ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.3

К ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. Н. Кузнецов, В. А. Матвеев (г. Саратов)
kuznetsovvn@info.sgu.ru, vladimir.matweev@gmail.com

Аннотация

В случае L-функций Дирихле с числовыми характерами разработан алгоритм определения нетривиальных нулей таких L-функций, в основе которого лежит построение полиномов Дирихле, приближающих L-функцию в любом прямоугольнике, расположенном в критической полосе, с показательной скоростью.

Для L-функций Дирихле числовых полей последний результат не имеет места, так как в противном случае степенной ряд с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле, определённый L-функцией, сходился бы к функции, голоморфной в точке 1. Но известно, что такой степенной ряд в случае числового поля, отличного от поля рациональных чисел, аналитически непродолжим за границу сходимости.

В связи с этим требуется разработать новую вычислительную схему определения нетривиальных нулей L-функций числовых полей. Изучению этой задачи и посвящена данная работа.

Показано, что существует последовательность полиномов Дирихле, приближающих в любом прямоугольнике, расположенном в критической полосе, L-функцию Дирихле числового поля со скоростью, превосходящей любую степенную функцию. В случае разложения L-функции Дирихле числового поля в произведение классических L-функций Дирихле указана явная конструкция аппроксимирующих полиномов Дирихле, нули которых в заданном прямоугольнике совпадают с нулями L-функции. Также обсуждаются вопросы, связанные с явной конструкцией таких полиномов Дирихле в случае произвольных L-функций Дирихле.

Ключевые слова: характеры Дирихле, L-функции Дирихле числовых полей, нетривиальные нули L-функций

Библиография: 11 названий.

ON A PROBLEM OF FINDING NON-TRIVIAL ZEROS OF DIRICHLET L-FUNCTIONS IN NUMBER FIELDS

V. N. Kuznetsov, V. A. Matveev
kuznetsovvn@info.sgu.ru, vladimir.matweev@gmail.com

Abstract

There is a numeric algorithm for finding non-trivial zeros of regular Dirichlet L-functions. This algorithm is based on a construction of Dirichlet polynomials which approximate these L-functions in any rectangle in the critical strip with exponential speed.

This result does not hold for Dirichlet L-functions in number fields, because if it did, a power series with the same coefficients as the Dirichlet series defining the L-function would converge to a function which is holomorphic at 1, however, it is known that that such power series in case of a number field different from the field of rational numbers can't be continued analytically past its convergence boundary.

Consequently, we need to develop a new numerical algorithm for finding non-trivial zeros of Dirichlet L-functions in number fields. This problem is discussed in this paper.

We show that there exists a sequence of Dirichlet polynomials which approximate a Dirichlet L-function in a number field faster than any power function in any rectangle inside the critical strip. We also provide an explicit construction of approximating Dirichlet polynomials, whose zeros coincide with those of a Dirichlet L-function in the specified rectangle, for an L-function, if it can be split into a product of classical L-functions. Additionally we discuss some questions related to the construction of such polynomials for arbitrary Dirichlet L-functions.

Keywords: Dirichlet characters, Dirichlet L-functions in number fields, non-trivial zeros of L-functions

Bibliography: 11 titles.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — поле алгебраических чисел, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = k$, $\mathfrak{O}$ — кольцо целых поля $\mathbb{K}$, χ — характер Дирихле по модулю $\mathfrak{m}$, заданный на полугруппе целых идеалов кольца $\mathfrak{O}$.

Рассмотрим L-функция Дирихле поля $\mathbb{K}$:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где произведение берётся по всем простым идеалам кольца $\mathfrak{O}$.

Известно [1, 2, 3], что L-функция (1) в случае неглавного характера χ определяет целую функцию, нетривиальные нули которой лежат в критической полосе $0 < \sigma < 1$. При этом имеет место расширенная гипотеза Римана о том, что такие нули располагаются на критической прямой. Известные плотностные теоремы [4] дают картину распределения нулей L-функции Дирихле (1) в критической полосе.

В работах [5, 6, 7] была разработана численная схема определения нетривиальных нулей классических L-функций Дирихле, т.е. L-функций с числовыми характерами. В основе этой вычислительной схемы лежат результаты о взаимосвязи между аналитическими свойствами рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и поведением соответствующих (с теми же коэффициентами) степенных рядов в окрестности единицы, полученные в работе [8].

Алгоритм определения нулей L-функции Дирихле в классическом случае заключается в следующем.

Пусть соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n$$

определяет функцию, голоморфную в точках $z = \pm 1$. Рассмотрим разложение $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x)$$

Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k$ — частичные суммы этого разложения. В работе [5] показано, что соответствующие полиномы Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s},$$

приближают L-функцию в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1,\ |t| \le T$ с показательной скоростью, то есть

$$||L(s,\chi) - Q_n(s)||_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right),$$

где величина $\rho > 1$ определяется модулем характера χ.

Там же ([5], [6]) показано, что в прямоугольнике D_T высоты T нули L-функции $L(s,\chi)$ являются нулями полинома Q_n, где $n = \left[\frac{T}{\ln \rho}\right]$. В частности, если модуль характера χ не превосходит 12, то $n = [2T]+1$. В основе этого результата лежит информация о нулях почти периодических функций конечного класса (см. [6]), каковыми являются полиномы Дирихле, а также тот факт, что приближение L-функций полиномами Дирихле в прямоугольнике D_T осуществляется с показательной скоростью.

Как показано в [6], [9], этот алгоритм построения аппроксимирующих полиномов и его численная реализация не только говорят в пользу расширенной гипотезы Римана для классических L-функций, но и позволяют получать отличным от известного способом плотностные теоремы для нулей классических L-функций Дирихле.

В связи с этим представляет интерес разработать алгоритм, позволяющий определять нули L-функций Дирихле числовых полей, лежащих в прямоугольнике D_T высоты T.

Отметим, что в работе [10] было показано, что в случае поля $\mathbb{K} \neq \mathbb{Q}$ степенной ряд, соответствующий L-функции (1):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

определяет функцию, аналитически непродолжимую за границу единичного круга, и в этом случае полиномы Дирихле $Q_n(s)$, определяемые частичными суммами разложения функции $g(x)$ на отрезке $[-1,1]$ по полиномам Чебышева, не могут приближать L-функцию (1) с показательной скоростью. Этот факт не позволяет перенести численную схему определения нулей в классическом случае на случай произвольного числового поля.

В данной работе исследуются вопросы, связанные с разработкой такого алгоритма, высказываются предположения в этом направлении и приводится их обоснование.

2. Аппроксимационные теоремы для L-функций Дирихле числовых полей

Рассмотрим степенной ряд (2):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Так как L-функция (1) определяет целую функцию, то, как показано в [11], у функции $g(z)$ в точке $z = 1$ существуют конечные радиальные производные вида

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n.$$

В этом случае известно [12, 13], что существует последовательность алгебраических полиномов

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} x^k \tag{3}$$

приближающих функцию $g(x)$ в пространстве $C[0,1]$ со скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.

$$||g(x) - P_n(x)||_{C[0,1]} = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \tag{4}$$

при любом натуральном m.

Обозначим через $Q_n(s)$ последовательность полиномов Дирихле, коэффициенты которых совпадают с коэффициентами алгебраических полиномов вида (3).

При данных обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ приближает ряд Дирихле (1) в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1,\ 0 \le t \le T$ с скоростью более высокой, чем любая степенная функция, т.е.*

$$||L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_n(s)||_{D_T} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Доказательство. В силу преобразования Меллина [14] ряды (1) и (2) и полиномы $P_n(x)$ и $Q_n(s)$ связаны следующими соотношениями:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty g(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 0,$$

где $g(e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$, $\Gamma(s)$ — Г-функция Эйлера, и

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx, \quad \sigma > 0.$$

Отсюда при $0 < \sigma_0 \le \sigma < 1,\ |t| \le T$ получаем оценку вида

$$\begin{aligned}|L(s, \chi, \mathbb{K}) - Q_n(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_0^n |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx + \\ + \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_n^\infty e^{-\lambda x} |e^{\lambda x}(g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| x^{\sigma-1} dx,\end{aligned}$$

где $0 < \lambda < 1$.

Оценим первый интеграл:

$$\int_0^n |g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})| x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \int_0^n x^{\sigma-1} dx = o\left(\frac{1}{n^m}\right) \frac{n^\sigma}{\sigma_0} = o\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m — любое натуральное.

Для второго интеграла для $x \in [n, \infty)$ имеем:

$$|e^{\lambda x}(g(e^{-x}) - P_n(e^{-x}))| = |e^{(\lambda-1)x}(\widetilde{g}(e^{-x}) - \widetilde{P_n}(e^{-x}))| \le Ce^{(\lambda-1)x}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на отрезке $[n, \infty)$ выполняется оценка $\widetilde{g}(e^{-x}) - \widetilde{(P_n)}(e^{-x}) = O(1)$. Многократное применение формулы интегрирования по частям даёт оценку вида:

$$\begin{aligned}\int_n^\infty e^{-\lambda x} x^{\sigma-1} dx &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} + \frac{\lambda e^{-\lambda n} n^{\sigma+1}}{\sigma(\sigma+1)} + \ldots = \\ &= \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} \left(1 + \frac{\lambda n}{\sigma+1} + \ldots + \frac{(\lambda n)^k}{(\sigma+1)\ldots(\sigma+k)} + \ldots\right) \le \\ &\le \frac{e^{-\lambda n} n^\sigma}{\sigma} e^{\lambda n} = \frac{n^\sigma}{\sigma}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\int_n^\infty e^{-\lambda x}|e^{\lambda x}(g(e^{-x})-P_n(e^{-x})|x^{\sigma-1}dx \leq Ce^{(\lambda-1)n}\frac{n^\sigma}{\sigma} = o\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

при любом m.

Таким образом, утверждение теоремы 1 полностью доказано. □

Отметим, что теорема 1 не позволяет указать соотношение между n и T, при котором в прямоугольнике D_T нули L-функции Дирихле совпадали бы с нулями полинома Дирихле $Q_n(s)$. Ниже мы укажем класс L-функций Дирихле, для которых это удаётся сделать.

Рассмотрим случай норменного характера χ числового поля $\mathbb{K}$, т.е. такого характера, для которого существует числовой характер Дирихле χ_1, такой, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца целых элементов $\mathfrak{O}$ поля $\mathbb{K}$ имеет место равенство

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_1(N(\mathfrak{p})).$$

В работе [15] приведено описание полей $\mathbb{K}$, для которых все характеры Дирихле являются норменными. При этом в этой работае показано, что в случае норменного характера χ имеет место разложение L-функции $L(s,\chi,\mathbb{K})$ в произведение классических L-функций Дирихле:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{l} L(s,\chi_i), \quad l \leq k. \tag{5}$$

В работах [5], [6] было показано, что для классических L-функций Дирихле имеет место следующее утверждение: существует такая последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, что в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1,\ 0 \leq t \leq T$ имеет место оценка

$$||L(s,\chi) - Q_n(s)||_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{6}$$

где $\rho > 1$, а константа в «O» имеет вид

$$\frac{e^T}{T}.$$

При этом там же ([5], [6]) указан численный алгоритм построения таких полиномов Дирихле.

Приведённые выше факты позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть χ — норменный характер числового поля $\mathbb{K}$. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^l}(s)$, где $l \leq k$, что для любого прямоугольника $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1,\ 0 \leq t \leq T$ имеет место оценка вида*

$$||L(s,\chi,\mathbb{K}) - Q_{n^l}(s)||_{D_T} = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{7}$$

где $\rho > 1$, а константа в оценке не превосходит величичны $lT^{l-2}e^T$.

Доказательство. Доказательство достаточно провести для случае, когда в разложении (5) присутствуют только два сомножителя. Общий случай будет следовать из случая двух сомножителей на основании индуктивных рассуждений.

Обозначим $f_1(s) = L(s, \chi_1)$ и $f_2(s) = L(s, \chi_2)$ и соответствущие последовательности полиномов Дирихле $Q_{n,1}(s), Q_{n,2}(s)$.

Пусть $Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)$. Тогда при $s \in D_T$ имеем:

$$|f_1(s)f_2(s) - Q_{n^2}(s)| \leq$$
$$\leq |f_1(s)f_2(s) - Q_{n,1}(s)f_2(s)| \cdot |Q_{n,1}(s)f_2(s) - Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s)| \leq$$
$$\leq \frac{Te^T}{T}\frac{1}{\rho_1^n} + \frac{Te^T}{T}\frac{1}{\rho_2^n} \leq \frac{2Te^T}{T}\frac{1}{\min\{\rho_1, \rho_2\}^n},$$

что и доказывает утверждение теоремы 2. □

3. К задаче построения аппроксимирующих полиномов

В этом параграфе обсудим вопросы, связанные с построением аппроксимирующих полиномов Дирихле, нули которых в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1,\ 0 \leq t \leq T$ должны совпадать с нулями L-функции числового поля $\mathbb{K}$. При изучении этой задачи наряду с теоретическими рассуждениями будут использованы результаты численного эксперимента.

Рассмотрим случай норменных характеров. Как было показано в теореме 2, существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^k}(s)$, для которых в каждом прямоугольнике D_T высоты T имеет место оценка (7). Укажем достаточно грубое соотношение между n и T, при котором нули L-функции Дирихле $L(s, \chi, \mathbb{K})$ должны совпадать с нулями полиномов $Q_{n^k}(s)$.

В работе [6] указано, что $Q_{n^k}(s)$ является почти периодической функцией конечного класса, и число нулей с учётом их кратности $n(T)$ такой функции в полосе $0 \leq t \leq T$ равно

$$n(T) = \frac{k \ln n}{2\pi}T + \omega(T), \tag{8}$$

где $\omega(T)$ — некоторая почти периодическая функция. Из результатов работы [6] следует, что $\omega(T) = O(T)$, и основная масса нулей $Q_{n^k}(s)$ лежит в критической полосе.

Пусть n такое, что величина отклонения $\varepsilon = ||L(s, \chi, k) - Q_{n^k}(s)||_{D_T}$ равна величине $\frac{T}{n(T)}$. В силу (8) получаем:

$$\varepsilon = \frac{T}{n(T)} \approx \frac{\pi}{k \ln n}. \tag{9}$$

В силу (7) имеем:

$$\frac{\pi}{k \ln n} \approx \frac{e^T T^k k}{\rho^n}.$$

Отсюда получаем:

$$k \ln n \approx \frac{\pi \rho^n}{e^T T^k k}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\ln\ln n \leq \ln\pi + n\ln\rho - T - k\ln T\ln k,$$

и, следовательно,

$$n\ln\rho - T \geq 0$$

или

$$n \geq \frac{T}{\ln\rho}. \tag{10}$$

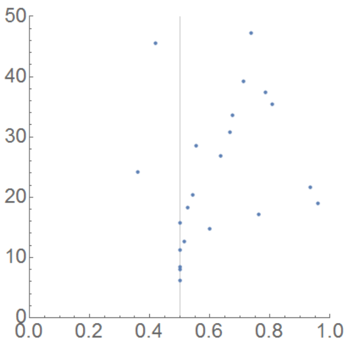
Если величина нормы модуля характера χ, не превосходит величины 12, то можно показать, что $\ln\rho \geq \frac{1}{2}$. В этом случае можно считать, что

$$n = [2T] + 1. \tag{11}$$

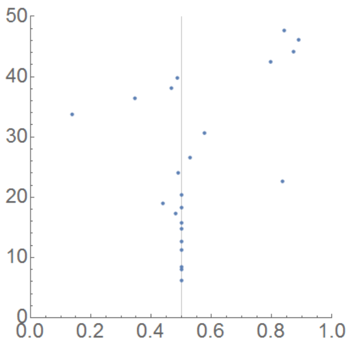
Таким образом, грубая оценка соотношения между величиной n аппроксимирующего полинома $Q_{n^k}(s)$, степень которого равна n^k, и величиной T такая же, как и для аппроксимирующих полиномов $Q_n(s)$ в классическом случае (см. [5], [6]).

Ниже приведены результаты вычислений в случае ряда Дирихле

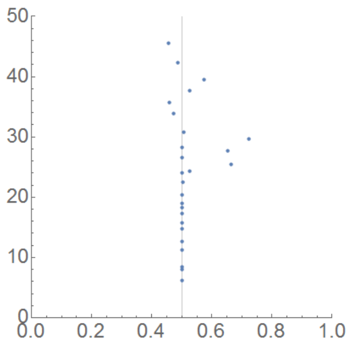
$$f(s) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2),$$



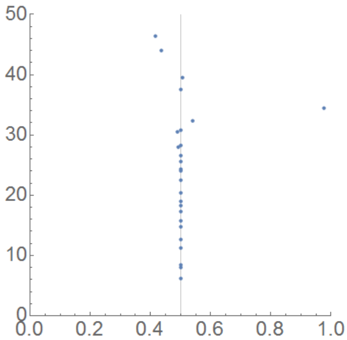
(a) $n = 30$



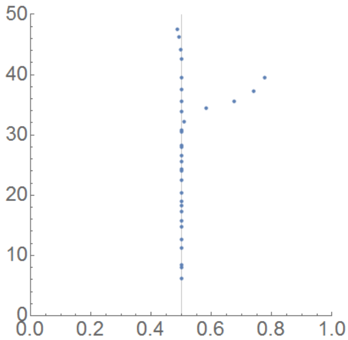
(b) $n = 40$



(c) $n = 50$



(d) $n = 60$



(e) $n = 70$

где χ_1 — характер Дирихле по модулю 3, принимающий значения

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

χ_2 — характер Дирихле по модулю 5, принимающий значения

$$\chi_2(n) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0 \pmod 5, \\ 1 & n \equiv 1 \pmod 5, \\ i & n \equiv 2 \pmod 5, \\ -i & n \equiv 3 \pmod 5, \\ -1 & n \equiv 4 \pmod 5. \end{cases}$$

Вычисления проводились с помощью аппроксимирующих полиномов

$$Q_{n^2}(s) = Q_{n,1}(s)Q_{n,2}(s),$$

и с помощью аппроксимирующих полиномов, полученных в результате разложения на отрезке $[-1, 1]$ соответствующего степенного ряда по полиномам Чебышева. Наблюдается практическое совпадение нулей как в первом, так и во втором случаях.

Можно только предположить, что в случае произвольных характеров Дирихле будет эффективной численная схема определения нулей L-функций Дирихле числовых полей, связанная с разложением соответствующих степенных рядов по полиномам Чебышева. При этом величины n и T будут связаны соотношением $n > mT$, где величина m зависит от нормы модуля характера.

4. Заключение

Остановимся на вопросах, вставших в связи с приведёнными выше результатами. Во-первых, отметим, что численная схема определения нулей L-функций Дирихле числовых полей требует дальнейшей доработки. Во-вторых как показано в [9], аппроксимационный подход позволяет получить плотностные теоремы для нулей рядов Дирихле с периодическими коэффициентами. Представляет интерес на основании аппроксимационных теорем для полиномов Дирихле получить плотностные теоремы для нулей L-функций Дирихле числовых полей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейлбронн Х. Дзета-функция и L-функция // Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха — М.: изд-во «МИР», 1969. С. 310–346.

2. Ленг С. Алгебраические числа. — М.: изд-во «МИР», 1966.

3. Вейль А. Основы теории чисел. — М.: Мир, 1972.

4. Туран П. О некоторых новых результатах в аналитической теории чисел / Проблемы аналитической теории чисел — М.: изд-во «МИР», 1975. С. 118–142.

5. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского гос. университета — Белгород: изд-во БелГУ, 2011. Вып. 24. С. 47–54.

6. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 117–121.

7. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Саратовского ун-та. Серия «Математика. Информатика. Механика.» — Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 80–84.

8. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1994. Т. 36, № 6. С. 805–812.

9. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле // Диссертация на соискание уч. степени к. ф.-м. н. — Ульяновск, 2014.

10. Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Кривобок В. В. Об аналитической непродолжимости за границу сходимости степенных рядов, отвечающих L-функциям Дирихле числовых полей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвузовский сборник научных трудов — Саратов: изд-во СГУ, 2009. Вып. 5. С. 31–36.

11. Кузнецов В. Н., Кривобок В. В., Сецинская Е. В. О граничных свойствах одного класа степенных рядов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. — Саратов: изд-во СГУ, 2005. Вып. 3. С. 40–47.

12. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. — Л.: изд-во ЛГУ, 1973.

13. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: «Наука», 1970.

14. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: «Мир», 1967.

15. Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. К задаче о разложении в произведение L-функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сборник. 2004. Т. V, вып. 3(11). С. 51–63.

REFERENCES

1. Heilbronn, H. 1969, "Zeta-function and L-function" , *Algebraicheskaja teorija chisel. Pod redakciei J. Kasselsa i A .Frelikha, "MIR", Moscow*, pp. 310–346.

2. Leng, S. 1966, "Algebraic numbers" , *"MIR", Moscow.*

3. Weil, A. 1972, "Basics of number theory" , *"MIR", Moscow.*

4. Turan, P. 1975, "On a certain new results in analytical number theory" , *Problemy analiticheskoi teorii chisel, "MIR", Moscow,* pp. 118–142.

5. Korotkov, A. E. & Matveeva, O. A. 2011, "On a particular numeric algorithm for finding zeros of entire functions which are defined by Dirichlet series with periodic coefficients", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gos. universiteta*, issue 24, pp. 47–54.

6. Matveeva, O. A. 2013, "On zeros of Dirichlet polynomials which approximate Dirichlet L-functions in the critical string", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, issue 2, pp. 117–121.

7. Matveeva, O. A. 2013, "Approximation polynomials and behavior of Dirichlet L-functions in the critical strip", *Izvestiia Saratovskogo un-ta. Seriia «Matematika. Informatika. Mekhanika.»*, vol. 13, issue 4, part 2, pp. 80–84.

8. Kuznetsov, V. N. 1994, "An analog of Szego theorem for one class of Dirichlet series", *Mat. zametki*, vol. 36, no. 6, pp. 805–812.

9. Matveeva, O. A. 2014, "Analytical properties of some classes of Dirichlet series and some problems of the theory of Dirichlet L-functions", Dissertation, Ul'ianovsk.

10. Kuznetsov, V. N., Kuznetsova, T. A. & Krivobok, V. V. 2009, "On the impossibility of analytical continuation beyond the convergence boundary of power series corresponding to Dirichlet L-functions in number fields", *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov*, issue 4, pp. 31–36.

11. Kuznetsov, V. N., Krivobok, V. V. & Setsinskaia, E. V. 2005, "On the boundary properties of one class of power series", *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam: mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov*, issue 3, pp. 40–47.

12. Daugavet, I. K. 1973, "An introduction to the theory of function approximation", *LGU publishing, Leningrad.*

13. Suetin, P. K. 1970, "Classical orthogonal polynomials", *"Nauka", Moscow.*

14. Prahar, K. 1967, "The distribution of prime numbers", *"MIR", Moscow.*

15. Kuznetsov, V. N., Setsinskaia, E. V. & Krivobok, V. V. 2004, "On a problem of splitting a Dirichlet L-function in number fields", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, issue 3 (II), pp. 51–63.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 13.05.2015