

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 2.

УДК 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-29-42

**Аналог теоремы Колмогорова
о суперпозициях непрерывных функций
для функциональных систем
полиномиальных и рациональных функций¹**

Н. Ф. Алексиадис

Алексиадис Никос Филиппович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва).
e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Аннотация

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики, поскольку они являются математическими моделями реальных и абстрактных управляющих систем.

Проблематика функциональных систем обширна. Одной из основных задач является проблема полноты, состоящая в описании таких подсистем функций, которые являются полными, т.е. из этих функций с помощью заданных операций над ними можно получить все функции.

К проблеме полноты примыкает известная теорема Колмогорова² о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения (формулировку этой теоремы см. ниже).

Целью настоящей статьи является следующая задача: *имеет ли место аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций и функциональных систем рациональных функций?*

Оказывается, что поставленный вопрос (аналог теоремы Колмогорова) имеет отрицательный ответ для функциональных систем полиномиальных функций с натуральными и целыми коэффициентами, а для функциональных систем полиномиальных функций с рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами — ответ положительный. Эти теоремы и являются основными результатами данной статьи.

Ключевые слова: функциональная система, проблема полноты, полная система, суперпозиция, полином, рациональная функция, теорема Колмогорова.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

Н. Ф. Алексиадис. Аналог теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 2, с. 29–42.

¹Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова

²Она решает в более общем виде 13-ю проблему Гильберта

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 2.

UDC 519.716

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-29-42

**An analogue of Kolmogorov's theorem
on superpositions of continuous functions
for functional systems of polynomial and rational functions³**

N. Ph. Aleksiadis

Aleksiadis Nikos Philippovich — Lomonosov Moscow State University; National Research University "MPEI" (Moscow).

e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Abstract

A functional system is a set of functions endowed with a set of operations on these functions. The operations allow one to obtain new functions from the existing ones.

Functional systems are mathematical models of real and abstract control systems and thus are one of the main objects of discrete mathematics and mathematical cybernetic.

The problems in the area of functional systems are extensive. One of the main problems is deciding completeness that consists in the description of all subsets of functions that are complete, i.e. generate the whole set.

The well-known Kolmogorov theorem ⁴ on the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition adjoins the completeness problem (see the formulation of this theorem below).

The purpose of this paper is the following problem: *is there an analogue of Kolmogorov's theorem on the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition for functional systems of polynomial functions and functional systems of rational functions?*

It turns out that the problem posed (an analogue of Kolmogorov's theorem) has a negative answer for functional systems of polynomial functions with natural and integer coefficients, and for functional systems of polynomial functions with rational and real coefficients and for functional systems of rational functions with rational and real coefficients - the answer is positive. These theorems are the main results of this paper.

Keywords: functional system, completeness problem, complete system, superposition, polynomial, rational function, Kolmogorov's theorem.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

N. Ph. Aleksiadis, 2024. "An analogue of Kolmogorov's theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 2, pp. 29–42.

³The work was performed at Lomonosov Moscow State University

⁴It solves Hilbert's 13-th problem in a more general way

1. Введение

Эта статья является расширенной версией моего доклада об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций, сделанного в сентябре 2023 года на XXII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова [1] и ее можно считать продолжением цикла моих статей о проблеме полноты для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций [2]-[4].

Приведем предварительные сведения из теории функциональных систем, необходимые для дальнейшего изложения.

При изложении материала в основном используется терминология книг [6] и [7].

Говорят, что *функция* $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *существенно зависит от переменной* x_i , если существуют такие два набора (из области определения этой функции)

$$(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) \text{ и } (c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$, что

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \dots, c_n) \neq f(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n).$$

В этом случае мы говорим, что x_i является *существенной переменной функции*

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Если x_i не является существенной переменной $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, то она называется *фиктивной (несущественной) переменной функции* $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ две произвольные заданные функции и пусть x_i фиктивная переменная функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Если для любых $c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n$ значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ имеем

$$f(c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n),$$

то говорят, что функция

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

получается из функции

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

удалением (изъятием) фиктивной переменной x_i и, наоборот, функция

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

получена из функции

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

добавлением фиктивной переменной x_i .

Если одна функция может быть получена из другой функции путем добавления или изъятия некоторых фиктивных переменных, то эти две функции являются *равными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будем считать, что вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т.е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если дана конечная система функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ (где $m \geq 1$), то можно считать, что все они зависят от одних и тех же переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. имеют вид

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если дана функция, отличная от константы, то путем отождествления переменных из нее можно получить равную ей функцию, все переменные которой являются существенными.

Функциональная система (ф.с.) представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т.е. функциональная система — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F — множество функций, а O — множество операций над этими функциями, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F .

Для произвольного подмножества $A \subseteq F$ обозначим через $[A]$ множество всех функций из F , которые получаются из функций множества A с помощью конечного числа применения операций из O . Множество $[A]$ называется замыканием множества A .

Множество A ($A \subseteq F$) называется замкнутым в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = A$. Замкнутое множество принято называть замкнутым классом.

Множество A ($A \subseteq F$) называется полным в функциональной системе $\mathbf{F}$, если $[A] = F$.

Полное множество принято называть полной системой.

Проблематика теории функциональных систем обширна. Одной из основных проблем является проблема полноты, состоящая в описании всех подмножеств A множества функций F , которые являются полными в ф.с. $\mathbf{F}$, т.е. $[A] = F$.

К проблеме полноты примыкает известная теорема Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения.

ТЕОРЕМА 1 (Колмогоров [5]). При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\varphi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right],$$

где функции $\chi_q(y)$ действительны и непрерывны.

Теорему Колмогорова можно сформулировать на языке полноты систем функции следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. В функциональной системе непрерывных функций, отображающих конечномерный единичный куб в единичный отрезок, множество всех одноместных функций и функция от двух переменных $x + y$ образуют полную систему.

В настоящей статье рассматривается особый подход к решению проблемы полноты для специального класса функций, а именно, аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций соответственно с натуральными, целыми, рациональными и действительными коэффициентами и для функциональных систем рациональных функций с рациональными и действительными коэффициентами.

2. Определение функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

Введем несколько стандартных обозначений, необходимых для дальнейшего изложения.

N — множество всех натуральных чисел (включая число 0),

Z — множество всех целых чисел,

Q — множество всех рациональных чисел,

R — множество всех действительных чисел,

$\equiv$ — обозначим, по определению, тождественно равно,

Для удобства полагаем, что $0^0 = 1$.

Более того договоримся, что во всех ниже рассмотренных функциональных системах в качестве множества операций O берем *операции суперпозиции*:

- перестановка переменных,
- переименование переменных без отождествления,
- отождествление переменных,
- введение фиктивной переменной,
- удаление фиктивной переменной,
- подстановка одной функции в другую.

Сначала определим функциональную систему полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$ и $c \in N$ называется *мономом с натуральным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с натуральным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с натуральными коэффициентами называется *полиномом с натуральными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{N \times N \times \dots \times N}_n \rightarrow N,$$

которая задается с помощью полинома с натуральными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с натуральными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с натуральными коэффициентами и сами эти функции принимают только натуральные значения.

Полиномиальные функции с натуральными коэффициентами будем называть также *pn-функциями*⁵. Далее наряду с термином “полиномиальная функция с натуральными коэффициентами” будем употреблять термин “полином с натуральными коэффициентами”, а вместо термина “pn-функция” будем употреблять термин “pn-полином”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PN} множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$ — это пара $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$, где F_{PN} — множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с натуральными коэффициентами.

⁵p — это первая буква слова polynomial, а n — первая буква слова natural

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PN} является опять функцией из F_{PN} .

Теперь определим функциональную систему полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Z$ называется *мономом с целым коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с целым коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с целыми коэффициентами называется *полиномом с целыми коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{Z \times Z \times \dots \times Z}_n \rightarrow Z,$$

которая задается с помощью полинома с целыми коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с целыми коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с целыми коэффициентами и сами эти функции принимают только целые значения.

Полиномиальные функции с целыми коэффициентами называем еще и *pz-функциями*⁶. Далее наряду с термином “*полиномиальная функция с целыми коэффициентами*” будем употреблять термин “*полином с целыми коэффициентами*”, а вместо термина “*pz-функция*” будем употреблять термин “*pz-полином*”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PZ} множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$, где F_{PZ} — множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с целыми коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PZ} является опять функцией из F_{PZ} .

Далее определим функциональную систему полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in Q$ называется *мономом с рациональным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с рациональным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с рациональными коэффициентами называется *полиномом с рациональными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \dots \times Q}_n \rightarrow Q,$$

которая задается с помощью полинома с рациональными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с рациональными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы полиномиальных функций с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

⁶p — это первая буква слова polynomial, а z — первая буква слова zahlen (от немецкого “число”)

Полиномиальные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*⁷. Далее наряду с термином “*полиномиальная функция с рациональными коэффициентами*” будем употреблять термин “*полином с рациональными коэффициентами*”, а вместо термина “*rq-функция*” будем употреблять термин “*rq-полином*”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{RQ} множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с рациональными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

Определим еще функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Выражение вида $cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $n, k_1, k_2, \dots, k_n \in N$, а $c \in R$ называется *мономом с действительным коэффициентом*, зависящим от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; при этом, когда $n = 0$, тогда заданный моном является просто константой c , т.е. мономом с действительным коэффициентом, зависящим от 0-го числа переменных.

Конечная сумма мономов с действительными коэффициентами называется *полиномом с действительными коэффициентами*.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) : \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_n \rightarrow R,$$

которая задается с помощью полинома с действительными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с действительными коэффициентами*.

Ясно, что аргументы полиномиальных функций с действительными коэффициентами и сами эти функции принимают только действительные значения.

Полиномиальные функции с действительными коэффициентами будем называть также *pr-функциями*⁸. Далее наряду с термином “*полиномиальная функция с действительными коэффициентами*” будем употреблять термин “*полином с действительными коэффициентами*”, а вместо термина “*pr-функция*” будем употреблять термин “*pr-полином*”, т.е. мы отождествляем функцию с формулой, с помощью которой она задается.

Обозначим через F_{PR} множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Функциональная система полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ — это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} — множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над полиномиальными функциями с действительными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{PR} является опять функцией из F_{PR} .

Теперь определим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами.

⁷ p — это первая буква слова polynomial, а q — первая буква слова quotient (от английского “частное”)

⁸ p — это первая буква слова polynomial, а r — первая буква слова real

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномиальные функции с рациональными коэффициентами, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами*.

Следует обратить внимание на то, что аргументы рациональных функций с рациональными коэффициентами и сами эти функции принимают только рациональные значения.

Рациональные функции с рациональными коэффициентами будем называть также *rq-функциями*⁹.

Обозначим через F_{RQ} множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над рациональными функциями с рациональными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RQ} является опять функцией из F_{RQ} .

И наконец, определим функциональную систему рациональных функций с действительными коэффициентами.

Функция вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)},$$

где $g(x_1, \dots, x_n)$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ — полиномиальные функций с действительными коэффициентами, называется *рациональной функцией с действительными коэффициентами*.

Ясно, что аргументы рациональных функций с действительными коэффициентами и сами эти функции принимают только действительные значения.

Рациональные функции с действительными коэффициентами будем называть также *rr-функциями*¹⁰.

Обозначим через F_{RR} множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами.

Функциональная система рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$ — это пара $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$, где F_{RR} — множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами, а O — множество операций суперпозиции над рациональными функциями с действительными коэффициентами.

Заметим, что определение функциональной системы рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$ корректное, так как любая суперпозиция функций из F_{RR} является опять функцией из F_{RR} .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *Следует отметить, что в функциональных системах полиномиальных функций (соответственно, с натуральными, целыми, рациональными, действительными коэффициентами) все функции являются всюду определенными, а в функциональных системах рациональных функций (соответственно, с рациональными, действительными коэффициентами) есть и не всюду определенные, т.е. частичные функции (в том числе и нигде не определенная функция).*

⁹г — это первая буква слова rational, а q — первая буква слова quotient (от английского “частное”)

¹⁰первая буква г в обозначении — это первая буква слова rational, а вторая буква г в обозначении — первая буква слова real

3. Об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

В настоящей статье рассматривается особый подход к решению проблемы полноты для специального класса функций, а именно, аналог теоремы Колмогорова о представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения для функциональных систем полиномиальных функций (соответственно с натуральными, целыми, рациональными и действительными коэффициентами) и для функциональных систем рациональных функций (соответственно с рациональными и действительными коэффициентами).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. *Следует уточнить такой факт. В теореме Колмогорова задано множество всех одноместных функций, а это множество не все воспринимают однозначно: одни считают, что оно состоит из всех одноместных функций, которые существенно зависят от своей переменной, а другие не требуют существенной зависимости от всех переменных, т.е. среди одноместных функций есть и такие, которые существенно не зависят от своей переменной (имеются функции от 0-го числа переменных, т.е. константы)¹¹. Но, оказывается, что это непринципиально: множество всех одноместных функций содержит или не содержит функций, которые фиктивно зависят от своей переменной, т.е. содержит или не содержит констант, т.к. во всех ниже рассмотренных функциональных системах¹² из множества всех одноместных функций, которые существенно зависят от своей переменной и функции $f(x, y) = x + y$ (которая у нас также имеется) с помощью операций суперпозиции можно получить все соответствующие константы.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. *Несмотря на то, что во всех ниже рассмотренных функциональных системах используется один и тот же подход получения констант, мы все-таки будем получать константы в каждой функциональной системе отдельно, а не сразу для всех функциональных систем, т.к. у всех этих систем свои соответствующие константы.*

Сначала рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$.

ТЕОРЕМА 3. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PN} не является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PN} .

Нужно доказать, что класс $[K_+]$ не содержит всех функций из F_{PN} . Для этого достаточно показать, что в замкнутом классе $[K_+]$ нет функции xy . А для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что в F_{PN} состоит из таких pn -функций, которые содержат члены вида sxy только с четными коэффициентами, т.е. $s = 2l$, где l – любое целое число, (в частности, и 0). С этой целью построим по индукции (относительно k) последовательность множеств pn -полиномов

$$H_1, H_2, H_3, \dots, H_k, \dots$$

¹¹Автор как специалист в области дискретной математики придерживается второй точки зрения, поскольку в дискретной математике нет такого требования для функций относительно существенных переменных. Например, в теории булевых функций известно, что число всех булевых функций, зависящих от n переменных, равно 2^{2^n} , куда входят и функции с фиктивными аргументами

¹²кроме функциональной системы полиномов с натуральными коэффициентами, где и не нужны константы, поскольку для этой системы не имеет места аналог теоремы Колмогорова

Базис индукции. При $k = 1$ положим $H_1 = K_+$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, \dots, H_k$; тогда H_{k+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, \dots, h_m)$, где g - функция из K_+ , а $h_1, \dots, h_m$ - либо переменные, либо функции из H_k .

Легко заметить, что $H_k \subseteq H_{k+1}$ и $\cup_{k=1}^{\infty} H_k = [K_+]$.

Теперь если докажем, что ни одно множество из последовательности $H_1, H_2, H_3, \dots$ не содержит функцию с указанным выше свойством, то тем самым будет доказано, что класс $[K_+]$ не содержит функцию xy .

А это сделаем опять с помощью математической индукции по k .

Базис индукции. Очевидно, что H_1 состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с нулевым коэффициентом, т.е. все эти функции содержат член вида sxy только с четными коэффициентами.

Индуктивный переход. Пусть H_k состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами. Тогда покажем, что и множество H_{k+1} также состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $g(h_1, \dots, h_m)$ из H_{k+1} где $h_1, \dots, h_m$ - либо переменные, либо функции из H_k , а $g(x_1, \dots, x_m) \in H_k$.

Возможны следующие случаи.

1. $g = x + y$; тогда ясно, что $m = 2$ и $g(h_1, \dots, h_m) = h_1 + h_2$.

Так как по индуктивному допущению функции h_1 и h_2 содержат член вида sxy только с четными коэффициентами, то очевидно, что функция $h_1 + h_2$ содержит член вида sxy только с четными коэффициентами.

2. g - функция одной переменной, тогда ясно, что $m = 1$ и $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, т.е. $g(h_1, \dots, h_m) = a_n h_1^n + \dots + a_1 h_1 + a_0$. Так как h_1 содержит член вида sxy только с четными коэффициентами, то и сумма $a_n h_1^n + \dots + a_1 h_1 + a_0$, и тем самым, суперпозиция $g(h_1, \dots, h_m)$ содержит член вида sxy только с четными коэффициентами.

Итак, $H_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ состоит из таких функций, которые содержат член вида sxy только с четными коэффициентами. Но, с другой стороны, $[K_+] = \cup_{l=1}^{\infty} H_l$. Следовательно, $[K_+]$ состоит из таких pn -полиномов, которые содержат члены вида sxy только с четными коэффициентами (т.е. $c = 2l$, где l - любое целое число).

Из вышесказанного следует, что класс $[K_+]$ не содержит функцию xy . Поэтому система K_+ не является полной в $\mathbf{F}_{PN}$. Это означает, что в функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$.

ТЕОРЕМА 4. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PZ}$ аналог теоремы Колмогорова не имеет места: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PZ} не является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается аналогично теореме 3. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{PQ}$.

ТЕОРЕМА 5. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$ имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PQ} является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{PQ} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{PQ}$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x, \\ f_5(x) &\equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_q(x) \equiv qx \ (\forall q \in Q). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_q(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из Q .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_q(1) = q \ (\forall q \in Q).$$

Итак, $Q \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &\equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+; \\ g_2(x, y) &\equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+; \\ g_3(x, y) &\equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+; \\ g_4(x, y) &\equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+; \end{aligned}$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{x + y, xy, q\}$, где q - любое рациональное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{PQ}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$. $\square$

Рассмотрим еще функциональную систему полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$.

ТЕОРЕМА 6. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$ имеет место аналог теоремы Колмогорова: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из $\mathbf{F}_{PR}$ является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из $\mathbf{F}_{PR}$.

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой т.е. $[K_+] = \mathbf{F}_{PR}$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x, \\ f_5(x) &\equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_r(x) \equiv rx \ (\forall r \in R). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_r(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из R .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_r(1) = r \ (\forall r \in R).$$

Итак, $R \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{x + y, xy, r\}$, где r - любое действительное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{PR}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$. $\square$

Теперь рассмотрим функциональную систему рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$.

ТЕОРЕМА 7. *В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$ аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RQ} является полной системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RQ} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{RQ}$.

Обозначим через

$$f_1(x, y) \equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x,$$

$$f_5(x) \equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_7(x) = \frac{1}{x}, f_q(x) \equiv qx \ (\forall q \in Q).$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_7(x), f_q(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из Q .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_q(1) = q \ (\forall q \in Q).$$

Итак, $Q \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

$$g_5(x, y) \equiv g_4(x, f_7(y)) = \frac{x}{y};$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{q, x + y, xy, \frac{x}{y}\}$, где q - любое рациональное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{RQ}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$. $\square$

И, наконец, рассмотрим функциональную систему рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$.

ТЕОРЕМА 8. В функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$ аналог теоремы Колмогорова имеет место: множество всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RR} является полной системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K_+ множество, состоящее из всех одноместных функций и функции $x + y$ из F_{RR} .

Нужно доказать, что класс K_+ является полной системой, т.е. $[K_+] = F_{RR}$.

Обозначим через

$$f_1(x, y) \equiv x + y, f_2(x) \equiv x^2, f_3(x) \equiv -x^2, f_4(x) \equiv 1/2x,$$

$$f_5(x) \equiv -x, f_6(x) \equiv x + 1, f_7(x) = \frac{1}{x}, f_r(x) \equiv rx \ (\forall r \in R).$$

Очевидно, что

$$f_1(x, y), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_6(x), f_7(x), f_r(x) \in K_+,$$

Сначала докажем, что из всех одноместных функций и функции $x + y$ с помощью операций суперпозиции можно получить все числа из R .

Действительно, имеем

$$f_1(f_2(x), f_3(x)) = 0; f_6(0) = 1, f_r(1) = r \ (\forall r \in R).$$

Итак, $R \subset [K_+]$.

Далее легко заметить, что

$$g_1(x, y) \equiv f_2(f_1(x, y)) = x^2 + 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_2(x, y) \equiv f_1(g_1(x, y), f_3(x)) = 2xy + y^2 \in K_+;$$

$$g_3(x, y) \equiv f_1(g_2(x, y), f_3(y)) = 2xy \in K_+;$$

$$g_4(x, y) \equiv f_4(g_3(x, y)) = xy \in K_+;$$

$$g_5(x, y) \equiv g_4(x, f_7(y)) = \frac{x}{y};$$

Итак, класс $[K_+]$ содержит подсистему $\{r, x - y, xy, \frac{x}{y}, \}$, где r – любое действительное число, которая является полной в $\mathbf{F}_{RR}$. Следовательно, K_+ полная система в функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексиадис Н. Ф. Об аналоге теоремы Колмогорова о суперпозициях непрерывных функций для функциональных систем полиномиальных и рациональных функций // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXII Международной конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова (Тула, 26–29 сентября 2023 года). Тула, 2023. с. 140–144.
2. Алексиадис Н. Ф. Рациональные А-функции с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19).
3. Алексиадис Н. Ф. Замкнутые классы в функциональной системе полиномов с действительными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 1, с. 5–14. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14).

4. Алексиадис Н. Ф. Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2023, т. 24, вып. 2, с. 2–11 (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-2-11).
5. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения // ДАН СССР, 1957, т. 114, вып. 5, с. 953–956.
6. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982. 157 с.
7. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Изд-во Наука, 1986. 384 с.

REFERENCES

1. Aleksiadis, N. Ph. 2023, “On the analogue of Kolmogorov’s theorem on superpositions of continuous functions for functional systems of polynomial and rational functions”, *Proc. 22-th Int. Conf. “Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history”*, p. 140–144.
2. Aleksiadis, N. Ph. 2022, “Rational A-functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-11-19)
3. Aleksiadis, N. Ph., “Closed classes in the functional system of polynomials with real coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 11–19. (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-1-5-14)
4. Aleksiadis N. Ph., 2023, “Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 2, pp. 2–11 (DOI 10.22405/2226-8383-2023-24-2-2-11)
5. Kolmogorov A. N. “On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition”, *DAN USSR*, 1957, vol. 114, issue 5, pp. 953–956.
6. Kudryavtsev, V. B. 1982, “Functional systems”, *Moscow: Publishing House of Mekh-mat. fac. MSU.*, 157 p.
7. Yablonsky, S. V. 1986, “Introduction to discrete mathematics”, *Moscow.:Science*, 384 p.

Получено: 30.12.2023

Принято в печать: 28.06.2024