ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 2.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-67-81

Обобщенное преобразование Данкля на прямой в обратных задачах теории приближений[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Изучается обобщенный гармонический анализ Данкля на прямой, зависящий от параметра $r \in \mathbb{N}$. Случай $r = 0$ ответствует обычному гармоническому анализу Данкля. Все конструкции зависят от параметра $r \geqslant 1$. С помощью оператора обобщенного сдвига определяются разности и модули гладкости. С помощью дифференциально-разностного оператора определяется пространство Соболева. Исследуется приближение функций из пространства $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ из класса $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, обладающих свойством $f^{(2s+1)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \ldots, r-1$. Для целымх функций из класса $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ доказываются неравенства, которые используются в обратных задачах теории приближений. В зависимости от поведения величин наилучшего приближения функции дается оценка модуля гладкости функции, а так же модуля гладкости от степени ее дифференциально-разностного оператора второго порядка. Дается условие асимптотического равенства между наилучшим приближением функции и ее модулем гладкости.

Ключевые слова: Обобщенное преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, свертка, модуль гладкости, целые функции экспоненциального типа, обратные неравенства теории приближений.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Обобщенное преобразование Данкля на прямой в обратных задачах теории приближений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 67–81.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-30001, https://rscf.ru/projecs/23-71-30001/, в МГУ им. М.В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 2.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-67-81

Generalized Dunkl transform on the line in inverse problems of approximation theory

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

The generalized Dunkl harmonic analysis on the line, depending on the parameter $r \in \mathbb{N}$, is studied. The case $r = 0$ corresponds to the usual Dunkl harmonic analysis. All designs depend on the parameter $r \geqslant 1$. Using the generalized shift operator, differences and moduli of smoothness are determined. Using the differential-difference operator, the Sobolev space is defined. We study the approximation of functions from space $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ by entire functions of exponential type not higher than σ from the class $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ that have the property $f^{(2s+1)}(0) = 0$, $s = 0, 1, \ldots, r-1$. For entire functions from the class $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, inequalities are proved that are used in inverse problems of approximation theory. Depending on the behavior of the values of the function best approximation, an estimate is given of the modulus of smoothness of the function, as well as the modulus of smoothness on the degree of its second-order differential-difference operator. A condition is given for asymptotic equality between the best approximation of the function and its modulus of smoothness.

Keywords: Generalized Dunkl transform, generalized translation operator, convolution, modulus of smoothness, entire functions of exponential type, inverse inequalities of approximation theory.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2024. “Generalized Dunkl transform on the line in inverse problems of approximation theory” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 67–81.

1. Введение

В 2012 г. С. Бен Саид, Т. Кобаяши и Б. Орстед [1] определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное унитарное преобразование Фурье. В одномерном случае оно является интегральным оператором

$$\mathcal{F}_{k,a}(f)(y) = c_{k,a} \int_{\mathbb{R}} b_{k,a}(xy) f(x) |x|^{2k+a-2}\, dx \tag{1}$$

с ядром

$$b_{k,a}(x) = j_\lambda\Big(\frac{2}{a}\,|x|^{a/2}\Big) + \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+2/a)}\,\frac{x}{(ai)^{2/a}}\, j_{\lambda+\frac{2}{a}}\Big(\frac{2}{a}\,|x|^{a/2}\Big).$$

Здесь $a > 0$, $2k + a - 1 > 0$, $c_{k,a}^{-1} = 2a^\lambda \Gamma(\lambda+1)$, $\lambda = (2k-1)/a$, $J_\lambda(x)$ — функция Бесселя, $j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) x^{-\lambda} J_\lambda(x)$ — нормированная функция Бесселя.

При $k=0$, $a=2$ оно совпадает с классическим преобразованием Фурье, а при $a=2$ — с преобразованием Данкля (см. [2, 3]).

Пусть $\lambda \geqslant -1/2$, $d\nu_\lambda(x) = (2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1))^{-1}|x|^{2\lambda+1}\,dx$ – мера на $\mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ — лебегово пространство измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\nu_\lambda} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,d\nu_\lambda(x)\Big)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$L^\infty(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) = C_b(\mathbb{R})$ — множество непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$, $C^\infty(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, $C^\infty_\Pi(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, имеющих полиномиальный рост на бесконечности, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций.

В [4], отправляясь от преобразования (1) при $a = 2/(2r+1)$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\lambda = (2r+1)(k-1/2) \geqslant -1/2$, с помощью замены переменной получено двупараметрическое семейство унитарных преобразований

$$\mathcal{F}_r^\lambda(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_{r,\lambda}(-xy)\,d\nu_\lambda(x) \tag{2}$$

с ядром

$$e_{r,\lambda}(xy) = j_\lambda(xy) + i(-1)^r \frac{(xy)^{2r+1}}{2^{2r+1}(\lambda+1)_{2r+1}} j_{\lambda+2r+1}(xy). \tag{3}$$

При $r=0$ оно совпадает с преобразованием Данкля и $\mathcal{F}_0^\lambda(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Если $r \geqslant 1$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\colon f^{(2s+1)}(0) = 0\}$, то $\mathcal{F}_r^\lambda(\mathcal{S}_r(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_r$. Таким образом, преобразование (2) при $r \geqslant 1$ хоть и имеет свои особенности, но очень похоже на преобразование Данкля. Мы называем его (r,λ)-обобщенным преобразованием Данкля или просто обобщенным преобразованием Данкля. Его изучение продолжено в работах [5, 6, 7].

Помимо обобщенного преобразования Данкля обобщенный гармонический анализ Данкля на прямой со степенным весом $|x|^{2\lambda+1}$ осуществляется с помощью дифференциально-разностного оператора, называемого обобщенным лапласианом Данкля,

$$\Delta_{\lambda,r} f(x) = f''(x) + \frac{2\lambda+1}{x} f'(x) - (2r+1)(\lambda+r+1/2)\frac{f(x)-f(-x)}{x^2} \tag{4}$$

и операторами обобщенного сдвига

$$\tau^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{r,\lambda}(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(z)\,d\nu_\lambda(z) \tag{5}$$

и

$$T^y f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\lambda(yz) e_{r,\lambda}(xz) \mathcal{F}_r^\lambda(f)(z)\,d\nu_\lambda(z). \tag{6}$$

В многомерном гармоническом анализе Данкля ($r=0$) ограниченность оператора (5) известна только при $p=2$, поэтому его заменой стал оператора сдвига (6) (см. [10]). Он также используется в гармоническом анализе Бесселя (см, например, [8, 9]). В одномерном случае ограниченность оператора (5) в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ известна уже для всех $r \in \mathbb{Z}_+$, поэтому естественно работать именно с ним. В работе [7] при $r \geqslant 1$ с его помощью доказаны прямые теоремы теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. В настоящей работе, продолжающей [7], доказываются обратные теоремы теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, также использующие оператор обобщенного сдвига (5).

Сформулируем основные наши результаты.

Теорема 6. Если $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1\le p\le\infty$, то для любой $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$

$$\omega_{m,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\frac{1}{n^{2m}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{2m-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Теорема 7. Если $1\le p\le\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ и некоторого $k\in\mathbb{N}$ числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty}j^{2k-1}E_{j,r}(f)_{p,d\mu_k}$ сходится, то $f\in W^{k,r}_{p,\lambda}$ и для $m,r\in\mathbb{N}$

$$\omega_{m,r}\Big(\frac{1}{n},(-\Delta_{\lambda,r})^kf\Big)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\frac{1}{n^{2m}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{2(m+k)-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$+\sum_{j=n+1}^{\infty}j^{2k-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Теорема 8. Пусть $1\le p\le\infty$, $m,r,n\in\mathbb{N}$. Асимптотическое равенство

$$E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\asymp\omega_{m,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}$$

справедливо для любой $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega_{m,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}\asymp\omega_{m+1,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для целых функций экспоненциального типа из класса $B^{\sigma,r}_{p,\lambda}$ доказаны достаточно общие неравенства.

Теорема 4. Если $\sigma>0$, $n_1,n_2\geqslant0$, $m_1,m_2\geqslant0$, $\rho=n_1+m_1-n_2-m_2\geqslant0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<\delta\leqslant t\leqslant1/(2\sigma)$, и $f\in B^{\sigma,r}_{p,\lambda}$, то

$$\delta^{-2m_1}\|\varDelta^{m_1}_{\delta,r}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1}f\|_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\sigma^{2\rho}t^{-2m_2}\|\varDelta^{m_2}_{t,r}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2}f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Характерной особенностью получаемых результатов является тот факт, что в одном весовом пространстве $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ мы имеем бесконечно много неравенств, зависящих от параметра $r\in\mathbb{N}$.

Пусть $A,B>0$. Мы будем писать $A\lesssim B$, если выполнено неравенство $A\leqslant cB$ с константой $c>0$, зависящей только от несущественных параметров, $A\asymp B$, если выполнено неравенство $c^{-1}B\leqslant A\leqslant cB$.

В настоящей работе в секции 2 приводятся некоторые элементы обобщенного гармонического анализа Данкля. В секции 3 доказываются неравенства для целых функций экспоненциального типа. В секции 6 доказываются обратные теоремы теории приближений, указывается условие асимптотического равенства между наилучшим приближением и модулем гладкости.

2. Некоторые элементы обобщенного гармонического анализа Данкля

Приведем некоторые свойства обобщенного гармонического анализа Данкля из [4, 5, 6, 7].

Пусть $\lambda>-1/2$. Обобщенное преобразование Данкля $\mathcal{F}^\lambda_r$ имеет равномерно ограниченное ядро. Оно является унитарным оператором и для $f\in L^2(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ справедливо равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}^\lambda_r(f)(y)|^2\,d\nu_\lambda(y)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,d\nu_\lambda(x).$$

Обратный оператор имеет вид

$$(\mathcal{F}_r^\lambda)^{-1}(g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e_{r,\lambda}(xy)g(y)\,d\nu_\lambda(y).$$

В пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ сходимость определяется счетным семейством полунорм

$$\rho_{j,N}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|(1+x^2)^N D^j f(x)|,\quad j,N\in\mathbb{Z}_+,\quad Df(x)=f'(x),$$

относительно которой $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ — замкнутое подпространство и $\operatorname{codim}\mathcal{S}_r(\mathbb{R})=r$.

Пусть $\mathcal{S}_r(\mathbb{R}_+)=\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ — подпространство Шварца четных функций, $\mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$ — пространство обобщенных функций на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_r'(\mathbb{R}_+)=\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ — пространство четных обобщенных функций медленного роста. Если для функции $\varphi\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, φ_e и φ_o — ее четная и нечетная составляющие, то обобщенная функция $f_e\in\mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$ ($f_o\in\mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$) называется четной (нечетной), если

$$(f_e,\varphi)_\lambda=(f_e,\varphi_e)_\lambda\ \ ((f_o,\varphi)_\lambda=(f_o,\varphi_o)_\lambda),\quad \varphi\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Множества четных обобщенных функций на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ совпадают. Для нечетных обобщенных функций эти множества различаются. Если f_o — нечетная обобщенная функция на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ нечетными обобщенными функциями будут все функции f_o/x^{2s}, $s=1,\dots,r$. Регулярный линейный непрерывный функционал на $\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, определяемый функцией f и мерой $d\nu_\lambda$, будет иметь запись

$$(f,\varphi)_\lambda=\int_{\mathbb{R}}f\varphi\,d\nu_\lambda,\quad \varphi\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Обобщенное преобразование Данкля можно продолжить на $\mathcal{S}_r^{'}(\mathbb{R})$ по правилу

$$(\mathcal{F}_r^\lambda(f),\varphi)_\lambda=(f,\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi))_\lambda,\quad f\in\mathcal{S}_r^{'}(\mathbb{R}),\ \ \varphi\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R}).\tag{7}$$

Ядро (3) является собственной функцией обобщенного лапласиана Данкля (4)

$$(-\Delta_{\lambda,r})_x e_{r,\lambda}(xy)=|y|^2e_{r,\lambda}(xy).$$

Оператор $\Delta_{\lambda,r}\colon\mathcal{S}_r(\mathbb{R})\to\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и для $f\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}}(-\Delta_{\lambda,r})^n f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(x)=|y|^{2n}\int_{\mathbb{R}}f(x)e_{r,\lambda}(xy)\,d\nu_\lambda(x).$$

Распространим степень обобщенного лапласиана Данкля на $\mathcal{S}_r^{'}(\mathbb{R})$ равенством

$$((-\Delta_{\lambda,r})^n f,\varphi)_\lambda=(f,(-\Delta_{\lambda,r})^n\varphi)_\lambda,\quad f\in\mathcal{S}_r'(\mathbb{R}),\quad \varphi\in\mathcal{S}_r(\mathbb{R}),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{8}$$

В силу (7) можем также использовать обобщенное преобразование Данкля

$$\mathcal{F}_r^\lambda((-\Delta_{\lambda,r})^n f)=(\cdot)^{2n}\mathcal{F}_r^\lambda(f),\quad f\in\mathcal{S}_r^{'}(\mathbb{R}).\tag{9}$$

Пусть $A=\sqrt{x^2+y^2-2xyt}$. Для оператора обобщенного сдвига (5) получено интегральное представление

$$\tau^y f(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big\{f(A)\Big(1-P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}(t)+P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)+P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)$$

$$+f(-A)\Big(1-P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}(t)-P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{x-yt}{A}\Big)-P_{2r+1}^{(\lambda-1/2)}\Big(\frac{y-xt}{A}\Big)\Big)\Big\}\,dm_\lambda(t),$$

и оценки его норм в пространствах $L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$,

$$\|\tau^y\|_{p\to p} \leqslant M^\tau_{r,\lambda}. \tag{10}$$

Пусть

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}),\ C_r^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\colon f^{(2s+1)}(0) = 0,\ s = 0, 1, \dots, r-1\},\ r \geqslant 1.$$

Так как $e_{\lambda,r} \in C_\Pi^\infty(\mathbb{R}) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$, то для $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ и $f \in \mathcal{S}_r{}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y\varphi)(z) = e_{\lambda,r}(yz)\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)(z), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y f) = e_{\lambda,r}(y(\cdot))\mathcal{F}_r^\lambda(f). \tag{11}$$

В частности,

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\tau^y\varphi),\ \tau^y\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, I — тождественный оператор,

$$\varDelta_{y,r}^m f(x) = (I - \tau^y)^m f(x) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} (\tau^y)^s f(x), \tag{13}$$

— разность порядка m, определяемая оператором обобщенного сдвига τ^t, зависящим от r,

$$\omega_{m,r}(\delta, f)_{p,d\nu_\lambda} = \sup_{0<y\leqslant\delta} \|\varDelta_{y,r}^m f(x)\|_{p,d\nu_\lambda} \tag{14}$$

— модуль гладкости функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. При $m = 0$ полагаем $\varDelta_{y,r}^m f(x) = f(x)$.

Если $f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, то в силу (5),

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\varDelta_{y,r}^m f)(z) = e_{r,\lambda}^m(yz)\mathcal{F}_r^\lambda(f)(z), \tag{15}$$

где

$$e_{r,\lambda}^m(t) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} \big(e_{r,\lambda}(t)\big)^s = (1 - e_{r,\lambda}(t))^m. \tag{16}$$

Для функции $e_{r,\lambda}^m$ выполнены следующие свойства

$$\begin{gathered} c_{\lambda,r,m}^{-1} \min(1, t^{2m}) \leqslant |e_{r,\lambda}^m(t)| \leqslant c_{\lambda,r,m} \min(1, t^{2m}), \\ e_{r,\lambda}^m,\ \frac{e_{r,\lambda}^m(x)}{x^{2m}},\ \frac{x^{2m}}{e_{r,\lambda}^m(x)} \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{17}$$

Для $f \in \mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$ мы можем определить распределения

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\varDelta_{y,r}^m f) = e_{r,\lambda}^m(y(\cdot))\mathcal{F}_r^\lambda(f). \tag{18}$$

Лемма 1. Если $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то

$$\|\varDelta_{y,r}^{m+n} f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \|\varDelta_{y,r}^m f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Смотрим свертку пары функций $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$,

$$(\psi *_\tau \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\tau^x\varphi(-y)\,d\nu_\lambda(y).$$

Лемма 2. *Если* $\varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$, *то* $(\psi *_\tau \varphi) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ *и*

$$\mathcal{F}_r^\lambda((\psi *_\tau \varphi))(y) = \mathcal{F}_r^\lambda(\psi)(y)\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi)(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}).$$

Пусть $\check{\psi}(y) = \psi(-y)$. Используя лемму 2, для $f \in \mathcal{S}_r'(\mathbb{R})$, $\psi \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$ определим обобщенную свертку $(f *_\tau \psi)$ равенством

$$((f *_\tau \psi), \varphi)_\lambda = (f, (\check{\psi} *_\tau \varphi))_\lambda, \quad \varphi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}). \tag{19}$$

Отметим, что

$$\mathcal{F}_r^\lambda((f *_\tau \psi)) = \mathcal{F}_r^\lambda(\psi)\mathcal{F}_r^\lambda(f). \tag{20}$$

Для свертки мы будем применять следующий вариант неравенства Юнга (см. [5]).

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1/p + 1/q \geqslant 1$ *и* $1/s = 1/p + 1/q - 1$. *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $g \in L^q(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R})$, *то*

$$\|(f *_\tau g)\|_{s,d\nu_\lambda} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \|g\|_{q,d\nu_\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $1/\mu = 1/p - 1/s$ и $1/\nu = 1/q - 1/s$. Тогда $1/\mu \geqslant 0$, $1/\nu \geqslant 0$ и $1/s + 1/\mu + 1/\nu = 1$.

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}} f(y)\tau^x g(-y)\, d\nu_\lambda(y)\Big| &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^x g(-y)|^q\, d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/s} \\
&\times \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p\, d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/\mu} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tau^x g(-y)|^q\, d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/\nu} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^x g(-y)|^q\, d\nu_\lambda(y)\Big)^{1/s} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}^{p/\mu} \|\tau^x g(-y)\|_{q,d\nu_\lambda}^{q/\nu}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (10)

$$\begin{aligned}
&\|(f *_\tau g)\|_{s,d\nu_\lambda} \\
&\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p |\tau^{-y} g(x)|^q\, d\nu_\lambda(y)\, d\nu_\lambda(x)\Big)^{1/s} \|f\|_{p,d\nu_\lambda}^{p/\mu} \|\tau^x g(-y)\|_{q,d\nu_\lambda}^{q/\nu} \\
&\leqslant \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \|\tau^{-y} g(x)\|_{q,d\nu_\lambda}^{q/s} \|\tau^x g(-y)\|_{q,d\nu_\lambda}^{q/\nu} \leqslant M_{r,\lambda}^\tau \|f\|_{p,d\nu_\lambda} \|g\|_{q,d\nu_\lambda}.
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

3. Некоторые неравенства для целых функций экспоненциального типа

Пусть $\sigma > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\lambda > -1/2$. Рассмотрим два класса целых функций экспоненциального типа.

Функция $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, если f — целая функция экспоненциального типа не выше σ и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$. Функция $f \in \widetilde{B}_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, если $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R})$ и для ее аналитического продолжения на $\mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant c_f e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

На самом деле, эти классы совпадают (см. [10]).

В [7] для этих классов установлена теорема Пэли–Винера.

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Функция $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ тогда и только тогда, когда*

$$f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda) \cap C_r^\infty(\mathbb{R}) \ \text{ и } \ \operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma].$$

Далее применяем работы [10, 11]. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/p + 1/p^{'} = 1$, $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$,

$$\eta(x) = 1, \ |x| \leqslant 1; \quad \eta(x) > 0, \ 1 < |x| < 2; \quad \eta(x) = 0, \ |x| \geqslant 2,$$

$$\mathcal{F}_r^\lambda\big(\eta(\cdot/\sigma)\big)(y) = \sigma^{2\lambda+2}\mathcal{F}_r^\lambda(\eta)(\sigma y), \ \|\mathcal{F}_r^\lambda\big(\eta(\cdot/\sigma)\big)\|_{p',d\nu_\lambda} = \sigma^{\frac{2\lambda+2}{p}} \|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta)\|_{p',d\nu_\lambda}. \tag{21}$$

Теорема 3. *Если $\sigma > 0$, $0 < p \leq q \leq \infty$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то*

$$\|f\|_{q,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1/p-1/q)}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, $p \geqslant 1$, $q = \infty$. Так как по теореме 2 $\operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$, то согласно (19), (20)

$$f(x) = \big(f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda\big(\eta(\cdot/\sigma)\big)\big)(x), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(f)(y) = \eta(y/\sigma)\mathcal{F}_r^\lambda(f)(y).$$

По теореме 1, (21)

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\leqslant M_{r,\lambda}^\tau \|f\|_{p,d\nu_\lambda}\|\mathcal{F}_r^\lambda\big(\eta(\cdot/\sigma)\big)\|_{p',d\nu_\lambda} \\ &\leqslant M_{r,\lambda}^\tau \sigma^{(2\lambda+2)/p}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}\|\mathcal{F}_r^\lambda(\eta)\|_{p',d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)/p}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Таким образом, теорема 3 для $q = \infty$, $1 \leqslant p < \infty$ доказана.

При $0 < p < 1$ воспользуемся следующим приемом из [10]

$$\|f\|_{1,d\nu_\lambda} \leqslant \|f\|_\infty^{1-p}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}^p \lesssim \sigma^{2\lambda+2}\|f\|_{1,d\nu_\lambda}\|f\|_\infty^{-p}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}^p.$$

Откуда теорема 3 вытекает и для $q = \infty$, $0 < p < 1$.

Если $0 < p \leq q < \infty$, то

$$\begin{aligned}\|f\|_{q,d\nu_\lambda} &= \||f|^{1-p/q}|f|^{p/q}\|_{q,d\nu_\lambda} \leqslant \|f\|_\infty^{1-p/q}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}^{p/q} \\ &\lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1-p/q)/p}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}^{1-p/q}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}^{p/q} \lesssim \sigma^{(2\lambda+2)(1/p-1/q)}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Лемма 3. Если $\sigma, t > 0$, $n, m \geqslant 1$, $1 \leq p \leqslant \infty$, $f \in B_{p,k}^{\sigma,r}$, то

$$\varDelta_{t,r}^m(-\Delta_{\lambda,r})^n f, \ (-\Delta_{\lambda,r})^n \varDelta_t^m f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda),$$

и

$$\varDelta_{t,r}^m(-\Delta_{\lambda,r})^n f = (-\Delta_{\lambda,r})^n \varDelta_{t,r}^m f.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}_r^{'}$ и $\operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$. Применяя (17), (19), (20), получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_r^\lambda(\varDelta_{t,r}^m(-\Delta_{\lambda,r})^n f) &= \mathcal{F}_r^\lambda((-\Delta_{\lambda,r})^n \varDelta_{t,r}^m f) = (\cdot)^{2n} e_{r,\lambda}^m(ty)\mathcal{F}_r^\lambda(f) \\ &= (\cdot)^{2n} e_{r,\lambda}^m(ty)\eta(\cdot/\sigma)\mathcal{F}_r^\lambda(f) = g\mathcal{F}_r^\lambda(f) = \mathcal{F}_r^\lambda(f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(g)),\end{aligned}$$

где

$$g(y) = t^{2m}y^{2(n+m)}\frac{e_{r,\lambda}^m(ty)}{(ty)^{2m}}\eta\big(y/\sigma\big), \quad \mathcal{F}_r^\lambda(g) \in \mathcal{S}_r.$$

Следовательно, по теореме 1

$$(f *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(g)) = \mathit{\Delta}_{t,r}^m(-\Delta_{\lambda,r})^n f = (-\Delta_{\lambda,r})^n \mathit{\Delta}_{t,r}^m f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 4. Если $\sigma > 0$, $n_1, n_2 \geqslant 0$, $m_1, m_2 \geqslant 0$, $\rho = n_1 + m_1 - n_2 - m_2 \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < \delta \leqslant t \leqslant 1/(2\sigma)$, и $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\delta^{-2m_1}\|\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2\rho} t^{-2m_2}\|\mathit{\Delta}_{t,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{S}_r'$ и $\operatorname{supp} \mathcal{F}_r^\lambda(f) \subset [-\sigma, \sigma]$,

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f) = (\cdot)^{2(n_1-n_2)} \frac{e_{r,\lambda}^{m_1}(\delta(\cdot))}{e_{r,\lambda}^{m_2}(t(\cdot))} \eta\big((\cdot)/\sigma\big)(\cdot)^{2n_2} e_{r,\lambda}^{m_2}(t(\cdot))\mathcal{F}_r^\lambda(f).$$

Так для $0 < t \leq 1/(2\sigma)$

$$\eta(y/\sigma) = \eta(y/\sigma)\eta(ty),$$

то

$$\begin{aligned}\delta^{-2m_1}\mathcal{F}_r^\lambda(\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_1} f) &= \sigma^{2\rho} t^{-2m_2}\chi(\cdot/\sigma)\varphi_\theta(t\cdot)\mathcal{F}_r^\lambda(\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_2} f) \\ &= \sigma^{2\rho} t^{-2m_2}\mathcal{F}_r^\lambda(\Delta_{\delta,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f *_\tau (\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t\cdot)))),\end{aligned}$$

для

$$\theta = \frac{\delta}{t} \in (0, 1], \quad \chi(y) = y^{2\rho}\eta(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \psi_1(y) = \frac{e_{r,\lambda}^{m_1}(y)}{y^{2m_1}} \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\psi_2(y) = \frac{e_{r,\lambda}^{m_2}(y)}{y^{2m_2}} \in C_r^\infty(\mathbb{R}) \cap C_\Pi^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi_\theta(y) = \frac{\psi_1(\theta y)}{\psi_2(y)}\eta(y) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}) \times C^\infty([0, 1]).$$

Следовательно,

$$\delta^{-2m_1}\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f = \sigma^{2\rho} t^{-2m_2}(\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f *_\tau (\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) *_\tau \mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t\cdot)))).$$

Так как

$$\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma)) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}_r^\lambda(\chi(\cdot/\sigma))\|_{1,d\nu_\lambda} = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\chi)\|_{1,d\nu_\lambda},$$
$$\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t\cdot)) \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta(t\cdot)))\|_{1,d\nu_\lambda} = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\nu_\lambda},$$

и $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, то из теоремы 1 получим

$$\begin{aligned}&\delta^{-2m_1}\|\mathit{\Delta}_{\delta,r}^{m_1}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_1} f\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\quad\leqslant \sigma^{2\rho} t^{-2m_2}\|(\chi)\|_{1,d\nu_\lambda} \max_{0\leq\theta\leq 1}\|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\nu_\lambda}\|\mathit{\Delta}_{t,r}^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\quad\lesssim \sigma^\rho t^{-m_2}\|\Delta_t^{m_2}(-\Delta_{\lambda,r})^{n_2} f\|_{p,d\nu_\lambda}\end{aligned}$$

Остается доказать, что функция $n(\theta) = \|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)\|_{1,d\mu_k}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Пусть $\lambda > -1/2$,

$$\mathcal{H}_\lambda(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) j_\lambda(xy)\, d\nu_\lambda(x)$$

— преобразование Ганкеля четной функции f.

Для функции $\varphi_\theta(x)=\varphi_{\theta1}(x)+x^{2r+1}\varphi_{\theta2}(x)$, $\varphi_{\theta1},\varphi_{\theta2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)(y)&=\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\theta1}(x)j_\lambda(xy)\,d\nu_\lambda(x)+i(-1)^ry^{2r+1}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\theta2}(x)j_{\lambda+2r+1}(xy)\,d\nu_{\lambda+2r+1}(x)\\&=\mathcal{H}_\lambda(\varphi_{\theta1})(y)+i(-1)^ry^{2r+1}\mathcal{H}_{\lambda+2r+1}(\varphi_{\theta2})(y).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}_r^\lambda(\varphi_\theta)(y)|\,d\nu_\lambda(y)&\leqslant\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{H}_\lambda(\varphi_{\theta1})(y)|\,d\nu_\lambda(y)+\int_{\mathbb{R}}|y^{2r+1}\mathcal{H}_{\lambda+2r+1}(\varphi_{\theta2})(y)|\,d\nu_\lambda(y)\\&\leqslant c_\lambda\int_0^\infty\Big|\int_0^2\varphi_{\theta1}(x)j_\lambda(xy)x^{2\lambda+1}\,dx\Big|y^{2\lambda+1}dy\\&+c_{\lambda,r}\int_0^\infty\Big|\int_0^2\varphi_{\theta2}(x)j_{\lambda+2r+1}(xy)x^{2(\lambda+2r+1)+1}\,dx\Big|y^{2\lambda+2r+2}dy.\end{aligned}\tag{23}$$

Так как

$$\frac{d}{dx}\big(j_{\lambda+1}(yx)x^{2\lambda+2}\big)=(2\lambda+2)j_\lambda(yx)x^{2\lambda+1},$$

то интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\int_0^2\varphi_{\theta1}(x)j_\lambda(yx)x^{2\lambda+1}\,dx&=\frac{1}{2\lambda+2}\int_0^2\varphi_{\theta1}(x)\,d\big(j_{\lambda+1}(yx)x^{2\lambda+2}\big)\\&=-\frac{1}{2\lambda+2}\int_0^2\frac{(\varphi_{\theta1}(x))'}{x}j_{\lambda+1}(yx)x^{2\lambda+3}\,dx=\dots\\&=(-1)^s\Big(\prod_{j=1}^s(2\lambda+2s)\Big)^{-1}\int_0^2\varphi_{\theta1}^{[s]}(x)j_{\lambda+s}(yx)x^{2\lambda+2s+1}\,dx,\end{aligned}$$

где

$$\varphi_{\theta1}^{[s]}(x):=\frac{\frac{d}{dx}\varphi_{\theta1}^{[s-1]}(x)}{x}\in C^\infty(\mathbb{R}_+\times[0,1]).$$

Так образом,

$$\Big|\int_0^2\varphi_{\theta1}(x)j_\lambda(yx)x^{2\lambda+1}\,dx\Big|\lesssim\frac{1}{(y+1)^{\lambda+s+1/2}}$$

при $s>\lambda+3/2$. Аналогично,

$$\Big|\int_0^2\varphi_{\theta2}(x)j_{\lambda+2r+1}(yx)x^{2(\lambda+2r+1)+1}\,dx\Big|\lesssim\frac{1}{(y+1)^{\lambda+2r+1+s+1/2}}.$$

Применяя оценки (22), получим оценку

$$n(\theta)\lesssim\int_0^\infty(1+y)^{-(s-\lambda-1/2)}\,dy<\infty,$$

и непрерывность $n(\theta)$. Терема 4 доказана.

Приведем некоторые частные случаи неравенства (21).

Следствие 1. (С.Н. Бернштейн, С.М. Никольский) Если $\sigma>0$, $r,n\geqslant1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^nf\|_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\sigma^{2n}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 2. Если σ, $\delta>0$, $r,m\geqslant1$, $1\le p\le\infty$, $f\in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\omega_{m,r}(\delta,f)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim(\sigma\delta)^{2m}\|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 3.(С.Н. Никольский, С.Б. Стечкин) Если $\sigma > 0$, $r \geqslant 1$, $n \geqslant m$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < t \leqslant 1/(2\sigma)$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^n f\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sigma^{2(n-m)} t^{-2m} \|\varDelta_{t,r}^m f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Следствие 4. (R.P. Boas) Если $\sigma > 0$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < \delta \leq t \leq 1/(2\sigma)$, $f \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$, то

$$\delta^{-2m} \|\varDelta_{\delta,r}^m f\|_{p,B_{p,\lambda}^{\sigma,r}} \lesssim t^{-2m} \|\Delta_{t,r}^m f\|_{p,d\mu_k}.$$

4. Обратные теоремы теории приближений

Пусть

$$E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \inf\{\|f-g\|_{p,d\nu_\lambda} \colon g \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}\}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ.

Как и в [10] доказывается, что величина наилучшего приближения достигается.

Теорема 5. *Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, существует функция $g^* \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ такая, что $E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \|f-g^*\|_{p,d\nu_\lambda}$.*

Теорема 6. Если $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, то для любой $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$

$$\omega_{m,r}\Big(\frac{1}{n}, f\Big)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \sum_{j=0}^{n} (j+1)^{2m-1} E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}. \tag{24}$$

Доказательство. По теореме 5, для любого $\sigma > 0$ и для любой $f_\sigma \in B_{p,\lambda}^{\sigma,r}$ такой, что

$$\|f - f_\sigma\|_{p,d\nu_\lambda} = E_{\sigma,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \quad E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} = \|f\|_{p,d\nu_\lambda}.$$

Для любого $s \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}\omega_{m.r}(1/n, f)_{p,d\nu_\lambda} &\leq \omega_{m.r}(1/n, f - f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m.r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim E_{2^{s+1},r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m.r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Используя лемму 5 из [7], получим

$$\begin{aligned}\omega_{m.r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim n^{-2m} \|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^{s+1}}\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim \frac{1}{n^{2m}} \Big(\|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_1\|_{p,d\nu_\lambda} + \sum_{j=0}^{s} \|(-\Delta_{\lambda,r})^m (f_{2^{j+1}} - f_{2^j})\|_{p,d\nu_\lambda} \Big).\end{aligned}$$

Тогда неравенство Бернштейна из следствия 1 влечет, что

$$\begin{aligned}\|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^m f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim 2^{2m(j+1)} \|f_{2^{j+1}} - f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} \\ &\lesssim 2^{2m(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \\ \|(-\Delta_{\lambda,r})^m f_1\|_{p,d\nu_\lambda} &\lesssim E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_m(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}} \Big(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + \sum_{j=0}^{s} 2^{2m(j+1)} E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \Big).$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2m-1}E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \geqslant 2^{2m(j-1)}E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}, \tag{25}$$

получим

$$\omega_{m.r}(1/n, f_{2^{s+1}})_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}}\Big(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} + 2^{2m}E_{1,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} 2^{2m}\sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2m-1}E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\Big) \lesssim \frac{1}{n^{2m}}\sum_{j=0}^{2^s}(j+1)^{2m-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Выбирая s таким, что $2^s \leqslant n < 2^{s+1}$, получим (24). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Если $1 \le p \le \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$ и при $k \in \mathbb{N}$ числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty} j^{2k-1}E_{j,r}(f)_{p,d\mu_k}$ сходится, то $f \in W^{k,r}_{p,\lambda}$ и для $m, r \in \mathbb{N}$

$$\omega_{m,r}\Big(\frac{1}{n}, (-\Delta_{\lambda,r})^k f\Big)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \frac{1}{n^{2m}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{2(m+k)-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \tag{26}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{2k-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \tag{27}$$

Доказательство. Докажем неравенство (26). Рассмотрим функциональный ряд

$$(-\Delta_{\lambda,r})^k f_1 + \sum_{j=0}^{\infty}\Big((-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j}\Big). \tag{28}$$

В силу неравенства Бернштейна из следствия 1

$$\|(-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j}\|_{p,d\nu_\lambda} \lesssim 2^{2k(j+1)}E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda} \lesssim \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{2k-1}E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Поэтому функциональный ряд (28) сходится к функции $g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$. Покажем, что $g = (-\Delta_{\lambda,r})^k f$ и $f \in W^{k,r}_{p,\lambda}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_N = (-\Delta_{\lambda,r})^k f_1 + \sum_{j=0}^{N}\Big((-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}} - (-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j}\Big).$$

Тогда

$$(\mathcal{F}_r^\lambda(g), \psi)_\lambda = (g, \mathcal{F}_r^\lambda(\psi))_\lambda = \lim_{N\to\infty}(S_N, \mathcal{F}_r^\lambda(\psi))_\lambda =$$
$$= \lim_{N\to\infty}(\mathcal{F}_r^\lambda(S_N), \psi)_\lambda = \lim_{N\to\infty}(|y|^r\mathcal{F}_r^\lambda(f_{2^{N+1}}), \psi)_\lambda = (|y|^k\mathcal{F}_r^\lambda, \psi)_\lambda,$$

где $\psi \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$. Следовательно, $(\mathcal{F}_r^\lambda(g), \psi)_\lambda = (|y|^r\mathcal{F}_r^\lambda(f), \psi)_\lambda$ и $g = (-\Delta_{\lambda,r})^k f$, где $g \in L^p(\mathbb{R}, d\nu_\lambda)$.

Чтобы получить (26), напишем

$$\omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f)_{p,d\nu_\lambda} \le \omega_{m,r}(1/n, (-\Delta_{\lambda,r})^k f - S_N)_{p,d\nu_\lambda} + \omega_{m,r}(1/n, S_N)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Первые члены оцениваются следующим образом

$$\omega_{m,r}(1/n,(-\Delta_{\lambda,r})^k f-S_N)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\|(-\Delta_{\lambda,r})^k f-S_N\|_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\lesssim\sum_{j=N+1}^{\infty}2^{2k(j+1)}E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\sum_{l=2^N+1}^{\infty}l^{2k-1}E_{l,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Кроме этого, согласно следствию 2

$$\omega_{m,r}(1/n,S_N)_{p,d\nu_\lambda}\leqslant\omega_{m,r}(1/n,(-\Delta_{\lambda,r})^k f_1)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$+\sum_{j=0}^{N}\omega_{m,r}(1/n,(-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^{j+1}}-(-\Delta_{\lambda,r})^k f_{2^j})_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\lesssim\frac{1}{n^{2m}}\Big(E_{0,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}+\sum_{j=0}^{N}2^{2(m+k)(j+1)}E_{2^j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\Big).$$

Используя (25) и выбирая N таким образом, что $2^N\leqslant n<2^{N+1}$ закончим доказательство (26). Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Пусть $1\le p\le\infty$, $m,r,n\in\mathbb{N}$. Асимптотическое равенство

$$E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\asymp\omega_{m,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}$$

справедливо для любой $f\in L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega_{m,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}\asymp\omega_{m+1,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}. \tag{29}$$

Доказательство. Вначале предполагаем справедливость равенства (29). Так как [7]

$$\omega_{m,r}(nt,f)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim n^{2m}\omega_{m,r}(t,f)_{p,d\nu_\lambda},$$

то

$$\omega_{m+1,r}(nt,f)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim n^{2m}\omega_{m+1,r}(t,f)_{p,d\nu_\lambda}. \tag{30}$$

Это и неравенство Джексона [7] дают

$$\frac{1}{n^{2(m+1)}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{2(m+1)-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\lesssim\frac{1}{n^{2(m+1)}}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{2(m+1)-1}\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{j+1},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\lesssim\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Кроме этого, из теоремы 6 вытекает неравенство

$$\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{ln},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\frac{1}{(ln)^{2(m+1)}}\sum_{j=0}^{ln}(j+1)^{2(m+1)-1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\lesssim\frac{1}{l^{2(m+1)}}\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$+\frac{1}{(ln)^{2(m+1)}}\sum_{j=n+1}^{ln}(j+1)^{2m+1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda},$$

или, другими словами,

$$\frac{1}{n^{2(m+1)}}\sum_{j=n+1}^{ln}(j+1)^{2m+1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$$
$$\gtrsim Cl^{2(m+1)}\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{ln},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}-\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Применяя аналогично (30), получим

$$\frac{1}{n^{2(m+1)}}\sum_{j=n+1}^{ln}(j+1)^{2m+1}E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\gtrsim(Cl^2-1)\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Принимая во внимание монотонность $E_{j,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$ и выбирая l достаточно большим, для $E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}$ и $\omega_{m,r}(1/n,f)_{p,d\nu_\lambda}$ устанавливаем асимптотическое равенство.

Чтобы доказать обратное утверждение запишем простые неравенства из [7]

$$\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}\leqslant c\,\omega_{m,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim E_{n,r}(f)_{p,d\nu_\lambda}\lesssim\omega_{m+1,r}\Big(\frac{1}{n},f\Big)_{p,d\nu_\lambda}.$$

Теорема 8 доказана.

5. Заключение

В статье [7] и в настоящей работе изучены прямые и обратные задачи теории приближений в пространствах $L^p(\mathbb{R},d\nu_\lambda)$ классом $B^{\sigma,r}_{p,\lambda}$ целых функций экспоненциального типа не выше σ и со свойством $f^{(2s+1)}(0)=0$, $s=0,1,\dots,r-1$. Это только одно из применений обобщенного гармонического анализа Данкля на прямой, зависящего от параметра $r\in\mathbb{N}$. Следующее применение обобщенного гармонического анализа Данкля будет посвящено изучению модельный интегральные операторов так как, как потенциал Рисса и преобразование Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben Saïd S., Kobayashi T., Orsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

2. Dunkl C. F. Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43. P. 1213–1227.

3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

4. Gorbachev D., Ivanov V., Tikhonov S. On the kernel of the (κ,a)-Generalized Fourier transform // Forum of Mathematics, Sigma. 2023. Vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

5. Иванов В. И. Недеформированное обобщенное преобразование Данкля на прямой // Матем. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 509–524.

6. Иванов В. И. Оператор сплетения для обобщенного преобразования Данкля на прямой // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4. С. 48–62.

7. Иванов В. И. Обобщенное одномерное преобразование Данкля в прямых теоремах теории приближений // Матем. заметки. 2024. Т. 116, № 2. С. 269–284.

8. Платонов С. С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149-196.

9. Платонов С. С. Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 154-174.

10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S Yu. Positive Lp-Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications // Constr. Approx. 2023. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Fractional Smoothness in Lp with Dunkl Weight and Its Applications // Math. Notes. 2019. Vol. 106, no. 4. P. 537–561.

REFERENCES

1. Saïd S., Kobayashi, T., Orsted, B., 2012. “Laguerre semigroup and Dunkl operators” , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

2. Dunkl, C. F., 1991. “Integral kernels with reflection group invariance” , *Canad. J. Math.*, vol. 43, pp. 1213–1227.

3. Ŕosle,r M., 2002. “Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions” , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

4. Gorbachev, D., Ivanov, V., Tikhonov, S., 2023. “On the kernel of the (κ, a)-Generalized Fourier transform” , *Forum of Mathematics, Sigma*, vol. 11: e72 1–25. Published online by Cambridge University Press: 14 August 2023. Doi: https://doi.org/10.1017/fms.2023.69.

5. Ivanov, V. I., 2023. “Undeformed generalized Dunkl transform on the line” , *Math. Notes.*, vol. 114, no. 4, pp. 509–524.

6. Ivanov, V. I., 2023. “The intertwining operator for the generalized Dunkl transform on the line” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 48–62.

7. Ivanov, V. I., 2024. “Generalized one-dimensional Dunkl transform in direct problems of approximation theory” , *Math. Notes.*, vol. 116, no. 2, pp. 269–284.

8. Platonov, S. S., 2007. “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line” , *Izv. Math.*, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.

9. Platonov, S. S., 2009. “Bessel generalized translations and some problems of approximation theory for functions on the half-line” , *Siberian Math. J.*, vol. 50, no. 1, pp. 123–140.

10. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., Tikhonov, S Yu., 2019. “Positive Lp-Bounded Dunkl-Type Generalized Translation Operator and Its Applications”, *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

11. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I., 2019. “Fractional Smoothness in Lp with Dunkl Weight and Its Applications” , *Math. Notes.*, vol. 106, no. 4, pp. 537–561.

Получено: 17.02.2024
Принято в печать: 28.06.2024