Gen-Hua изображают эту область на плоскости с помощью стереографической проекции. При этом множество направлений возможных перемещений изображаются как сферический многоугольник.

Мы же воспользуемся центральной проекцией. между множеством всех лучей: соответствующим допустимым направлениям движения и множеством точек плоскости $\beta : z = -I$ имеет место взаимно-однозначное соответствие: каждому лучу соответствует точка его пересечений с плоскостью β и обратно. При этом конусу направлений возможного движения соответствует многоугольник M на плоскости β . Пусть $\tilde{x}, \tilde{y}$ — координаты на плоскости β , если $A(x, y, -I)$ — точка на плоскости β , то $\tilde{x}(A) = x, \tilde{y}(A) = y$.

Полупространству направлений

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq 0$$

соответствует полуплоскость

$$\tilde{a}_i x + \tilde{b}_i y + \tilde{c}_i z \geq 0.$$

1.2. Аналитическое описание множества направлений возможного перемещения. Графическое представление этого множества

Дадим вначале аналитическое описание первой группы условий.

Пусть $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ – уравнение плоскости грани Γ_i ; ограничимся вначале случаем выпуклого блока B . Пусть тогда блок B лежит в полупространстве $a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i$. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ – один из векторов возможного перемещения B . Тогда

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство выше определяет полупространство направлений, разрешенных Γ_i .

Таким образом, множество векторов $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, удовлетворяющие первой группе условий будет задаваться системой неравенств:

$$\begin{cases} a_1 \bar{x} + b_1 \bar{y} + c_1 \bar{z} \leq 0 \\ \vdots \\ a_s \bar{x} + b_s \bar{y} + c_s \bar{z} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

где знак $\leq$ или $\geq$ стоит в зависимости от того, лежит ли блок B в полупространстве

$$a_i \bar{x} + b_i \bar{y} + C_i \bar{z} \leq e_i$$

или в полупространстве

$$a_i \bar{x} + b_i \bar{y} + C_i \bar{z} \geq e_i.$$

Перейдем теперь к аналитическому описанию второй группы условий.

Если выработка полупространство

$$Ax + By + Cz \leq d,$$

то к первой группе условий следует добавить неравенство:

$$A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} \leq 0 \quad (3)$$

Камера в окрестности ребра задается двумя неравенствами:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z \leq D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z \geq D_2. \end{cases}$$

Поэтому к неравенствам первой группы для блока, находящегося на ребре камеры нужно добавить неравенства:

$$\begin{cases} A_1 \bar{x} + B_1 \bar{y} + C_1 \bar{z} \leq 0 \\ A_2 \bar{x} + B_2 \bar{y} + C_2 \bar{z} \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если камера в окрестности угла задается неравенствами

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z \leq D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z \geq D_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z \leq D_3 \end{cases}$$

то к неравенствам первой группы следует добавить

$$\begin{cases} A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1\bar{z} \leq 0 \\ A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2\bar{z} \geq 0 \\ A_3\bar{x} + B_3\bar{y} + C_3\bar{z} \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичные ограничения получены также в [6] для выработок разной формы.

Наконец, дополнительное условие выпадения под действием силы тяжести описывается неравенством $\bar{z} \leq 0$. Рассмотрим теперь этот случай.

Рассмотрим плоскость β . множество точек, соответствующее направлениям возможного перемещения задается неравенствами:

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ \dots \\ A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

где знак соответствующего неравенства из (6) противоположен соответствующему знаку из (2).

Аналогичным образом переписываются неравенства (3):

$$A\tilde{x} + B\tilde{y} + C \geq 0, \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2 \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1 \geq 0 \\ A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2 \leq 0 \\ A_3\tilde{x} + B_3\tilde{y} + C_3 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Блок B является неподвижным, если множество векторов возможного перемещения нулевого, либо многоугольник $M = \emptyset$, либо объединенная система неравенств (6),(7) несовместна. Либо, что то же самое, несовместна система неравенств (2),(3).

Для теоретических целей удобнее иметь геометрическое представление, для вычислений – алгебраическое.

1.3. Учет сил трения

Пусть на блок B действует результирующая сила $\vec{R}$. Грань Γ позволяет B двигаться, если угол между $\vec{R}$ и нормалью к Γ больше $\Phi_{\text{тр}}$. Утверждается, что блок B может двигаться, если это ему позволяет каждая его грань.

Множество направлений $\vec{R}$, в которых блок B может двигаться определяется как пересечение множеств разрешенных Γ_i и изображается графически. Решается задача о минимальной опорой силе, требуемой для поддержания устойчивости блока и ее направлений.

1.4. Решение вопроса об устойчивости блока по его следу

В случае, если трещины группируются в конечное число систем и находятся в общем положении, то можно решать вопрос об устойчивости блока по его следу. рассмотрим в начале для простоты случай, когда выработка полупространство. тогда пересечение системы трещин с поверхностью выработки есть система параллельных отрезков и сечения разных систем почти наверняка представляют собой системы отрезков по разному направлению. Зная направление каждой системы можно по следу трещины определить, какой системе она принадлежит, а тем самым и ее направление.

На подвижность блока B , таким образом, в случае учета сил трения оказывает влияние только его *тип*, т.е. набор систем трещин, образующий грани B , с учетом того, по какую сторону от грани лежит сам блок – это следует из теоремы Shi-Gen-ниа и теории Гудмана. Таким образом, по следу блока можно определить его тип, а тем самым и его подвижность.

Поскольку типов конечное число, то можно составить каталог с помощью которого по следу блока легко определять, опасен он или нет.

Поскольку блоков много, много больше числа типов, каталог выгодно составить один раз. Это обстоятельство позволяет резко сократить трудоемкость оценки устойчивости.

Поскольку, в зависимости от направления выработки и коэффициентов трения разные типы блоков могут являться опасными, возникает задача отыскания распределения блоков по типам.

2. Оценки для относительного числа опасных блоков

В этом параграфе рассматривается случай, когда выработка полупространство. В этом случае полупространство выработки и полупространство, занятое породой, можно поменять местами. Возникающая симметрия используется для получения оценок на число опасных блоков.

Покажем, что относительное число замковых блоков не превосходит 30%. В самом деле: продолжим плоскости трещин вглубь выработки и затем произведем симметрию относительно поверхности выработки. От этой процедуры ни углы между трещинами, ни углы между трещинами и поверхностью выработки, ни статистические свойства трещин не изменяются.

При этом каждому блоку B соответствует блок B' с тем же следом. Если блок B был подвижным, то покажем, что блок B' будет неподвижным, тем самым будет получена оценка в 50% как по количеству блоков, так и по относительной площади следов.

Покажем, что блок B' неограниченный. В самом деле: если у B' продолжить грани Γ_i , примыкающие к поверхности и перенести все полупространства Π_i соответствующие Γ_i в одну точку, то в пересечении их полупространством, занятым породой, Получится конус, отличающийся от конуса направлений движения блока B симметрии относительно поверхности выработки. Но раз блок B подвижен, то этот конус не пуст и значит если у B' продолжить плоскости Γ_i , то их пересечение с полупространством породы неограниченно. Имеем следующую теорему:

THEOREM 3. *В случае, когда выработка есть полупространство: относительное число подвижных блоков не больше 50%. относительная площадь их оснований также не больше 50%.*

Если участок выработки выпуклый, то он отличается от полупространства лишней породой, что не способствует подвижности взятого блока B и таким образом, число замковых блоков и подавно не больше 50%.

Естественно возникает вопрос о точности оценки. если след блока треугольник, то неподвижному блоку соответствует подвижный. В самом деле: пересечение полупространств Π_1, Π_2, Π_3 (как, в прочем и любых трех, у которых границы не параллельны одной прямой, а мы предполагаем случай общего положения) есть бесконечный конус K . Ясно, что либо пересечение K с полупространством, занятым выработкой, либо с полупространством занятым породой бесконечно. В первом случае блок B замковый, во втором – B' .

Что можно сказать о блоках, след которых – многоугольник? Можно привести пример блока B , след которого – четырехугольник такого, что и B' и B заклинены.

Преобразование, описанное выше (продолжение внутрь и симметрия) поворачивает плоскости трещин на 180° относительно оси OZ' перпендикулярной поверхности выработки. Естественно рассмотреть, что будет, если это преобразование делать не со всеми системами.

Нетрудно убедиться, что тогда статистические свойства среды вообще говоря, изменятся. В частности, это почти наверняка произойдет в случае, если трещины группируются в системы.

Однако такое преобразование можно производить для случая разбиения пространства пуассоновским полем плоскостей. В этом случае можно получить некоторые дополнительные оценки на число замковых блоков, поскольку блок и преобразованный равновероятны.

Пусть многоугольник M является следом блока B , $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ – грани B , примыкающие к сторонам M , и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – плоскости, проходящие через эти грани. Каждую плоскость α_i можно заменить на симметричную относительно γ – плоскости поверхности выработки плоскость α'_i с тем же следом.

Получаются различные блоки. Какое относительное число λ замковых? Оно зависит от направлений $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Приведем оценки.

Во-первых, $\lambda \leq I/2$, причем равенство может достигаться при любом числе сторон K .

Пример. Случай, когда $\lambda = I/2$. Эти грани почти перпендикулярны к поверхности выработки. Их преобразование ничего не дает. Все определяет преобразование α_1 .

С другой стороны, покажем, что для n -угольников $\lambda \geq 2^{-n}$. Для этого достаточно показать, что среди 2^n блоков, отличающихся друг от друга описанным выше преобразованием, есть хотя бы один замковый.

Рассмотрим плоскость $\beta : z' = -I$ и введем координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на плоскости β . Оси (OZ) соответствует точка на плоскости $\beta(0; 0)$; а каждой плоскости α_i соответствует полуплоскость $\Gamma_i : A_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + \tilde{c}_i \leq 0$ или $a_i x + b_i y + c_i \geq 0$.

Плоскости α'_i соответствует полуплоскость: $a_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + (-c_i) \leq 0$ или $a_i \tilde{x} + b_i \tilde{y} + (-c_i) \geq 0$ с заменой c_i на $-c_i$. Тем самым с помощью описанных выше преобразований можно добиться того, что точка $(0, 0)$ будет принадлежать пересечению полуплоскостей разрешенных каждой гранью направлений и тем самым обеспечит подвижность.

С другой стороны, если M есть пересечение $K = K/3$ треугольников и не имеет параллельных сторон, то в этом случае $\lambda \leq 2^{-k_1}$ поскольку для заклиненности достаточно, чтобы заклинивали три грани.

Последняя оценка, вытекает из независимости систем и из соображений эргодичности и в равноотстоящей или пуассоновской, модели для случая конечного числа систем.

3. Отыскание распределения блоков по типам

Мы предполагаем, что трещины группируются в конечное число систем, а выработка – полупространство.

Из теории Гудмана следует, что на подвижность блока оказывает влияние только его тип, т.е. номера систем трещин, следы которых ограничивают след блока, с указанием полупространств, в которых лежит сам блок. Знание распределения блоков по типам важно для понимания геометрии массива. Поскольку тип блока определяется его следом, то фактически задача нахождения распределения блоков по типам является двумерной (а если рассмотреть теорию Гудмана в плоском случае – то линейной). Отметим, что задача, решенная в п. 4 параграфа 3 (определение числа монолитных блоков первого порядка) является частным случаем задачи нахождения распределения блоков по типам.

3.1. Определение понятий, необходимых в дальнейшем

Дадим строгое определение понятия *типа*.

Пусть уравнения плоскостей i -ой системы имеют вид:

$$a_i x + b_i y + c_i z = \text{const.} \quad (10)$$

Тип блока B – это набор пар чисел

$$\{(i_1, e_1), (i_2, e_2), \dots, (i_k, e_k)\}$$

где $i_1, \dots, i_k$ – номера систем, образующих грани B , след которых образует стороны M – следа B . При этом $e_\alpha = +I$, если B лежит в полупространстве $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \leq d_\alpha$,

где $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z = d_\alpha$ – уравнение α -й грани B и $e_\alpha = -I$, если B лежит в полупространстве $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \geq d_\alpha$.

Сформулируем теперь понятие типа в терминах только следов.

Пусть поверхность выработки задается равенством $z = 0$, а внутренность – неравенством $z < 0$. В этом случае *пересечение поверхности выработки* с полупространством $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y + c_{i_\alpha}z \leq d_\alpha$ есть полуплоскость $a_{i_\alpha}x + b_{i_\alpha}y \leq d_\alpha$. Назовем полуплоскость *нижней*, если она соответствует неравенству $\leq$, и *верхней*, если она соответствует неравенству $\geq$, и тем самым определим величины e_α : $e_\alpha = +I$, если M лежит в верхней полуплоскости, и $e_\alpha = -I$, если M лежит в нижней.

В плоском случае теории Гудмана, т.е. когда пространство, занятое породой полагается полуплоскостью, его граница – прямой, а след блока – отрезком, след системы трещин – система точек, тип блока можно определить как пару (i, j) , где i – номер системы, содержащей начало отрезка, а j – номер системы, содержащей его конец.

3.2. Отыскание распределения блоков по типам

В данном параграфе все рассуждения проводятся только для поверхности выработки, трещины и блоки отождествляются с их следами.

3.3. Введение необходимых величин

Выберем 0 – начало координат, прямые i -ой системы будут задаваться уравнениями

$$a_i x + b_i y = \text{const},$$

$$a_i^2 + b_i^2 = I,$$

и d_i – средние расстояния между соседними прямыми i -ой системы.

Уравнения двух прямых i -ой системы, ближайших к точке 0, имеют вид:

$$a_i x + b_i y = h_i^+; \quad a_i x + b_i y = -h_i^-, \quad (11)$$

где $h_i^+, h_i^- \geq 0$. В равноотстоящей модели $h_i^+ + h_i^- = d_i$. Почти наверняка $h_i^+, h_i^- > 0$.

С i -ой системой связан линейный функционал $f_i(x, y) = a_i x + b_i y$, представляющий собой проекцию вектора с координатами (x, y) на нормаль к i -ой системе. Уравнение прямой i -ой системы имеет вид. $f_i(x, y) = \text{const}$.

Пусть $(X_{ij}(h_i, h_j), Y_{ij}(h_i, h_j))$ – точка пересечения прямых $A_i x + b_i y = h_i$ и $A_j x + b_j y = h_j$. Тогда

$$X_{ij} = \frac{b_j h_i - b_i h_j}{b_j A_i - b_i A_j}, Y_{ij} = \frac{-A_j h_i + A_i h_j}{b_j A_i - b_i A_j}. \quad (12)$$

Пусть φ_{ijk} – проекция вектора (X_{ij}, Y_{ij}) на нормаль к k -ой системе. Тогда

$$\varphi_{ijk} = A_k X_{ij} + b_k Y_{ij}$$

или

$$\varphi_{ijk} = \frac{b_j A_k - b_k A_j}{b_j A_i - b_i A_j} \cdot h_i + \frac{b_k A_i - b_i A_k}{b_j A_i - b_i A_j} \cdot h_j, \quad (13)$$

или $\varphi_{ijk} = \lambda_{ijk} h_i + \lambda_{jik} h_j$, где

$$\lambda_{ijk} = \frac{b_j A_k - b_k A_j}{b_j A_i - b_i A_j} = \frac{\begin{vmatrix} A_k & b_k \\ A_j & b_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_k & b_k \\ A_j & b_j \end{vmatrix}}. \quad (14)$$

Проекция Π_l многоугольника M на нормаль к l -й системе равна

$$\Pi_l = \max f_l(B_i) - \min f_l(B_i), \quad (15)$$

где $B_l, \dots, B_k$ — вершины M . Соотношение (15) можно переписать в несколько другом виде:

$$\begin{aligned} \Pi_l &= \max \varphi_{ijl}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j) - \min \varphi_{ijl}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j), \\ \Pi_l &= \max(\lambda_{ijl} h_i - \lambda_{jil} h_j) - \min(\lambda_{ijl} h_i - \lambda_{jil} h_j), \end{aligned} \quad (16)$$

где максимум и минимум берутся по парам систем (i, j) , образующих вершины M .

Через $\overline{\max}$ (и, соответственно, $\overline{\min}$ будем обозначать второй по величине элемент набора.

3.4. Выражения для относительного числа блоков данного типа

Мы будем рассматривать распределения с точки зрения площадного закона, т.е. в предположении, что данная точка о содержит многоугольник M .

В общих чертах отличие между натуральным и площадным законами можно объяснить так: точка 0 попадает в многоугольник M с кратностью, пропорциональной его площади. Выпишем теперь условия пересечения прямой с многоугольником M .

Прямая $L : a_k x + b_k y = h$ пересекает M , если

$$\min_{ijk} h \leq h \leq \max_{ijk} h, \quad (17)$$

и отсекает одну вершину, образуя многоугольник M' , у которого на одну вершину больше, чем M , если

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h < \max_{ij} \varphi_{ijk}$$

— верхнее отсечение угла, либо

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} < -h < \min_{ij} \varphi_{ijk}$$

— нижнее отсечение угла.

Пусть 0 — начало координат, M — многоугольник, содержащий 0 . С каждой i -й системой связаны величины h_i^+, h_i^- .

k -я система добавляет к M только верхнюю сторону, если верны неравенства

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h^+ < \max_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^- < \min_{ij} \varphi_{ijk},$$

и только нижнюю сторону, если верны неравенства:

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} > -h^+ > \min_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^+ > \min_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Добавляются и верхняя и нижняя стороны, если

$$\overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk} < -h^+ < \max_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$\overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk} > -h^- > \min_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Наконец, прямая k -й системы не пересекает M , если

$$-h^- < \overline{\min}_{ij} \varphi_{ijk},$$

$$-h^+ < \overline{\max}_{ij} \varphi_{ijk}.$$

Поскольку $0 \in M$, $\max_{ij} \varphi_{ijk} > 0$, $\min_{ij} \varphi_{ijk} < 0$.

Выпишем теперь формулу для вероятности P_l того, что многоугольник M не пересечен прямыми l -ой системы.

Для равноотстоящей модели:

$$P^{\text{равн}}(M) = (d_l - \Pi_l M) / d_l, \quad \text{где } X^+ = \begin{cases} X & \text{при } X > 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (18)$$

где d_l – расстояние между соседними следами l -ой системы.

Для пуассоновской модели:

$$P_l^{\text{Пуасс}}(M) = \exp(-\Pi_l M / d_l). \quad (19)$$

Воспользовавшись выражением (16) для проекции $\Pi_l M$ многоугольника M на нормаль к l -ой системе, равенства (18),(19) можно переписать в виде:

$$P^{\text{равн}}(M) = \left(d_l + \min_{ij\bar{l}} \varphi_{ij\bar{l}} \max_{ijl} \varphi_{ijl} \right)^+ / d_l, \quad (20)$$

$$P^{\text{Пуасс}}(M) = \exp \left[\left(\min_{ij\bar{l}} \varphi_{ij\bar{l}} \max_{ijl} \varphi_{ijl} \right) / d_l \right]. \quad (21)$$

Рассмотрим разбиение плоскости системами прямых и многоугольник разбиения M , содержащий точку 0 . Его тип, т.е. какими системами образованы его стороны – зависит, конечно, от значения параметров h_i^+ , h_i^- , характеризующих сдвиг. Поскольку направления прямых постоянны, меняются только параметры сдвига, важно выяснить зависимость типа M от значений h_i .

Пусть $D_{\mathfrak{Y}}$ – множество наборов h_i^+ , h_i^- , соответствующих данному типу $\mathfrak{Y}$.

Пусть стороны любого многоугольника M образуют системы с номерами $i_1, \dots, i_m$. Забудем временно про другие системы, тогда через $\hat{D}_{\mathfrak{Y}}$ мы обозначим множество значений параметров $h_{i_1}, \dots, h_{i_m}$ таких, что точка 0 попадает в многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$. В равноотстоящем случае $h_i^+ + h_i^- = d_i$, поэтому h_i^+ определяют h_i^- и мы будем рассматривать множества $\bar{D}_{\mathfrak{Y}}$, $\hat{D}_{\mathfrak{Y}}$ значений параметров h_i^+ в этом случае.

Относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ в равноотстоящем случае с точки зрения площадного закона $\mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}}$ в равноотстоящей модели равно:

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = \frac{I}{D_{i_1} \dots D_{i_k}} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1 \dots i_k} P^{\text{равн}} d_{i_1} \dots d_{i_k}. \quad (22)$$

Смысл этого равенства состоит в том, что вероятность для M иметь тип $\mathfrak{Y}$ ищется как произведение вероятностей того, что системы с номерами $i_1, \dots, i_k$ действительно образуют многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$ и вероятности того, что остальные системы не пересекают M .

Мы воспользовались теоремой эргодичности.

Воспользовавшись равенством (18), формулу (22) можно переписать в виде:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = I/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1, \dots, i_k} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}] dh_{i_1} \dots dh_{i_k},$$

где

$$D = \prod_{i=1}^n d_i. \quad (23)$$

В Пуассоновской модели для относительного числа $\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}}$ справедлива формула:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = I/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} P_1^{\text{Пуасс}} \dots P_n^{\text{Пуасс}} dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}, \quad (24)$$

где $i_1, \dots, i_k$ – системы, образующие тип $\mathfrak{Y}$, e_i – это $+$ или $-$. Присутствуют те $dh_{\alpha}^{\pm}$, у которых прямые $a_{\alpha}x + b_{\alpha}y = -h_{\alpha}^{-}$ или $a_{\alpha}x + b_{\alpha}y = h_{\alpha}^{+}$ образуют тип $\mathfrak{Y}$.

Смысл равенства (24) заключается в следующем: рассматриваются значения параметров $h_{i_k}^e$, которым соответствует набор прямых, образующих стороны многоугольника данного типа. Однако, этого мало, нужно еще, чтобы M не был пересечен другими прямыми. Поскольку модель пуассоновская, нужно учесть и возможность пересечения прямыми самих систем с номерами $i_1, \dots, i_k$, соответствующие вероятности равны $P_{i_1}^{\text{Пуасс}}, \dots, P_{i_k}^{\text{Пуасс}}$ прямые i -й системы ничего не знают друг про друга.

Равенство (24) можно переписать в виде:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum \Pi_1(M)/d_1 \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}, \quad (25)$$

или в виде

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k}. \quad (26)$$

Чтобы перейти от площадного закона к натуральному, нужно учесть, что в формулах (22),(24) каждый блок учитывается с кратностью пропорциональной площади. Пусть $\bar{S}$ – средняя площадь блока. Для натурального закона формулы (22),(24) переписутся в следующем виде. Для равноотстоящей модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = \bar{S}/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l \neq i_1 \dots i_k} S(M)^{-l} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}]^{+} dh_{i_1} \dots dh_{i_k}.$$

Для пуассоновской модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = \bar{S}/D \cdot \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k} S(M)^{-l},$$

где $S(M)$ – площадь многоугольника M типа $\mathfrak{Y}$, образованного системами с номерами $i_1, \dots, i_k$.

Однако задача определения $S(M)$ не очень проста: чтобы избежать определения $S(M)$ при нахождении натурального закона распределения блоков по типам, следует пойти другим путем.

Мы будем определять относительное число блоков данного типа $\mathfrak{Y}$. Перенумеровав системы, можно считать, что тип $\mathfrak{Y}$ образован системами с номерами $1, \dots, k$ причем направления систем с номерами $1, \dots, k$ меняется по часовой стрелке.

Кроме того, одна из вершин M образована пересечением прямых первой и второй системы. Взяв эту точку 0 за начало координат и выбрав подходящим образом направление осей, получим $h_1 = h_2 = 0$ и кроме того e_1, e_2 имеют значение $+$.

Пусть τ_{12} – количество точек пересечения первой и второй систем в пересечении на единицу площади (или, что тоже самое количество $1, 2$ - элементарных блоков).

Относительное число блоков данного типа $\mathfrak{Y}$ с точки зрения натурального закона мы будем искать так: для каждой точки 0 пересечения прямых первой и второй системы, рассмотрим многоугольник M с вершиной 0 (один из четырех) такой, что e_1 и e_2 имеют значение $+$ (и $h_1^- = h_2^- = 0$). Найдем вероятность $P_{\mathfrak{Y}}$ того, что M имеет тип $\mathfrak{Y}$. Относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ в единице объема, таким образом, равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot V_{cp} \tau_{12}$ а относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ с точки зрения натурального закона равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot \tau_{12} / \tau$, где $\tau = V_{cp}^{-1}$ – это относительное число блоков в единице объема. Таким образом, относительное число блоков типа $\mathfrak{Y}$ равно $P_{\mathfrak{Y}} \cdot V_{cp} \tau_{12}$, и задача сводится к задаче определения $P_{\mathfrak{Y}}$.

Величина $P_{\mathfrak{Y}}$ ищется аналогично величине $\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}}$, только по h_1^- и h_2^- (а в равноотстоящей модели по h_1^+ и h_2^+) интегрировать не надо – эти величины фиксированы. Формулы для натурального закона примут следующий вид.

Для равноотстоящей модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{равн}} = V_{cp} \tau_{12} \frac{d_1 d_2}{D} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \prod_{l > k} [d_l - \max \varphi_{ijl} + \min \varphi_{ijl}]^+ dh_3 \dots dh_k. \quad (27)$$

Для пуассоновской модели:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}}^{\text{Пуасс}} = V_{cp} \tau_{12} \frac{d_1 d_2}{D} \int_{\hat{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(-l \sum_l \frac{\max_{ij} \varphi_{ijl} - \min_{ij} \varphi_{ijl}}{d_l} \right) dh_{i_1}^{e_1} \dots dh_{i_k}^{e_k} S(M)^{-l}. \quad (28)$$

Область значений параметров h^+, h^- задается дополнительным условием $h_1^- = h_2^- = 0$. Определение величин $\max_{ij} \varphi_{ijl}, \overline{\max_{ij} \varphi_{ijl}}, \min_{ij} \varphi_{ijl}, \overline{\min_{ij} \varphi_{ijl}}$.

Основная идея определения значения функционала, связанного с $l-1$ системой в крайней точке многоугольника M заключается в том, что крайняя вершина определяется только направлением и образующих ее прямых. Занумеровав стороны M в направлении часовой стрелки мы затем должны найти две стороны, такие, что направление l -й системы заключено между их направлением. Такая пара сторон выбирается двумя способами *верхним* и *нижним*. Перейдем к точному изложению.

Пусть $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$ – векторы нормали к сторонам многоугольника M , направленные внутрь, взятые в направлении по часовой стрелки.

Назовем прямую L l -й системы заданной уравнением $a_1 x + b_1 y = c$ *верхней*, если мы рассматриваем полупространство $a_1 x + b_1 y \leq c$ и *нижней*, если рассматриваем полупространство

$a_1x + b_1y \geq c$. Прямая, с указанием верхняя она или нижняя, характеризуется вектором нормали $\vec{n}$, направленным в сторону рассматриваемой полуплоскости и расстоянием h до 0.

Отложим из т. 0 векторы $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$. Введем для удобства циклическую нумерацию. Положим $\vec{n}_{k+c} = \vec{n}_c$ для всех натуральных c . Пусть вектор $\vec{n}_c$ попадет между $\vec{n}_i$ и $\vec{n}_{i+1}$, а вектор $\vec{n}_1$ попадет между $\vec{n}_p$ и $\vec{n}_{p+1}$.

С точки зрения l -й системы крайние точки M – это угловые точки между i -ой и $i+1$ -й, а также p -й и $p+1$ -й сторонами.

Как легко видеть, $\max_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \varphi_{i,i+l,l}, \min_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \varphi_{p,p+l,l}$. Поэтому

$$\Pi_1(M) = \varphi_{i,i+l,l} - \varphi_{p,p+l,l} = \lambda_{i,i+l,l} - h_i^{e_i} - \lambda_{i+l,i,l} - h_{i+l}^{e_{i+l}} \lambda_{p,p+l,l} - h_i^{e_p} - \lambda_{p+l,p,l} - h_{p+l}^{e_{p+l}}. \quad (29)$$

Вершина M , в которой линейный функционал достигает второе по величине значение, будет соседней с той, где он максимален.

Поэтому:

$$\overline{\max}_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \max [\varphi_{i-1,i,l}, \varphi_{i+1,i+2,l}], \quad (30)$$

и аналогично

$$\overline{\min}_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta,l} = \min [\varphi_{p,p-1,l}, \varphi_{p+1,p+2,l}]. \quad (31)$$

3.5. Определение площади многоугольника M .

Мы сохраняем всю нумерацию и все обозначения предыдущего параграфа.

Пусть $S_{ijk}(h_i, h_j, h_k)$ – площадь треугольника, образованного прямыми

$$a_ix + b_iy = h_i; a_jx + b_jy = h_j; a_kx + b_ky = h_k.$$

или

$$S_{ijk} = (X_{ij} - X_{ik})(Y_{ij} - Y_{jk}) - (X_{ij} - X_{jk})(Y_{ij} - Y_{ik}) \quad (32)$$

где X_{ij}, Y_{ij} определяются равенствами (12).

Пусть теперь системы, образующие многоугольник занумерованы как в предыдущем пункте. Основная идея состоит в том, что площадь многоугольника N' , получаемого из N отсечением угла, ищется как разность площади N и площади отрезаемого треугольника. Многоугольник N можно получить с помощью отрезания треугольников от треугольника.

Пусть многоугольник N' получается из N отсечением угла сверху l -й системой, тогда:

$$S(N') = S(N) - S_{i,j+l,l}.$$

Вернемся к нашему многоугольнику M . Если с M последовательно делать следующую процедуру: удалить сторону, а остальные продолжить, то в конце концов получится треугольник. Такая процедура соответствует добавлению треугольников.

Пусть i -я, j -я, m -я стороны M , будучи продолженными, образуют треугольник, содержащий M .

Справедлива формула:

$$S(M) = S_{ijm} - \sum_{\tau=j}^{m-1} S_{\tau,m,\tau+1} - \sum_{\tau=i}^{j-1} S_{\tau,j,\tau+1} - \sum_{\tau=m}^{i-1} S_{\tau,\tau+1,i}. \quad (33)$$

Напомним, что нумерация индексов циклическая. Смысл формулы (33) состоит в том, что всякий раз следующая по часовой стрелке сторона отсекает один треугольник. Формулы (32),(33) позволяют эффективно находить площади блоков. Отметим также, что чаще всего встречаются трех, четырех и пятиугольники. В относящихся к ним формулах можно явно вычислить интегралы. Полученные формулы приведены в приложении.

3.6. Случай разброса направлений

В этом случае следует говорить о плотности вероятности того, что выбранный блок имеет тип $\mathfrak{Y}$ а в понятие типа включить направления сторон.

Мы будем рассматривать только пуассоновскую модель, поскольку результат в пределе от большого числа $n \rightarrow \infty$ равноотстоящих систем, каждая из которых дает малый вклад таков же, как и для $n \rightarrow \infty$ пуассоновских систем.

Назовем типом $\mathfrak{Y}$ блока M набор направлений нормалей к сторонам M , ведущих внутрь M . Нумеровать эти нормали мы будем по направлению часовой стрелки.

Пусть $\lambda(\vec{l})$ характеризует интенсивность линейного процесса с направлением нормали $\vec{l}$, иными словами, $\lambda = dN/2 d\varphi$, где dN – мат. ожидание числа точек пересечения единичного вектора $\vec{l}$ с прямыми, нормаль к которым образует с $\vec{l}$ угол не больше $d\varphi$. Как известно, вероятность P того, что многоугольник M не пересечен системами, равна

$$P = \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}(\varphi)}(M) \lambda_{\vec{l}(\varphi)} d\varphi \right] \quad (34)$$

Сравним (34) с формулами для $P_{\text{Пуасс}}$.

С помощью перехода к пределу при числе систем $n \rightarrow \infty$ получаем равенства для площадного закона:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}} = \int_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} \right] dh_1 \cdots dh_k, \quad (35)$$

Для натурального закона:

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}} = \frac{\lambda_{\vec{l}_1} \cdot \lambda_{\vec{l}_2} \cdot |\vec{l}_1 \wedge \vec{l}_2|}{\tau} \int_{D'_{\mathfrak{Y}}} \exp \left[- \int \Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} \right] dh_3 \cdots h_k \quad (36)$$

где $\tau = S_{cp}^{-l}, h_i, D_{\mathfrak{Y}}$ и $D'_{\mathfrak{Y}}$ – имеют тот же смысл, т.е. h_i – это расстояние от прямой, образующей i -ю сторону до 0 и меняется от 0 до ∞ , $D_{\mathfrak{Y}}$ множество наборов значений $\{h_i\}$, таких, что заданный ими набор прямых образует стороны многоугольника M , содержащего точку 0. $D'_{\mathfrak{Y}}$ – соответственно, множество наборов $\{h_i\}$, таких, что две прямые, проходящие через 0 с нормальными $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ вместе с остальными прямыми, образовывали многоугольник M , содержащий точку 0.

Соотношения (35) можно переписать в несколько другом виде. Заметим, что:

$$\Pi_{\vec{l}}(M) \lambda_{\vec{l}} d\vec{l} = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_l(X_{i,i+l}; Y_{i,i+l}) dl \quad (37)$$

Напомним, что $f_l(X_{i,i+l}; Y_{i,i+l})$ есть проекция i -й вершины на прямую, параллельную $\vec{l}$ и проходящую через 0.

Здесь α_i – аргумент, $\vec{n}_i$ – вектора нормали, соответствующей i -ой стороне. Если аргумент $\vec{l}$ заключен между α_i и α_{i+1} , то i -я точка будет крайней. Формула (37) соответствует равенству (21). Как и в предыдущих пунктах вершины имели циклическую нумерацию, так и в

формулах (34),(35),(37) углы расположены на окружности и $\int_{\alpha}^{\beta'}$ понимается как интеграл по соответствующей дуге.

Окончательно имеем:

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{Y}} = \int_{\mathfrak{D}_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(- \int \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos(\varphi - \alpha_i) \lambda d\varphi \cdot \sqrt{X_{i,i+l}^2 Y_{i,i+l}^2} dl \right) dh_1 \cdots dh_k, \quad (38)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mathfrak{Y}} = \frac{\lambda \vec{l}_1 \lambda \vec{l}_2 |\vec{l}_1 \Lambda \vec{l}_2|}{\tau} \times \int_{\mathfrak{D}'_{\mathfrak{Y}}} \exp \left(- \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \cos(\varphi - \alpha_i) \lambda d\varphi \sqrt{X_{i,i+l}^2 Y_{i,i+l}^2} dl \right) dh_3 \cdots dh_k \quad (39)$$

4. Использование идеи движущейся прямой

Для пуассоновской модели использование соображений параграфа 4 позволяет упростить формулы (24). Изучение многоугольника M целесообразно проводить, двигаясь последовательно по его сторонам. Фактически мы это и делали. Более того, смысл условия на значения параметров h_l , соответствующих области $D_{\mathfrak{Y}}$ – это условия на прямые, которые должны образовывать соседние стороны.

Метод движущейся прямой позволяет учитывать эти условия автоматически и следить только за парой сторон. Все геометрические соображения предыдущего пункта здесь учтены автоматически. мы подчеркиваем, что метод движущейся прямой соответствует и наиболее эффективному изучению одного многоугольника.

Рассмотрим многоугольник M типа $\mathfrak{Y}$. Движущаяся прямая будет параллельна оси OX . Пусть k – число вершин M . Ориентируем M по часовой стрелке, пусть k_1 – число сторон M , образующих с осью OX угол меньше 90° , а k_2 – число сторон M , образующих с осью OX угол больше 90° .

Будем изучать процесс движения оси OX .

Если в начальный момент OX занимает *нижнее* положение, касаясь M снизу, то в момент t ось OX будет касаться M сверху.

5. Метод Гудмана для плоскости

Рассмотрим теперь задачу распределения блоков по типам, возникающую при изучении метода Гудмана, для плоскости. При этом выработка предполагается полуплоскостью, а ее граница – прямой. Эту прямую мы будем обозначать M . След системы трещин будет системой точек (равноотстоящей если соседние трещины системы равноотстоят друг от друга и соответственно, пуассоновской, если они распределены по закону Пуассона), а след блока будет отрезком. Его типом будет пара (i, j) , где i – номер системы точек, к которому принадлежит левый конец отрезка, а j – номер системы точек, к которой принадлежит его правый конец. Чтобы можно было говорить о *правых* и *левых* концах границу выработки следует ориентировать. задача отыскания распределения отрезков по типам возникает из задач плоского равновесия, подобно тому, как задача отыскания распределения многоугольников по типам возникает из задач пространственного равновесия. Задача равновесия для плоского случая возникает, хотя и очень редко, в случае, когда блоки имеют цилиндрическую форму, а выработка проходит параллельно их осям.

Задачи отыскания распределения отрезков по типам возникает также и при изучении керн; кроме того, они представляет и самостоятельный интерес.

Как обычно, мы изучим пуассоновскую и равноотстоящую модели.

Пусть $A_1, \dots, A_k$ - системы точек, d_i - средние расстояния между соседними точками системы A_i .

Для наугад выбранного отрезка прямой M длины L , как B пуассоновском, так и в равноотстоящем случаях, математическое ожидание числа точек A_i , попавших в него, равно L/d_i , а математическое ожидание общего числа точек, попавших в него, равно $L \cdot \sum_{i=1}^k I/d_i = L \cdot \lambda$, где $\lambda = \sum_{i=1}^k I/d_i$.

Рассмотрим пуассоновскую модель. Пусть точка $A \in A_i$. Какова вероятность P_j того, что, соседняя справа точка B из объединения всех A_α принадлежит A_j ? Обозначим через P_{jl} плотность вероятности того, что $B \in A_j$ и положим $p_m = \operatorname{ctg} \alpha_m$, $q_m = \lambda_m \cdot \sin(\alpha_m - \alpha_{m-1}) / \sin \alpha_{m-1}$, где

$$r_m = \sum_{\alpha_i > \alpha_m} \sin(\alpha_i - \alpha_m) / \sin \alpha_m \cdot \lambda_i, N^m = N_\Pi(m, l, t).$$

Тогда можем записать:

$$\frac{\partial N_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial N_\Pi}{\partial l} \cdot p_m + q_m N^{m-1} - r_m N^m = 0. \quad (40)$$

Уравнения (40) можно проинтегрировать с помощью преобразования Лапласа.

Рассмотрим прямую L , параллельную ОХ, пересекающую случайное разбиение плоскости. Рассмотрим те многоугольники, которые L пересекает. Назовем *нижней частью* блока ту его часть, которая находится под секущей прямой.

Рассмотрим процесс движения левого конца сечения при движении секущей прямой (движение правого конца изучается аналогично). Через $N_L(m, l, t)$ мы обозначаем плотность числа блоков в единице длины сечения, проекция нижней части которых на ось OY равна t , а координаты X смещения левого конца относительно начального положения равна l , и кроме того, левым концом пройдено m вершин; $I < m \leq k_2$, причем все вершины образованы прямыми, образующими тип $\mathfrak{Y}$ в нужном порядке.

Аналогично определяется $N_L(m, l, t)$, где $I < m \leq k_1$.

Относительное число блоков, имеющих тип $\mathfrak{Y}$ по отношению к натуральному закону, равно:

$$\bar{N}_{\mathfrak{Y}} = \bar{d} \int_0^\infty dt/t \int_{-\infty}^\infty N_\Pi(k_1, l, t) N_L(k_2, -l, t) dl \quad (41)$$

где d - средняя проекция многоугольника на ось OY . Знаменатель t введен потому, что при оси ОХ многоугольники учитываются с кратностями, пропорциональными проекции на ось OY ; для перехода к натуральному закону это нужно компенсировать, для чего и введен знаменатель t . Достаточно уметь определять только N_Π (N_L находится симметрично).

Точно так же, как и в параграфе 4 составляется уравнение:

$$\frac{\partial N_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial N_\Pi}{\partial l} \operatorname{ctg} \alpha_m + \lambda_m N_\Pi(m - I, l, t) \sin(\alpha_m - \alpha_{m-1}) / \sin \alpha_{m-1} \quad (42)$$

$$- \left(\sum_{\alpha_i > \alpha_m} \sin(\alpha_i - \alpha_m) / \sin \alpha_m \cdot \lambda_i \right) N_\Pi(m, l, t) = 0. \quad (43)$$

$|AB| = 1$, а через $\hat{P}_{jl}$ - плотность вероятности того, что точка C - ближайшая справа к точке A , точка системы A_j находится на расстоянии равном l .

Как легко видеть, справедливы равенства:

$$P_j = \int_0^\infty \hat{P}_{jl} dl, \quad (44)$$

$$\hat{P}_{jl} = \exp(-l/d_j) / d_j. \quad (45)$$

Пусть $Q_j(R)$ – есть вероятность того, что наугад взятый отрезок длины R не содержит ни одной точки систем $A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_k$.

Заметим, что:

$$P_{jl} = \hat{P}_{jl} \cdot \hat{Q}_j(l). \quad (46)$$

С другой стороны из-за независимости систем:

$$\hat{Q}_j(l) = \prod_{i \neq j} \tilde{Q}_i(l), \quad (47)$$

где $\tilde{Q}_i(l)$ – вероятность того, что отрезок длины l не попала ни одна точка из A_i . Очевидно, что $\tilde{Q}_i(l) = \exp(-l/d_i)$. Поэтому

$$\hat{Q}_j(l) = \exp\left(-l \cdot \sum_{i \neq j} I/d_i\right), \quad (48)$$

Следовательно,

$$P_{jl} = d_j \cdot \exp\left[-l \cdot \sum_{i \neq j} I/d_i\right]. \quad (49)$$

Окончательно имеем:

$$P_j = I/d_j^{-1} \int_0^\infty \exp(-l \cdot \lambda) d\lambda = d_j^{-1/\lambda} = d_j^{-1} \left[\sum I/d_i\right]^{-1}. \quad (50)$$

Пусть $L \rightarrow \infty$. Тогда число N_{ij} отрезков типа (i, j) , попавших в L , в единице длины равно произведению P_j на число точек A_i в единице длины или

$$N_{ij} = d_i^{-1} d_j^{-1} / \lambda. \quad (51)$$

Относительное же число отрезков типа (i, j) – $\hat{N}_{ij}$ равно N_{ij}/λ , поскольку λ – это общее число отрезков в единице длины, или:

$$\hat{N}_{ij} = d_i^{-1} d_j^{-1} / \lambda^2. \quad (52)$$

Заметим, что

$$\sum_{i,j} \hat{N}_{ij} = \left[\sum_{i,j} d_i^{-1} d_j^{-1}\right] / \lambda^2 = \left[\sum_i d_i^{-1}\right] \times \left[\sum_j d_j^{-1}\right] / \lambda^2 = \lambda \cdot \lambda / \lambda^2 = I$$

– как и должно быть.

Равноотстоящая модель. Рассмотрим случай, когда расстояния между соседними трещинами в системах равны. След i -ой системы A_i – система точек с расстоянием между соседними точками d_i . Пусть нумерация систем такова, что d_l – минимально. Рассмотрим отрезки, на которые системы $A_1, \dots, A_k$ разбивают прямую. Пусть P_{ij} – вероятность того, что наугад взятый отрезок имеет тип (i, j) или что то же самое, относительное число отрезков типа (i, j) . Пусть $\tilde{P}(l, i)$ – вероятность того, что случайно выбранный на прямой M интервал длины l не содержит точек A_i . Если $1 \geq d_i$, то $\tilde{P}(l, i) = 0$. Как легко видеть

$$\tilde{P}(l, i) = (d_i - l)^+ / d_i. \quad (53)$$

Пусть $A \subseteq \{I, \dots, k\}$ – подмножество множества индексов $\{I, \dots, K\}$; через $P_A(l)$ мы будем обозначать вероятность того, что на произвольно взятый интервал длины l на прямой M попадут точки B точности из семейств A_i , где $i \in A$ и только они. Через $\tilde{P}_A(l)$ мы будем обозначать эту вероятность, но при условии, что левый конец интервала принадлежит A_i .

Через $|A|$ мы будем обозначать число элементов множества A .

Справедливы равенства:

$$\tilde{P}_A(l) = \prod_i \hat{P}_{A,l}(l), \quad (54)$$

$$\tilde{P}_{A,m}(l) = \prod_{i \neq m} \hat{P}_{A,l}(l), \quad (55)$$

где $\hat{P}_{A,l}(l) = P(l, i)$, если $i \in A$ и $\hat{P}_{A,l}(l) = I - P(l, i)$ – в противном случае.

Заметим, что $P_{i,i} = 0$ при $i \neq I$, поскольку на отрезок типа (I, I) длина которого равна d_i , обязательно попадет точка из A_l . Найдем $P_{l,l}$. Пусть $\bar{P}_{l,l}$ число отрезков типа (I, I) в единице длины на прямой M . Отметим, что число точек из A_l в единице длины равно

$$I/d_l \bar{P}_{l,l} = I/d_l \times P,$$

где P – вероятность того, что наугад взятый интервал длины d_l не содержит точек из $A_2, \dots, A_k$.

Иначе говоря:

$$\bar{P}_{l,l} = I/d_l \prod_{i=2}^k (d_i - d_l) / d_i. \quad (56)$$

Поскольку число точек всех систем (а следовательно, и отрезков) в единице длины равно λ , $P_{l,l} = \bar{P}_{l,l} / \lambda$. Или:

$$P_{l,l} = \frac{I/d_l}{\sum I/i} \prod_{i=2}^k (d_i - d_l) / d_i. \quad (57)$$

Найдем $P_{l,j}$. Рассмотрим отрезок $[AB]$ с вершинами в соседних точках системы A_l . Его длина равна d_l .

Вероятность того, что в отрезок $[AB]$ попадут точки систем A_i , где $i \in A$, и только они равна

$$\prod_{i=2}^k \hat{P}_{A,i}.$$

Если $j \notin A$, то при этом условии вероятность того, что соседняя справа точка систем к точке A принадлежит A_j , равна 0. Если же $j \in A$, то эта условная вероятность равна $I/|A|$, поскольку на отрезок AB длины d в этом случае попадет только по одной точке из A_i , где $i \in A$, и распределения этих точек на отрезке $[AB]$ равномерны и независимы. Окончательно имеем:

$$\bar{P}_{l,j} = \sum_{j \in A, l \notin A} I/|A| \cdot \tilde{P}_{A,l}(d_l). \quad (58)$$

Или

$$P_{l,j} = \frac{I/d_l}{\sum I/d_i} \cdot \sum_{j \in A, l \notin A} I/|A| \prod_{i=2}^k \hat{P}_{A,i}(d_l). \quad (59)$$

Найдем P_{ij} при $i \neq I, j \neq I, i \neq j$. Рассмотрим произвольную точку $A \in A_i$. Рассмотрим точку B справа от точки A , такую, что отрезок AB имеет длину d_l . Точно также устанавливается равенство:

$$\bar{P}_{i,j} = \sum_{l \in \mathcal{A}} I/|\mathcal{A}| \cdot \tilde{P}_{\mathcal{A},i}(d_l). \quad (60)$$

Откуда:

$$P_{i,j} = \frac{I/d_i}{\sum I/d_l} \cdot \sum_{\substack{\mathcal{A} \ni j \\ \mathcal{A} \ni l}} I/|\mathcal{A}| \prod_{m \neq l} \hat{P}_{\mathcal{A},m,l}(d_l). \quad (61)$$

Формулы (57),(58),(60) и определяют искомые вероятности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендал М., Моран П. Геометрические вероятности // М.: наука, 1972.
2. Сантано Д. Интегральная геометрия и геометрические вероятности // М.: наука, 1983.
3. Ж.Маттерон. Случайные множества и интегральная геометрия // Мир, 1978.
4. Анощенко Н.Н. Геометрический анализ трещиноватости и блочности месторождений облицовочного камня // М.: МГИ, 1983.
5. Р.В. Амбарцумян, И.Мекке, Д.Штоян. Введение в стохастическую геометрию // М.:Наука 1989.
6. Goodman, Shi-Gew-Hua. Block theory and some it's applications to rock mechanics // Prentice tcall, Ine. Englewood elitts, New sersey, 1985.
7. А.Я. Канель-Белов, В.В. Павлова, В.О. Кирова. Геометрические свойства сред, разбитых трещинами на блоки // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 5, с. 208–216.
8. Батугин С. А., Бирюков А. В., Крылатчанов Р. М. Гранулометрия геоматериалов // Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1989.
9. Касселс Дж. В. Введение в теорию диофантовых приближений // Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961.
10. Количко А. В. Опыт оценки блочности трещиноватого массива скальных пород // Труды Гидропроекта, Сб.14, Москва–Ленинград, Энергия, 1966.
11. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности // М.:Науна 1972.
12. Никитин В. В. Разработка Горно–Геометрического метода прогнозирования выхода блоков для рациональной отработки месторождений облицовочного камня. // Дисс. на соиск. канд. техн. наук, Москва, МГИ, 1987. с.97. Геометрия блочных сред 24.
13. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР, 1979, т. 247, N4 – с. 829–831.
14. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. О свойствах дискретности горных пород // Москва, Ин-т физики Земли им. О. Ю. Шмидта, 1981 (36с.).

15. Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф. О свойстве дискретности горных пород // *Физика Земли*, 1982, № 12, с. 3—18.
16. Садовский М. А. О распределении твердых отдельностей // *ДАН СССР*, 1983, т.269, №1, с.69—72.

REFERENCES

1. Kendal, M., Moran, P., 1972. "Geometric Probabilities", *M.: Nauka*.
2. Santano, D., 1983. "Integral Geometry and Geometric Probabilities", *M.: Nauka*.
3. Matheron, J. 1978. "Random Sets and Integral Geometry", *M.: Mir*.
4. Anoshenko, H.H., 1983. "Geometric analysis of fracturing and blockiness of deposits of facing stone", *M.: MI'I*.
5. Hambartsumian, R.V., Mekke, I., Shtoyan, D., 1989. "Introduction to Stochastic Geometry", *M.: Nauka*.
6. Goodman, Shi-Gew-Hua, 1985. "Block theory and some of it's applications to state mechanics", *Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey*.
7. Kanel-Belov, A.Ya., Pavlova, V.V., Kirova, V.O., 2023. "Geometric properties of rocks, broken into blocks by cracks", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, Iss. 5, pp. 208—216.
8. Batugin, S. A., Biryukov, A. V., Krylatchanov, R. M., 1989. "Granulometry of geomaterials", *Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch*.
9. Kassels, J.V., 1961. "Introduction to the Theory of Diophantine Approximations", *Moscow, Publishing House of Foreign Literature*.
10. Kolichko, A. V., 1966. "Experience in assessing the blockiness of a fractured rock massif", *Proceedings Hydroproject, Collection 14, Moscow-Leningrad, Energia*.
11. Kendall, M., Moran, P., 1972. "Geometric Probabilities", *M. Nauchna*.
12. Nikitin, V. V., 1987, *Development of the Mining-Geometric Method of Block Yield Prediction for rational mining of the deposits of facing stone*, Dissertation for a Candidate of Sci. Sci. (Technical Sciences), Moscow, MGI, 1987. с.97. Geometry of Block Media 24.
13. Sadovskii, M. A., 1979. "Natural lumpiness of rock", *Dokl. of the USSR Academy of Sciences*, Vol. 247, № 4, pp. 829—831.
14. Sadovskii, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1981. "On the properties of discreteness of rocks", *Moscow, Schmidt Institute of Physics of the Earth. O. Yu. Schmidt*, 36 p.
15. Sadovskii, M. A., Bolkhovitinov, L. G., Pisarenko, V. F., 1982. "On the discreteness property of rocks", *Physics of the Earth*, № 12, p. 3—18.
16. Sadovskii M. A., 1983. "On the Distribution of Solid Separations", *DAN USSR*, Vol. 269, № 1, pp. 69—72.

Получено: 05.04.2024

Принято в печать: 28.06.2024