УДК 51(091)+511.46 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-2-20-29

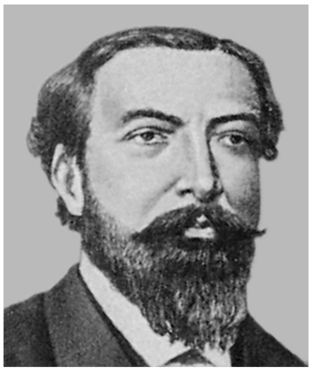
Александр Иванович Галочкин (к 80-летию со дня рождения)

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский

Александр Иванович родился 14 мая 1944 г. в г. Уржуме, маленьком, но очень старом и красивом городке Кировской области (первое упоминание в 1584 г.). Окончив школу в 1962 г. он поступил учиться на механико-математический факультет МГУ. После окончания факультета в 1967 г. и аспирантуры защитил 14 мая 1971 г. кандидатскую диссертацию «О диофантовых приближениях чисел некоторых классов». В студенческие годы и в аспирантуре его научным руководителем был профессор Шидловский Андрей Борисович. С 1970 года и по настоящее время А. И Галочкин непрерывно работает на кафедре теории чисел механико-математического факультета МГУ сначала в должности ассистента, а с 1 сентября 1978 г. в должности доцента. В 2009 году он защитил докторскую диссертацию "Об арифметических свойствах значений аналитических функций некоторых классов". С 2011 г. он профессор механико-математического факультета МГУ.

А. И. Галочкин крупный учёный и известный специалист по теории чисел. Его работы по теории трансцендентных чисел и, в частности, исследования арифметических свойств значений E-функций и G-функций Зигеля, оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций, широко известны в России и многих странах. По приглашениям зарубежных учебных и научных организаций он читал лекции о полученных им результатах в университетах Монголии, Японии и Финляндии, участвовал в международных научных конференциях по теории чисел в Германии, Литве, Белоруссии. Им опубликовано более 50 печатных работ.

Прежде, чем рассказывать подробнее о научных достижениях А. И. Галочкина, скажем несколько слов о теории трансцендентных чисел. Существование трансцендентных (не алгебраических) чисел впервые доказал в 1844 году Жозеф Лиувилль, фактически построивший примеры таких чисел. Например, он доказал, что число $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ трансцендентно. В 1873 г. Шарль Эрмит доказал трансценденность числа e. И Лиувилль, и Эрмит были иностранными членами Российской Академии наук, Эрмит даже был её Почётным членом.



Жозеф Лиувилль (1809–1882)

Шарль Эрмит (1822–1901)

В 1882 году Фердинанд Линдеман установил трансцендентность числа π и тем доказал невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки — задачи, которую пытались решить ещё древние греки. Между прочим, Линдеман был научным руководителем Давида Гильберта — одного из великих математиков, сформулировавшего на рубеже XIX и XX столетий ряд проблем, работа над которыми должна была по его мнению определить основные направления развития математики в XX столетии. Одной из таких проблем под номером 7 было утверждение о трансцундентности чисел вида a^b при алгебраических числах a, b и условиях, что a отлично от 0 и 1, и b иррационально. Эта гипотеза была полностью доказана в 1934 г. Александром Осиповичем Гельфондом и несколько позже с рядом существенных отличий Теодором Шнайдером. В эквивалентной формулировке, как утверждение о трансцендентности при некоторых условиях чисел вида $\log_a b$ эта гипотеза высказывалась ещё Леонардом Эйлером.

Фердинанд Линдеман (1852–1939)

Давид Гильберт (1862–1943)

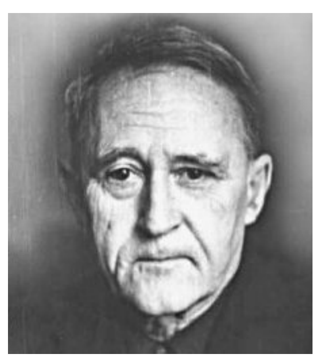
Леонард Эйлер (1707–1783)

Александр Осипович Гельфонд (1906–1968)

Теодор Шнайдер (1911–1988)

Гельфонд был заведующим кафедрой теории чисел мехмата МГУ с 1948 по 1968 годы и, естественно занимался вместе со своими учениками не только комплексным анализом, но и теорией чисел, в частности исследованиями проблем, связанных с трансцендентностью чисел. После смерти Гельфонда кафедру унаследовал Андрей Борисович Шидловский, а руководить научным семинаром Гельфонда стали его ученики А. Б. Шидловский и Наум Ильич Фельдман, оба выдающиеся специалисты в теории трансцендентных чисел.

Андрей Борисович Шидловский (1915–2007)



Наум Ильич Фельдман (1918–1994)

А. Б. Шидловский, математические интересы которого были связаны в основном с исследованиями трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций Зигеля, создал большую школу в теории трансцендентных чисел, в частности его учеником был А. И. Галочкин. Класс E-функций (функций в некотором смысле похожих на экспоненту e^z) был определён в 1929 году Карлом Зигелем в связи с исследованиями алгебраической независимости значений целых гипергеометрических функций второго порядка.

Определение 1. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраическое числовое поле конечной степени. Функция*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}\,, \quad a_\nu \in \mathbb{K}\,,$$

называется E-функцией, если при любом $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия

$$1) \quad \overline{|a_\nu|} = O\left(\nu^{\varepsilon\nu}\right);$$

2) *существует последовательность $\{q_n\}$ натуральных чисел таких, что*

$$q_n a_\nu \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \qquad q_n = O(n^{\varepsilon n}), \qquad n = 0, 1, \ldots; \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n.$$

E-функции образуют кольцо, замкнутое относительно дифференцирования. А. Б. Шидловский существенно усилил метод Зигеля. Он установил следующий критерий алгебраической независимости значений E-функций.

Теорема 1 (Теорема Шидловского). *Пусть совокупность E-функций*

$$f_1(z), \ldots, f_s(z) \tag{1}$$

составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = Q_{i0}(z) + \sum_{j=1}^{s} Q_{ij}(z) y_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant s; \quad Q_{ij}(z) \in \mathbb{K}(z), \tag{2}$$

α — алгебраическое число, отличное от нуля и от полюсов всех функций $Q_{ij}(z)$.

Тогда для алгебраической независимости значений

$$f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha) \tag{3}$$

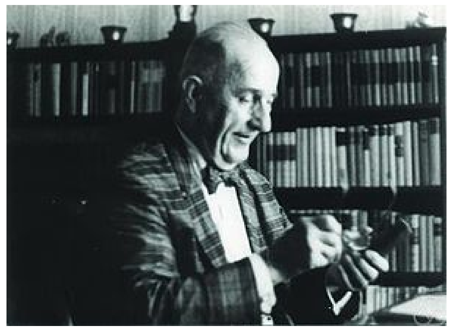
над полем $\mathbb{Q}$ необходима и достаточна алгебраическая независимость функций (1) над полем $\mathbb{C}(z)$.

Впоследствии этот результат был распространен А. Б. Шидловским на случай алгебраически зависимых E-функций. Все приложения метода, созданного Зигелем и Шидловским и, в частности, теоремы Шидловского, связаны с обобщёнными гипергеометрическими функциями

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[a_1+1,\,\nu]\cdots[a_u+1,\,\nu]}{[b_1+1,\,\nu]\cdots[b_v+1,\,\nu]}\, z^{t\nu}\,, \quad t = v - u > 0, \tag{4}$$

где $[\lambda+1,\,\nu] = (\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu)$, $\quad [\lambda+1,\,0] = 1$, а все числа $b_j \neq -1, -2, \ldots$..

В 1929 г. К. Зигель доказал, что, если все параметры a_i, b_j — рациональные числа, то функция (4) является E-функцией и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами — рациональными функциями. Но были известны примеры E-функций с иррациональными параметрами.



Карл Людвиг Зигель(1896–1981)

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие того, чтобы общая гипергеометрическая функция (4) являлась E-функцией. Она носит окончательный характер и была доказана А. И. Галочкиным в 1981 году.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция (4) с комплексными параметрами $a_1, \dots, a_u$; $b_1, \dots, b_v$, отличными от $-1, -2, \dots$, и такими, что*

$$a_j \neq b_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant u;\ 1 \leqslant k \leqslant v,$$

была E-функцией, необходимо и достаточно, чтобы все числа a_j, b_k были рациональными, либо нерациональные среди них могли быть разбиты на такие пары a_{j_s}, b_{j_s}, $1 \leqslant s \leqslant r$, что все разности $a_{j_s} - b_{j_s}$ были бы неотрицательными целыми рациональными числами.

Среди многочисленных количественных результатов, доказанных А. И. Галочкиным мы выделим здесь точные по высоте оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций. Начнём с первого подобного результата, доказанного в 1978 г. с очень точной оценкой рациональных приближений к числу e.

Теорема 3 (Теорема Девиса). *Пусть ε произвольное фиксированное число из интервала $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.*

1. Для любой пары целых чисел p, q с $q > q_0(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}.$$

2. Существует бесконечная последовательность рациональных чисел p/q, $q > 0$ таких, что

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{\ln \ln q}{q^2 \ln q}.$$

Для доказательства Девис использовал интегральные представления для числителей и знаменателей подходящих дробей к числу e.

В 1981-х году А. Н. Коробову удалось доказать следующую оценку снизу линейной формы, отличавшуюся от соответствующей оценки сверху лишь на постоянный множитель.

Теорема 4 (Теорема А. Н. Коробова). . *Пусть s, a, $a+b$, c — натуральные числа и*

$$\psi_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{n+s\nu}}{(as)^{\nu}\nu!}\prod_{x=1}^{n+s\nu}(ax+b)^{-1},$$

Тогда для любых целых чисел $h_0\,, h_1\,\ldots, h_s$ при

$$H=\max(|h_0|\,,\ldots,|h_s|)>3$$

справедливо неравенство

$$\left|h_0\psi_0\left(\frac{1}{c}\right)+\cdots+h_s\psi_s\left(\frac{1}{c}\right)\right|>\gamma\,H^{-s}\left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\frac{s+1}{2}}.$$

Положительная постоянная γ не зависит от H, причем существует бесконечная последовательность линейных форм, для которой выполняется противоположное неравенство, с некоторой большей константой γ_1.

В 1984 году А. И. Галочкин существенно обобщил теорему Коробова. Этот результат не превзойдён до сих пор. Пусть $\mathbb{I}$ — поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле, числа $\lambda_j\in\mathbb{I}$, отличны от -1, $-2,\ldots$, и упорядочены по убыванию последовательности $\sigma_j=\{\Re\lambda_j\}$, где $\{\alpha\}$ — дробная доля числа α.. Пусть также $a\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $a\neq 0$, — таково, что $a\lambda_j\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $\quad 1\leqslant j\leqslant s$. Обозначим

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{a^{m\nu}(\nu!)[\lambda_1+1,\nu]\cdots[\lambda_s+1,\,\nu]}\,,\quad m=s+1, \tag{5}$$

и определим

$$\Delta=\min_{1\leqslant j\leqslant s}\left(\frac{j-1}{s}+\sigma_j-\frac{\sigma_1+\cdots+\sigma_s}{s}\right)$$

Функция $\psi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a^m\delta(\delta+\lambda_1)\cdots(\delta+\lambda_s)y=zy,\quad \delta=z\frac{d}{dz}\,. \tag{6}$$

Теорема 5. *Пусть $b\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $\quad b\neq 0$, числа $\lambda_j\in\mathbb{I}$ не все равны нулю и*

$$R=h_0\psi\left(\tfrac{1}{b}\right)+h_1\psi'\left(\tfrac{1}{b}\right)+\cdots+h_s\psi^s\left(\tfrac{1}{b}\right),\quad H=\max\nolimits_{0\leqslant k\leqslant s}\mid h_k\mid\geqslant 3\,,$$

$$\Phi(x)=x^{-s}(\ln x)^{-s(1-\Delta)}(\ln\ln x)^{s(r-\Delta)}.$$

Тогда существуют эффективно вычисляемые положительные постоянные

$$C_j=C_j(a,\,b,\,\lambda_1,\ldots,\lambda_s),$$

такие, что справедливы следующие утверждения:

1) *Выполняется неравенство*

$$|R|>C_1\Phi(H).$$

2) *Существует бесконечное количество форм R, для которых*

$$|R|<C_2\Phi(H).$$

В формулировке этой теоремы присутствует зависящее от параметров число r, определяемое в работе А. И. Галочкина. Для краткости мы это определение здесь опускаем.

Приведем пример на применение теоремы 5

Пример 1. *Пусть*

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu!)^{s+1}} .$$

В этом примере

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_s = 0, \Delta = 0 , \; r = s.$$

Поэтому в теореме 5

$$\Phi(x) = x^{-s}(\ln x)^{-s}(\ln\ln x)^{s^2} .$$

В 1929 г. Зигель определил ещё один класс функций, при исследовании которых могли использоваться идеи, предложенные им для исследования значений E — функций. Функции, входящие в этот класс, он назвал G — функциями. Их определение отличалось от определения E-функций лишь отсутствием факториалов в знаменателях коэффициентов определяющих их степенных рядов, см.(1), а также экспоненциальными оценками для роста чисел, сопряженных с коэффициентами рядов, а также для роста общих знаменателей коэффициентов. Основные примеры также были связаны с гипергеометрическими функции но теперь определяющие их ряды Тейлора должны были иметь конечный радиус сходимости. В случае гипергеометрических рядов с рациональными параметрами, см. (4), должно выполняться условие $u = v$. Множество G-функций, как и множество E-функций, образует кольцо, производная G-функции также есть G-функция. Конкретные примеры G-функций: $\ln(1+z)$, $(1+z)^r$, $r \in \mathbb{Q}$. Сложность возникающих в этой области проблем можно проиллюстрировать замечанием, что вопрос об иррациональности значений G-функции $(1-z^n)^{1/n}$ в рациональных точках равносилен Большой теореме Ферма.

К. Зигель ограничился лишь краткими замечаниями о возможности исследования арифметических свойств значений G-функций и сформулировал без доказательства несколько утверждений о значениях алгебраических функций и некоторых интегралов от них. Первые попытки применить метод К.Зигеля для исследования арифметической природы значений G-функций в алгебраических точках.были сделаны в работах М. С. Нурмагомедова, но доказанные результаты были настолько слабы, что не позволяли устанавливать даже иррациональность каких-либо чисел.

Среди рассуждений К. Зигеля упоминалось свойство сокращения факториалов у G-функций. Не было ни его определения, ни примеров его использования, но Зигель писал, что оно важно для доказательства сформулированных им результатов. Истинный смысл этого понятия был вскрыт в 1974 году А. И. Галочкиным. Он установил точное определение этого свойства и применил его в исследованиях значений некоторых G-функций.

Для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{Z}[x[$ и при любом целом $k \geqslant 0$ выполняется включение $\frac{1}{k!}Q^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — это свойство сокращения факториалов для многочленов.

Определение 2. *Пусть $\mathbb{K}$ — конечное расширение поля рациональных чисел и совокупность G-функций $f_1(z), \dots, f_s(z)$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (2). Тогда при любом целом $k \geqslant 0$ с некоторыми рациональными функциями $Q_{kij}(z)$ выполняются равенства*

$$y_i^{(k)} = Q_{ki0}(z) + \sum_{j=1}^{s} Q_{kij}(z) y_j \, ; \quad Q_{kij}(z) \in \mathbb{K}(z) \, ,$$

$$1 \leqslant i \leqslant s \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Говорят, что эта совокупность G —функций имеет свойство сокращения факториалов, если существуют ненулевой многочлен $T(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ и натуральные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ такие, что

$$\frac{a_n}{k!}(T(z))^k Q_{kij}(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant s, \quad 0 \leqslant j \leqslant s,$$

причём с некоторыми постоянными Λ и γ, не зависящими от n выполняются неравенства

$$a_n < \gamma \Lambda^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Здесь и далее буквами $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ обозначается кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$.

Пример 2. *Для $s = 1$ и G – функции $f_1(z) = -\ln(1-z)$ имеем*

$$f_1^{(k)}(z) = (k-1)!(1-z)^{-k},$$

так что выбрав a_n равным наименьшему общему кратному чисел $1, 2, \ldots, n$, получим

$$\frac{a_n}{k!}(1-z)^k Q_{k10}(z) = \frac{a_n}{k} \in \mathbb{Z}[z]\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

Учитывая, что согласно асимптотическому закону распределения простых чисел наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$ растет не быстрее, чем $e^{(1+\varepsilon)n}$, заключаем что для функции $\ln(1-z)$ выполняется условие сокращения факториалов.

В 1974 году А. И. Галочкин доказал условные оценки для линейных форм с целыми коэффициентами от значений G — функций в рациональных точках, близких к нулю. Дополнительно предполагалась выполнимость условия сокращения факториалов для рассматриваемых G — функций. Для некоторых функций ему удалось доказать условие сокращения факториалов, что дало безусловные результаты. Например, он доказал, что для любых натуральных чисел d, H и любого многочлена $P(x_1, ..., x_s) \neq 0$ с целыми рациональными коэффициентами степени не выше d, высоты, не превосходящей H, любых попарно различных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ из поля $\mathbb{I}$ и любого натурального q, превосходящего некоторую границу, зависящую от s, всех чисел α_j и поля $\mathbb{I}$, выполняется неравенство

$$\left| P\left(\ln\left(1+\frac{\alpha_1}{q}\right), \ldots, \ln\left(1+\frac{\alpha_s}{q}\right)\right)\right| > q^{-\lambda} H^{-\mu}, \tag{8}$$

где λ и μ положительные постоянные, зависящие от всех чисел α_j и доплнительно от числа d.

Все постоянные в работе были явно вычислены, но мы опускаем их, чтобы не перегружать статью техническими подробностями.

В частности из этого результата следовало, что при любом натуральном $q > e^{795}$ число

$$\ln\left(1-\frac{1}{q}\right)\ln\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

иррационально. Граница для q впоследствии была снижена, но всё ещё достаточно велика.

В 1985 году Д. В. и Г. В. Чудновским удалось доказать, что условие сокращения факториалов выполняется для любого набора G — функций, удовлетворяющих однородным линейным системам дифференциальных уравнений, определённым над полем $\mathbb{Q}(z)$. В частности, при этом была доказана следующая теорема о линейной независимости и оценках снизу для линейных форм с целыми коэффициентами в достаточно малых рациональных точках, см. теорему Чудновских ниже. Г. В. Чудновский также доказал аналог утверждения А. И. Галочкина (8) для любых G-функций, удовлетворяющих однородным системам дифференциальных уравнений вида .

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{s} Q_{kij}(z) y_j\,; \quad Q_{kij}(z) \in \mathbb{Q}(z)\,. \tag{9}$$

Теорема 6 (Теорема Чудновских). *Пусть G-функции* $f_1,(x),...,f_s(x)$ *составляют решение системы дифференциальных уравнений , их ряды Тейлора имеют рациональные коэффициенты, а сами функции вместе с 1 линейно независимы над полем* $\mathbb{C}(z)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и произвольного* $r = \frac{a}{b} \neq 0$, *с такими целыми* a, b, *что* $|b|^{\varepsilon} > c \mid a \mid^{(s+1)(s+\varepsilon)}$, *где* $c = c(f_1, \ldots, f_s, \varepsilon) > 0$, *числа* $1, f_1(r), .., f_s(r)$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Более того, для произвольных чисел* H_0, H_1, $\ldots,$, $H_s \in \mathbb{Z}$ *выполняется неравенство*

$$\mid H_0 + H_1 f_1(r) + \cdots + H_s f_s(r) \mid > H^{-s-\varepsilon}$$

с $H = max(|H_0|, |H_1|, \ldots, |H_s|)$, *с условием* $H > h = h(f_1, \ldots, f_s, \varepsilon, r) > 0$. *Здесь постоянные* c *и* h *эффективно вычислимы.*

В 1996 году А. И. Галочкину удалось доказать условие сокращения факториалов для G-функций, удовлетворяющих и неоднородным системам дифференциальных уравнений.

Ограниченность объёма статьи вынуждает нас остановиться с описанием важных научных результатов А. И. Галочкина. Скажем теперь и о других сторонах его деятельности.

Профессор А. И. Галочкин педагог высокой квалификации. Его блестящие лекции по теории чисел всегда зарождали интерес у слушателей к этой науке. Много лет он ведёт занятия по математическому анализу на механико-математическом факультете, читает лекции и ведёт практические занятия по обязательному курсу теории чисел, читает специальные курсы, руководит специальными семинарами. Среди читавшихся им спецкурсов выделим "Введение в теорию трансцендентных чисел "Приближения чисел рациональными дробями "Теоретико-числовые методы и алгоритмы "Диофантовы приближения и трансцендентные числа Успешно руководит он научной деятельностью студентов и аспирантов. Его учебник и задачник по теории чисел используются в преподавании на механико-математическом факультете МГУ.

Много сил и времени Александр Иванович уделял и уделяет работе со школьниками. Он ежегодно участвует в подготовке и проведении Московской математической олимпиады и математической олимпиады механико-математического факультета МГУ. Составленные им задачи регулярно предлагались на этих олимпиадах. Он был одним из авторов сборников задач Московской математической олимпиады. А. И. Галочкин преподавал математику в 1134 московской школе, стараясь подготовить учащихся к восприятию более трудных, чем в обычной школьной программе, разделов математики и, в частности, к обучению в физико-математических классах, успешному дальнейшему обучению в МГУ и других высших учебных заведениях.

Добавим ещё, что Александр Иванович большой любитель рыбной ловли. Ежегодно со своими друзьями он на 2-3 недели отправляется в лодочное путешествие по российским рекам и возвращается с впечатляющими фотографиями своих рыбных трофеев.

Поздравляем Александра Ивановича с юбилеем и желаем ему обильных уловов, в том числе и в науке.

Ю. В. Нестеренко, В. А. Быковский, В. Н. Чубариков, В. Г. Чирский, О. Н. Герман, Н. М. Добровольский