ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.524

ОЦЕНКА КОРОТКИХ КУБИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С «ДЛИННЫМ» СПЛОШНЫМ СУММИРОВАНИЕМ

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов, Б. М. Замонов (г. Душанбе)

Аннотация

И. М. Виноградов первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad 1\leqslant q\leqslant\tau.$$

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2)\ll q\ll x^{1/3},\qquad y>x^{2/3+\varepsilon},$$

основу которой наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\leqslant 2M}a(m)\sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}}b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N\leqslant U<2N$, $x>x_0$, y – вещественные числа.

Затем Хейзелгроув, В. Статулявычус, Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо, Чжан Тао получили нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha;x,y)$, $y\geqslant x^{\theta}$, q — произвольное, и доказали асимптотическую формулу в тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i-N/3|\leqslant H$, $H=N^{\theta}$, соответственно при

$$\theta=\frac{63}{64}+\varepsilon,\qquad \frac{279}{308}+\varepsilon,\qquad \frac{2}{3}+\varepsilon,\qquad \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

Сумму $J_2(\alpha;x,y,M,N)$ изучили Дж. Лю и Чжан Тао и получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha;x,y)$ при $y\geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Работа посвящена выводу нетривиальных оценок сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, в которых имеется «длинная» сплошная сумма на малых дугах.

Ключевые слова: короткая двойная тригонометрическая сумма, метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, нетривиальная оценка.

Библиография: 12 названий.

ESTIMATES OF SHORT CUBIC DOUBLE EXPONENTIAL SUMS WITH A LONG CONTINUOUS SUMMATION

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, B. M. Zamonov (Dushanbe)

Abstract

I. M. Vinogradov pioneered the study of short exponential sums with primes. For $k = 1$ using his method of estimating sums with primes, he obtained a non-trivial estimate for sums of the form

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau$$

when

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon},$$

This estimate is based on "Vinogradov sieve" and for $k = 1$ utilizes estimates of short double exponential sums of the form

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

where $a(m)$ and $b(n)$ are arbitrary complex-valued functions, M, N are positive integers, $N \leqslant U < 2N$, $x > x_0$, y are real numbers.

Later, B. Haselgrove, V. Statulyavichus, Pan Cheng-Dong and Pan Cheng-Biao, Zhan Tao obtained a nontrivial estimate for the sum $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^\theta$, where q was an arbitrary integer, and successfully proved an asymptotic formula for ternary Goldbach problem with almost equal summands satisfying $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, respectively when

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

J. Liu and Zhan Tao studied the sum $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ and obtained a non-trivial estimate for the sum $S_2(\alpha; x, y)$ when $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

This paper is devoted to obtaining non-trivial estimates for the sum $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, with a "long" continuous summation over minor arcs.

Keywords: Short double exponential sums, Nontrivial estimate, Estimation Method for short exponential sums over primes

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

И. М. Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau.$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon},$$

основу которой наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \leqslant U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа.

Затем Хейзелгроув [2], В. Статулявычус [3], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4], Zhan Tao [5] получили нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^{\theta}$, q — произвольное, и доказали асимптотическую формулу в тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^{\theta}$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ изучили Jianya Liu и Zhan Tao [6] и получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Работа посвящена выводу нетривиальных оценок сумм $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, в которых имеется «длинная» сплошная сумма на малых дугах и её доказательство проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [7, 8, 9].

Теорема. *Пусть* $|a(m)| \leqslant \tau(m)$, $\mathscr{L} = \ln xq$, $\sqrt{x} < y < x\mathscr{L}^{-1}$, *тогда при выполнении условий*

$$\mathscr{L}^{2^{14}+8A+8} < q < y^3\mathscr{L}^{-2^{14}-8A-8}, \qquad \mathscr{L}^{2A+12,5} < M \leqslant y^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{-2^{12}-2A-2},$$

где A *— абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

2. Известные леммы

Лемма 1. [10] *Пусть* H *и* y *произвольные целые числа,* $H \geqslant 1$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}).$$

Лемма 2. [11] *При вещественном* α, *подчинённом условиям*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

а) для суммы

$$V_g = \sum_{z=g}^{g+q'} \min\left(U, \frac{1}{\|\alpha z\|}\right), \qquad q' < q, \qquad U > 0$$

имеем неравенство

$$V_g \ll U + q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V = \sum_{0<z\leqslant 0,5q} \frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V \ll q\ln q.$$

Лемма 3. [12]. *При* $x \geqslant 2$ *имеем*

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_r^k(n) \ll x\,(\ln x)^{r^k-1}, \qquad k = 1, 2.$$

3. Доказательство теоремы

Для краткости сумму $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ обозначим через W и возводя её в квадрат, найдем

$$|W|^2=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\le 2N\\ x-y<\mu u_1\leqslant x}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)).$$

Разбивая сумму на три части, для которых соответственно выполняются условия $mu<\mu u_1$, $mu=\mu u_1$ и $mu>\mu u_1$ и имея в виду, что

$$\sum_{M<m,\mu\leqslant 2M}a_ma_\mu\sum_{\substack{U<u,u_1\leqslant 2N\\ x-y<mu=\mu u_1\leqslant x}}1=\sum_{x-y<r\leqslant x}\left(\sum_{\substack{m\backslash r, M<m\leqslant 2M,\\ U<r/m\leqslant 2N}}a_m\right)^2\leqslant\sum_{x-y<r\leqslant x}\tau^2(r)\ll y\mathscr{L}^3,$$

получим

$$\begin{aligned}
&W^2=W_1+W_2+O\left(y\mathscr{L}^3\right),\\
&W_1=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\le 2N\\ mn<\mu u_1\leqslant x}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)),\\
&W_2=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U<u_1\le 2N\\ x-y<\mu u_1<mu}}e(\alpha((\mu u_1)^3-(mu)^3)).
\end{aligned}$$

Имея в виду, что $|W_1|=|W_2|$, оценим только W_1. В сумме по u_1, делая замену переменного, вместо u_1 вводим переменную $r=\mu u_1-mu$, для которой выполняются условия

$$mu+r\equiv 0(mod\mu),\quad U\mu<mu+r\leqslant 2N\mu,\quad 0<r\leqslant x-mu.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\mu u_1)^3-(mu)^3=(\mu u_1-mu)((mu)^2+mu\mu u_1+(\mu u_1)^2)=\\
&=r\left((mu)^2+mu\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu}+\left(\mu\cdot\frac{mu+r}{\mu}\right)^2\right)=r(3(mu)^2+3mur+r^2),
\end{aligned}$$

и сумма W_1 принимает вид

$$\begin{aligned}
W_1&=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{\substack{U<u\le 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}\sum_{\substack{U\mu<mu+r\leqslant 2N\mu\\ 0<r\leqslant x-mu\\ mu+r\equiv 0(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2))=\\
&=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{M<\mu\le 2M}a_\mu\sum_{0<r<y}\sum_{\substack{F<u\le G\\ mu\equiv -r(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)),
\end{aligned}$$

где

$$F=\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{m}\right),\qquad G=\min\left(2N,\frac{2N\mu-r}{m},\frac{x}{m}\right).$$

Разбивая сумму W_1 на слагаемые с условием $(m,\mu)=d$, $d\leqslant 2M$, имеем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{M<\mu\le 2M\\ (m,\mu)=d}}a_\mu\sum_{0<r<y}\sum_{\substack{F<u\le G\\ mu\equiv -r(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)).$$

Условия $(m,\mu)=d$ в сумме W равносильно условиям

$$m=\hat{m}d,\qquad \mu=\hat{\mu}d,\qquad (\hat{m},\hat{\mu})=1.$$

Следовательно, сравнение $mu\equiv -r(mod\,\mu)$ разрешимо только в случае, если r имеет вид $r=\hat{r}d$. Поэтому, заменив его на сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$, а переменные суммирования m, μ, r соответственно на $\hat{m}d$, $\hat{\mu}d$, $r=\hat{r}d$, найдем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat{m}d\leq 2M}a_{\hat{m}d}\sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\leq 2M\\(\hat{m},\hat{\mu})=1}}a_{\hat{\mu}d}\sum_{0<\hat{r}d<y}\sum_{\substack{F_{\hat{m}\hat{\mu}}<u\leq G_{\hat{m}\hat{\mu}}\\ \hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\hat{\mu})}}e(\alpha\hat{r}d^3(3(\hat{m}u)^2+3\hat{m}u\hat{r}+\hat{r}^2)),$$

$$F_{\hat{m}\hat{\mu}}=\max\left(U,\frac{U\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}},\frac{x-y}{\hat{m}d}\right),\qquad G_{\hat{m}\hat{\mu}}=\min\left(2N,\frac{2N\hat{\mu}-\hat{r}}{\hat{m}},\frac{x}{\hat{m}d}\right).$$

Сравнение $\hat{m}u\equiv -\hat{r}(mod\,\hat{\mu})$ равносильно сравнению $u\equiv -\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}(mod\,\hat{\mu})$, где $\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}$ определяется из сравнения $\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}\equiv 1(mod\,\hat{\mu})$. Поэтому, представляя u в виде $u=-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}+\hat{\mu}\hat{u}$, получим

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat{m}d\leq 2M}a_{\hat{m}d}\sum_{\substack{M<\hat{\mu}d\leq 2M\\(\hat{m},\hat{\mu})=1}}a_{\hat{\mu}d}\sum_{0<\hat{r}d<y}\sum_{\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}}<\hat{u}\leq\mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}}e(\alpha\hat{r}d^3(\hat{r}^2+g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu}))),$$

$$\mathcal{F}_{\hat{m}\hat{\mu}}=\frac{F_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}}+\frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},\qquad \mathcal{G}_{\hat{m}\hat{\mu}}=\frac{G_{\hat{m}\hat{\mu}}}{\hat{\mu}}+\frac{\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}}{\hat{\mu}},$$
$$3(\hat{m}u)^2+3\hat{m}u\hat{r}+\hat{r}^2=3(\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1}))^2+3\hat{m}(\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r}+\hat{r}^2=$$
$$=3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})^2+3(\hat{m}\hat{\mu}\hat{u}-\hat{r}\hat{m}\hat{m}_{\hat{\mu}}^{-1})\hat{r}+\hat{r}^2=g(\hat{u},\hat{m},\hat{\mu})+\hat{r}^2.$$

В сумме W_1, ради удобства, обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{\mu}$, $\hat{r}$ и $\hat{u}$ через m, μ, r и u, получим

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{0<rd<y}e(\alpha d^3r^3)W(r,d),$$
$$W(r,d)=\sum_{M<md\leq 2M}a_{md}\sum_{\substack{M<\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{\mu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq\mathcal{G}_{m\mu}}e(3\alpha rd^3g(u,m,\mu)),$$
$$\mathcal{F}_{m\mu}=\frac{F_{m\mu}+rm_{\mu}^{-1}}{\mu},\qquad F_{m\mu}=\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{md}\right),\tag{1}$$
$$\mathcal{G}_{m\mu}=\frac{G_{m\mu}+rm_{\mu}^{-1}}{\mu},\qquad G_{m\mu}=\min\left(2N,\frac{2N\mu-r}{m},\frac{x}{md}\right),$$
$$g(u,m,\mu)=(m\mu u-rmm_{\mu}^{-1})^2+(m\mu u-rmm_{\mu}^{-1})r.$$

Разобьем в W_1 отрезок суммирования по d на не более чем $\mathscr{L}$ интервалов вида $D<d\leqslant 2D$, $D\leqslant M$. Получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W(D)$ вида

$$W(D)\leqslant\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}|W(r,d)|.\tag{2}$$

2. *Оценка* $W(D)$*,* $D>\mathscr{L}^{2A+6}$. Оценим сверху длину интервала суммирования по u воспользовавшись условием $M\leqslant y^{\frac14}\mathscr{L}^{-2^{12}-2A-2}$. Имеем

$$\mathcal{G}_{m\mu}-\mathcal{F}_{m\mu}+1=\frac{G_{m\mu}-F_{m\mu}}{\mu}+1\leqslant\frac{y}{m\mu d}+1<\frac{yd}{M^2}+1=$$
$$=\frac{yd+M^2}{M^2}\leqslant\frac{yd+y^{\frac12}}{M^2}=\frac{yd}{M^2}\left(1+\frac{1}{dy^{\frac12}}\right)\leqslant\frac{2yd}{M^2}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (2), воспользовавшись соотношением $|a_m| \leqslant \tau(m)$ и леммой 3, найдем

$$\begin{aligned}
W(D) &\ll \sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y}\ \sum_{M<md\leq 2M}|a_{md}|\sum_{\substack{M<\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}|a_{\mu d}|(\mathcal{G}_{m\mu}-\mathcal{F}_{m\mu}+1)\ll\\
&\ll \sum_{D<d\leqslant 2D}\frac{y}{d}\sum_{M<md\leq 2M}\tau(md)\sum_{\substack{M<\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}\tau(\mu d)\frac{yd}{M^2}\ll\\
&\ll \frac{y^2}{M^2}\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau^2(d)\sum_{M<md\leq 2M}\tau(m)\sum_{M<\mu d\leq 2M}\tau(\mu)\ll\\
&\ll \frac{y^2}{M^2}\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau^2(d)\frac{M^2\mathscr{L}^2}{d^2}\ll\frac{y^2\mathscr{L}^2}{D^2}\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau^2(d)\ll\frac{y^2\mathscr{L}^5}{D}\ll\frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A+1}}.
\end{aligned}$$

3. Далее всюду будем считать, что $D < d \leqslant 2D$ и $D \leqslant \mathscr{L}^{2A+6}$. Возводя неравенство (2) в квадрат и применяя неравенство Коши, получим

$$W^2(D)\leqslant y\sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y}|W(r,d)|^2, \tag{3}$$

$$|W(r,d)|^2=\sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq\mathcal{G}_{m\mu}}\ \sum_{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\leq\mathcal{G}_{n\nu}}e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu))),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n\nu}&=\frac{F_{n\nu}}{\nu}+\frac{rn_\nu^{-1}}{\nu}, &\quad F_{n\nu}&=\max\left(U,\frac{U\nu-r}{n},\frac{x-y}{nd}\right),\\
\mathcal{G}_{n\nu}&=\frac{G_{n\nu}+rn_\nu^{-1}}{\nu}, &\quad G_{n\nu}&=\min\left(2N,\frac{2N\nu-r}{n},\frac{x}{nd}\right).
\end{aligned}\tag{4}$$

Воспользовавшись явным видом $g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)$ в $|W(r,d)|^2$, то есть соотношением

$$\begin{aligned}
&g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)=\\
&=(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1})^2+(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1})r-(m\mu u-rmm_\mu^{-1})^2-(m\mu u-rmm_\mu^{-1})r=\\
&=(n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}-m\mu u+rmm_\mu^{-1})(n\nu u_1+m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r),
\end{aligned}\tag{5}$$

разбивая сумму $|W(r,d)|^2$ на три суммы W'_{rd}, W'_{rd} и W''_{rd}, для которых соответственно выполняются условия $g(u_1,n,\nu) > g(u,m,\mu)$, $g(u_1,n,\nu) < g(u,m,\mu)$ и $g(u_1,n,\nu) = g(u,m,\mu)$, найдем

$$\begin{aligned}
|W(r,d)|^2&=W_{rd}+W'_{rd}+W''_{rd}, \qquad\qquad (6)\\
W_{rd}&=\sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq\mathcal{G}_{m\mu}}\ \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\leq\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}>m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu))),\\
W'_{rd}&=\sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq\mathcal{G}_{m\mu}}\ \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\leq\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}<m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu))),\\
W''_{rd}&=\sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq\mathcal{G}_{m\mu}}\ \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\leq\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1-rnn_\nu^{-1}=m\mu u-rmm_\mu^{-1}}}1.
\end{aligned}$$

4. Оценка W''_{rd}. Пользуясь определениями параметров $F_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $F_{n\nu}$ и $G_{n\nu}$, то есть соотношениями (1) и (4), легко показать, что условия $\mathcal{F}_{m\mu} < u \le \mathcal{G}_{m\mu}$ и $\mathcal{F}_{n\nu} < u_1 \le \mathcal{G}_{n\nu}$ соответственно равносильны условиям

$$\max\left(Um, U\mu - r, \frac{x-y}{d}\right) < m\mu u - rmm_\mu^{-1} \leqslant \min\left(2Nm, 2N\mu - r, \frac{x}{d}\right),$$
$$\max\left(Un, U\nu - r, \frac{x-y}{d}\right) < n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} \leqslant \min\left(2Nn, 2N\nu - r, \frac{x}{d}\right).$$

Поэтому, вводя обозначение $d = m\mu u - rmm_\mu^{-1} = n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1}$, найдем

$$W''_{rd} = \sum_{x-y<hd\leqslant x} \omega^2(h), \qquad \omega(h) = \sum_{\substack{h=m\mu u - rmm_\mu^{-1} \\ M<md,\mu d\le 2M,\, (m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} a_{md}a_{\mu d}.$$

Из условий $h = m\mu u - rmm_\mu^{-1}$ и $mm_\mu^{-1} = 1 + \mu t$, t — целое следует, что

$$h + r = m\mu u - r(mm_\mu^{-1} - 1) = \mu(mu - rt),$$

то есть μ является делителем числа $h + r$, следовательно

$$\omega(h) \leqslant \sum_{\substack{m\backslash h \\ M<md\le 2M}} |a_{md}| \sum_{\substack{\mu\backslash h+r \\ M<\mu d\le 2M \;\; (m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<\frac{h}{m\mu}+\frac{rm_\mu^{-1}}{\mu}\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} |a_{\mu d}| \leqslant \sum_{m\backslash h} |a_{md}| \sum_{\mu\backslash h+r} |a_{\mu d}| =$$
$$= \sum_{m\backslash h} \tau(md) \sum_{\mu\backslash h+r} \tau(\mu d) \leqslant \tau^2(d) \sum_{m\backslash h} \tau(m) \sum_{\mu\backslash h+r} \tau(\mu) = \tau^2(d)\tau_3(h)\tau_3(h+r).$$

Поэтому

$$|W''_{rd}| \ll \tau^2(d) \sum_{x-y<hd\leqslant x} \tau_3(h)\tau_3(h+r) \ll$$
$$\ll \tau^2(d) \left(\sum_{x-y<hd\leqslant x} \tau_3^2(h) \sum_{x-y<hd\leqslant x} \tau_3^2(h+r) \right)^{\frac12} \ll$$
$$\ll \tau^2(d) \left(\frac{y^2}{d^2} \mathscr{L}^{16} \right)^{\frac12} = y\mathscr{L}^8 \cdot \frac{\tau^2(d)}{d}.$$

Отсюда с учетом (6) и (3), имея в виду, что $|W_{rd}| = |W'_{rd}|$, получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} \left(|W_{rd}| + y\mathscr{L}^8 \cdot \frac{\tau^2(d)}{d} \right) \ll$$
$$\ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} |W_{rd}| + y^3\mathscr{L}^8. \tag{7}$$

5. *Преобразуем W_{rd} так, чтобы сумма по u стала линейной.* Для этого, делая замену переменного, вместо u_1 вводим переменную $\sigma = n\nu u_1 - m\mu u$, область изменения которой имеет вид

$$\Omega = \left\{ \sigma :\; m\mu u + \sigma \equiv 0 (mod\, n\nu),\; \mathcal{F}_{n\nu} < \frac{m\mu u + \sigma}{n\nu} \leqslant \mathcal{G}_{n\nu},\; \sigma > rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} \right\}.$$

При этом воспользовавшись соотношением (5), представим разность $g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)$ как функцию σ, то есть

$$\begin{aligned}&g(u_1,n,\nu)-g(u,m,\mu)=\\&=(n\nu u_1-m\mu u+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1})(n\nu u_1+m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r)=\\&=(\sigma+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1})(\sigma+2m\mu u-rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}+r)=g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu),\end{aligned}$$

и сумма W_{rd} принимает вид

$$W_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}}\sum_{\sigma\in\Omega}e\left(3\alpha rd^3g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Воспользовавшись определениями областью Ω и параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, найдём возможно допустимую верхнюю границу изменения переменной суммирования σ. Имеем

$$\begin{aligned}&\sigma\leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu}-m\mu u\leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu}-m\mu\mathcal{F}_{m\mu}=n\nu\frac{G_{n\nu}+rn_\nu^{-1}}{\nu}-m\mu\frac{F_{m\mu}+rm_\mu^{-1}}{\mu}=\\&=nG_{n\nu}-mF_{m\mu}+rnn_\nu^{-1}-rmm_\mu^{-1}=n\min\left(2N,\frac{2N\nu-r}{n},\frac{x}{nd}\right)-\\&-m\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{md}\right)+rnn_\nu^{-1}-rmm_\mu^{-1}\leqslant\frac{y}{d}-rmm_\mu^{-1}+rnn_\nu^{-1}.\end{aligned}$$

С учётом найденной границы в W_{rd}, сделав сумму по u внутренней, найдём

$$\begin{aligned}&W_{rd}=\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}}e\left(3\alpha rd^3g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right),\\&\Omega_1=\left\{\sigma:\ 0<\sigma+rmm_\mu^{-1}-rnn_\nu^{-1}\leqslant\frac{y}{d}\right\},\\&\mathcal{U}=\left\{u:\ m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\,n\nu),\ \frac{\mathcal{F}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu}<u\leqslant\frac{\mathcal{G}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}\right\},\end{aligned}$$

то есть в W_{rd} внутренняя сумма стала линейной и переменная суммирования и пробегает те значения из своего сплошного интервала изменения, которые являются решением линейного сравнения.

6. Разбивая сумму W_{rd} на слагаемые с условием $(m\mu,n\nu)=\delta$, $\delta\leqslant 4M^2d^{-2}$, имеем

$$W_{rd}=\sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}}\sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}}a_{md}a_{\mu d}\sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=\delta}}a_{nd}a_{\nu d}\sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}}e\left(3\alpha rd^3g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Условия $(m\mu,n\nu)=\delta$ с учётом условий $(m,\mu)=1$ и $(n,\nu)=1$ в сумме W_{rd} равносильны условиям

$$\begin{aligned}&m\mu=\hat m\hat\mu\delta,\quad(\hat m,\hat\mu)=1,\quad n\nu=\hat n\hat\nu\delta,\quad(\hat n,\hat\nu)=1,\quad(\hat m\hat\mu,\hat n\hat\mu)=1,\\&m=\hat m\eta,\ \ \eta\backslash\delta,\ \ \mu=\hat\mu\delta/\eta,\ \ (\eta,\delta/\eta)=1,\ \ n=\hat n\lambda,\ \ \lambda\backslash\delta,\ \ \nu=\hat\nu\delta/\lambda,\ \ (\lambda,\delta/\lambda)=1.\end{aligned}$$

Следовательно, в области $\mathcal{U}$ сравнение

$$m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\,n\nu)$$

разрешимо только в случае, если σ имеет вид $\sigma=\hat\sigma\delta$. Поэтому заменим её на сравнение

$$\hat m\hat\mu u\equiv-\hat\sigma(mod\,\hat n\hat\nu),$$

а переменные суммирования m, μ, n, ν, σ соответственно на $\hat{m}\eta$, $\hat{\mu}\delta/\eta$, $\hat{n}\lambda$, $\hat{\nu}\delta/\lambda$, $\hat{\sigma}\delta$, в результате чего параметры $\mathcal{F}_{m\mu}$, $F_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$, $F_{n\nu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, $G_{n\nu}$ и функция $g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)$ соответственно превращаются в $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$, $\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, $G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}$, и в функцию $g_1(u)=g_1(u,\hat{\sigma}\delta,\hat{m}\eta,\hat{\mu}\delta/\eta,\hat{n}\lambda,\hat{\nu}\delta/\lambda)$, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}=\frac{F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta}+\frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta}, \qquad F_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}=\max\left(U,\frac{U\hat{\mu}\delta/\eta-r}{\hat{m}\eta},\frac{x-y}{\hat{m}\eta d}\right),\\
&\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}=\frac{G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta}+\frac{r(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}}{\hat{\mu}\delta/\eta}, \qquad G_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}=\min\left(2N,\frac{2N\hat{\mu}\delta/\eta-r}{\hat{m}\eta},\frac{x}{\hat{m}\eta d}\right),\\
&\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}=\frac{F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}+\frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}, \qquad F_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}=\max\left(U,\frac{U\hat{\nu}\delta/\lambda-r}{\hat{n}\lambda},\frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right),\\
&\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}=\frac{G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}+\frac{r(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}}{\hat{\nu}\delta/\lambda}, \qquad G_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}=\min\left(2N,\frac{2N\hat{\nu}\delta/\lambda-r}{\hat{n}\lambda},\frac{x-y}{\hat{n}\lambda d}\right),\\
&g_1(u,\hat{\sigma}\delta,\hat{m}\eta,\hat{\mu}\delta/\eta,\hat{n}\lambda,\hat{\nu}\delta/\lambda)=\left(\hat{\sigma}\delta+r\hat{m}\eta\,(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}-r\hat{n}\lambda\,(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}\right)(\hat{\sigma}\delta+\\
&\qquad\qquad +2\hat{m}\hat{\mu}\delta u-r\hat{m}\eta\,(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}-r\hat{n}\lambda\,(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}+r\Big),
\end{aligned}$$

и сумма W_{rd} представится в виде

$$W_{rd}=\sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}}\ \sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\ \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}} W_{rd}(\delta,\eta,\lambda), \tag{8}$$

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)=\sum_{\substack{M<d\hat{m}\eta,d\hat{\mu}\delta/\eta\le 2M\\(\hat{m},\hat{\mu})=1}} a_{d\hat{m}\eta}a_{d\hat{\mu}\delta/\eta}\sum_{\substack{M<d\hat{n}\lambda,d\hat{\nu}\delta/\lambda\le 2M\\(\hat{n},\hat{\nu})=1,\,(\hat{m}\hat{\mu},\hat{n}\hat{\mu})=1}} a_{d\hat{n}\lambda}a_{d\hat{\nu}\delta/\lambda}\sum_{\hat{\sigma}}\sum_{u} e\left(3\alpha rd^3g_1(u)\right),$$

где суммирование ведётся по тем $\hat{\sigma}$ и u, для которых соответственно выполняются условия

- $0<\hat{\sigma}\delta+r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta}-r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda}\leqslant\dfrac{y}{d}$;
- $\hat{m}\hat{\mu}u+\hat{\sigma}\equiv 0(mod\,\hat{n}\hat{\nu})$, $\dfrac{\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}}<u+\dfrac{\hat{\sigma}}{\hat{m}\hat{\mu}}\leqslant\dfrac{\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}}$, $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}<u\le\mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$.

Подставляя правую часть (8) в соотношение (7), получим

$$W^2(D)\ll y\sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y}\ \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}}\ \sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\ \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}|W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|+y^3\mathscr{L}^8.$$

Разбивая отрезок суммирования по δ на не более чем $\mathscr{L}$ интервалов вида
$B<\delta\leqslant 2B$, $B\leqslant 2M^2d^{-2}$, получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W_B^2(D)$ вида

$$W_B^2(D)\ll y\sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y}\ \sum_{B<\delta\leqslant 2B}\ \sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\ \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}|W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|+y^3\mathscr{L}^8. \tag{9}$$

В сумме $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$, ради удобства, обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно через m, n, μ, ν и σ, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)=\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}} a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{u} e\left(3\alpha rd^3g_1(u)\right),$$

где $g_1(u) = g_1(u,\sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, \nu\delta/\lambda)$ суммирование ведётся по тем σ и u, для которых соответственно выполняются условия

$$0 < \sigma\delta + rm\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} \leqslant \frac{y}{d}; \tag{10}$$

$$m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu),\ \ \frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} n\nu}{m\mu} < u + \frac{\sigma}{m\mu} \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} n\nu}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} < u \leq \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta},$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \frac{F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x-y}{m\eta d}\right),\\
&\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x}{m\eta d}\right),\\
&\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right),\\
&\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right),\\
&g_1(u,\sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, \nu\delta/\lambda) = \left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}\right)(\sigma\delta +\\
&\qquad\qquad + 2m\mu\delta u - rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\Big).
\end{aligned} \tag{11}$$

Сравнение $m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu)$ равносильно сравнению

$$u \equiv -\sigma m^{-1}_{n\nu}\,\mu^{-1}_{n\nu}(mod\, n\nu),$$

где числа $m^{-1}_{n\nu}$ и $\mu^{-1}_{n\nu}$ соответственно определяются из сравнений

$$mm^{-1}_{n\nu} \equiv 1(mod\, n\nu), \qquad \mu\mu^{-1}_{n\nu} \equiv 1(mod\, n\nu).$$

Поэтому, представляя u в виде $u = n\nu\hat{u} - \sigma m^{-1}_{n\nu}\,\mu^{-1}_{n\nu}$, получим

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<dm\eta, d\mu\delta/\eta\le 2M\\ (m,\mu)=1}} a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<dn\lambda, d\nu\delta/\lambda\le 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}} a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{\hat{u}} e\left(3\alpha r d^3 g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)\right),$$

где

$$\begin{aligned}
&g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda) = g_1(n\nu\hat{u} - \sigma m^{-1}_{n\nu}\,\mu^{-1}_{n\nu}, \sigma\delta, m\eta, \mu\delta/\eta, n\lambda, \nu\delta/\lambda) =\\
&\quad = \left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}\right)\cdot\\
&\quad\quad \cdot\left(\sigma\delta + 2m\mu\delta\left(n\nu\hat{u} - \sigma m^{-1}_{n\nu}\,\mu^{-1}_{n\nu}\right) - rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - -rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\right) =\\
&\quad = 2m\mu n\nu\delta\hat{u}\left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}\right) + g_3,
\end{aligned}$$

g_3 часть $g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)$, независящая от $\hat{u}$ и имеющая вид

$$\begin{aligned}
g_3 = &\left(\sigma\delta + rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}\right)\cdot\\
&\cdot\left(\sigma\delta - 2\sigma\delta mm^{-1}_{n\nu}\,\mu\mu^{-1}_{n\nu} - rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\right),
\end{aligned}$$

область суммирования по $\hat{u}$ определяется неравенствами, которые получаются из (10) и имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu},\\ \frac{\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}.\end{gathered}\tag{12}$$

Переходя к оценкам, получим

$$\begin{gathered}W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)\leqslant\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M\\(m,\mu)=1}}|a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}|\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}|a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}|\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\hat{u}\right)\right|,\\ \kappa=rm\eta\,(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}-rn\lambda\,(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}.\end{gathered}$$

Оценим сверху величину $\mathscr{U}$ – длину интервала суммирования по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$. Воспользовавшись отдельно каждыми неравенствами (12) и определениями параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$ и $\mathcal{G}_{n\nu}$ из (11), имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{U}&\leqslant\frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}=\frac{1}{m\mu}\left(\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}+\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}-\frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}\right)=\\ &=\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}-F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu\cdot\nu\delta/\lambda}=\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\left(\min\left(2N,\frac{2N\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x}{n\lambda d}\right)-\right.\\ &\quad\left.-\max\left(U,\frac{U\nu\delta/\lambda-r}{n\lambda},\frac{x-y}{n\lambda d}\right)\right)\leqslant\frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\cdot\frac{y}{n\lambda d}\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4},\\ \mathscr{U}&\leqslant\frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu}=\frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}-F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu\cdot\mu\,\delta/\eta}\leqslant\frac{1}{\mu n\nu\,\delta/\eta}\cdot\frac{y}{m\eta d}\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4}.\end{aligned}$$

Отсюда и из условия $M\leqslant y^{\frac14}\mathscr{L}^{-\frac{c}{4}}$ следует, что количество слагаемых в сумме по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$ не превосходит величину

$$\mathscr{U}+1\leqslant\frac{y\delta d^3}{M^4}+1\ll\frac{y\delta d^3}{M^4}.$$

С учётом последнего неравенства, применяя к сумме по $\hat{u}$ лемму 1, затем воспользовавшись условием $a_m\ll\tau(m)$ и известным неравенством $\tau(kl)\leqslant\tau(k)\tau(l)$, найдем

$$\begin{aligned}W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)&\leqslant\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M\\(m,\mu)=1}}|a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}|\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}|a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}|\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\|}\right)\ll\\ &\ll\tau^2(\delta)\tau^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\leq 2M\\(m,\mu)=1}}\tau(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leq 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}\tau(n\nu)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{y\delta d^3}{M^4},\frac{1}{\|6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\|}\right).\end{aligned}\tag{13}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $B>\mathscr{L}^{4A+10}$ и $B\leqslant\mathscr{L}^{4A+10}$.

7. *Оценка* $W_B(D)$ при $B>\mathscr{L}^{4A+10}$. Оценивая в (13) сумму по σ тривиально числом слагаемых, найдем

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)\ll\tau^2(\delta)\tau^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta, d\mu\delta/\eta\le 2M\\ (m,\mu)=1}}\tau(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda, d\nu\delta/\lambda\le 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\mu)=1}}\tau(n\nu)\left(\frac{y}{\delta d}+1\right)\frac{y\delta d^3}{M^4}\ll$$

$$\ll y^2\left(\frac{d^2}{M^4}+\frac{\delta d^3}{yM^4}\right)\tau^4(d)\,\tau^2(\delta)\left(\sum_{M^2<\delta d^2m\le 4M^2}\tau^2(m)\right)^2\ll$$

$$\ll y^2\mathscr{L}^6\left(\frac{d^2}{M^4}+\frac{\delta d^3}{yM^4}\right)\left(\frac{M^4}{\delta^2d^4}+1\right)\tau^4(d)\,\tau^2(\delta).$$

Подставляя найденную оценку в (9), затем пользуясь неравенством $BD^2\leqslant M^2$, получим

$$W_B^2(D)\ll y\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\ (\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}}|W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^3\mathscr{L}^6\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau^4(d)\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau^2(\delta)\sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\ (\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}}\left(\frac{d^2}{M^4}+\frac{\delta d^3}{yM^4}\right)\left(\frac{M^4}{\delta^2d^4}+1\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau^4(\delta)\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau^4(d)\left(\frac{1}{\delta^2d^3}+\frac{d}{M^4}+\frac{1}{y\delta d^2}+\frac{\delta d^2}{yM^4}\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6(\ln D)^{15}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau^4(\delta)\left(\frac{1}{\delta^2D^2}+\frac{D^2}{M^4}+\frac{1}{y\delta D}+\frac{\delta D^3}{yM^4}\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6(\ln D)^{15}(\ln B)^{15}\left(\frac{1}{BD^2}+\frac{BD^2}{M^4}+\frac{1}{yD}+\frac{B^2D^3}{yM^4}\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6(\ln D)^{15}(\ln B)^{15}\left(\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{M^2}+\frac{1}{yD}\right)+y^3\mathscr{L}^8.$$

Далее, пользуясь последовательно условиями $D<\mathscr{L}^{2A+6}$, $B\leqslant M^2D^{-2}\leqslant M^2\leqslant\sqrt{y}$, имеем

$$W_B^2(D)\ll y^4\mathscr{L}^6\left(\frac{(\ln B)^{15}}{BD^2(\ln D)^{-15}}+\frac{(\ln B)^{15}(\ln D)^{15}}{M^2}+\frac{(\ln B)^{15}}{yD(\ln D)^{-15}}\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6\left(\frac{1}{B(\ln B)^{-15}}+\frac{(\ln B)^{15}\mathscr{L}}{M^2}+\frac{(\ln B)^{15}}{y}\right)+y^3\mathscr{L}^8\ll$$

$$\ll y^4\mathscr{L}^6\left(\frac{1}{B(\ln B)^{-15}}+\frac{\mathscr{L}^{16}}{M^2}+\frac{\mathscr{L}^{15}}{y}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись условиями $B\geqslant\mathscr{L}^{4A+10}$, $M\geqslant\mathscr{L}^{2A+12{,}5}$ и $y\geqslant\mathscr{L}^{4A+24}$, находим

$$W_B^2(D)\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\left(\frac{\mathscr{L}^{4A+9}}{B(\ln B)^{-15}}+\frac{\mathscr{L}^{4A+25}}{M^2}+\frac{\mathscr{L}^{4A+24}}{y}\right)\ll$$

$$\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\left(\frac{\mathscr{L}^{4A+9}}{\mathscr{L}^{4A+10}(\ln\mathscr{L}^{4A+10})^{-15}}+1\right)\ll$$

$$\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\left(\frac{\mathscr{L}^{4A+9}(\ln\mathscr{L})^{15}}{\mathscr{L}^{4A+10}}+1\right)\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}.$$

8. *Оценка* $W_B(D)$ при $B \leqslant \mathscr{L}^{4A+10}$. Представляя оценку (13) в виде

$$\begin{aligned}
&W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) \leqslant \\
&\leqslant \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{\substack{M^2<m\mu d^2\delta,\, n\nu d^2\delta\le 4M^2\\ (m\mu,n\mu)=1}} \tau(m\mu n\nu) \sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa (mod\,\delta)}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha r d^3 m\mu n\nu\delta\sigma\|}\right) \leqslant \\
&\leqslant \tau^2(\delta)\tau^4(d) \sum_{M^4<td^4\delta^2\le 16M^4} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\sigma\leqslant y/d} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha d^3\delta r t\sigma\|}\right),
\end{aligned}$$

затем подставляя её в (9), получим

$$\begin{aligned}
&W_B^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y}\ \sum_{B<\delta\leqslant 2B}\ \sum_{\substack{\eta\backslash\delta\\ (\eta,\delta/\eta)=1}}\ \sum_{\substack{\lambda\backslash\delta\\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)| \ll \\
&\ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau^4(d) \sum_{0<rd<y}\ \sum_{B<\delta\leqslant 2B} \tau^4(\delta) \sum_{M^4<td^4\delta^2\le 16M^4} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\sigma\leqslant y/d} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha d^3\delta r t\sigma\|}\right) = \\
&= y \sum_{\frac{M^4}{64BD}\leqslant h\leqslant \frac{96y^2M^4}{BD^3}} \text{æ}(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right), \quad \text{æ}(h) = \sum_{h=6d^3\delta r t\sigma}'' \tau^4(d)\tau^4(\delta)\tau(t)\tau_4(t),
\end{aligned}$$

где $''$ — означает, что $D < d \leqslant 2D$, $B < \delta \leqslant 2B$, $r \leqslant yD^{-1}$, $2^{-6}M^4D^4B^2 < t \leqslant 2^4M^4D^4B^2$ и $\sigma \leqslant yD^{-1}$. Далее, пользуясь условиями $D < \mathscr{L}^{2A+6}$, $B < \mathscr{L}^{4A+10}$, $h/tr\sigma = d^3\delta \asymp D^3B$ и соотношением $\tau(r) \ll r^{\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned}
\text{æ}(h) &= \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\frac{h}{t}=d^3\delta r\sigma} \tau^4(d)\tau^4(\delta) \ll \mathscr{L}^{\frac12} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{\frac{h}{t}=d^3\delta r\sigma} 1 = \\
&= \mathscr{L}^{\frac12} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r\backslash \frac{h}{t}}\ \sum_{\frac{h}{tr}=d^3\delta\sigma} 1 = \mathscr{L}^{\frac12} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r\backslash\frac{h}{t}}\ \sum_{\sigma\backslash\frac{h}{tr}}\ \sum_{\frac{h}{tr\sigma}=d^3\delta} 1 \leqslant \\
&\leqslant \mathscr{L}^{\frac12} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r\backslash\frac{h}{t}}\ \sum_{\sigma\backslash\frac{h}{tr}} \tau\left(\frac{h}{tr\sigma}\right) \ll \mathscr{L} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r\backslash\frac{h}{t}}\ \sum_{\sigma\backslash\frac{h}{tr}} 1 \leqslant \\
&\leqslant \mathscr{L} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \sum_{r\backslash\frac{h}{t}} \tau\left(\frac{h}{tr}\right) \leqslant \mathscr{L} \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t)\tau^2\left(\frac{h}{t}\right) \leqslant \\
&\leqslant \mathscr{L}\tau^2(h) \sum_{t\backslash h} \tau(t)\tau_4(t) \leqslant \mathscr{L}\tau^2(h) \sum_{t\backslash h} \tau^4(t) \leqslant \mathscr{L}\,\tau^7(h).
\end{aligned}$$

$$W_B^2(D) \ll y\mathscr{L} \sum_{\frac{M^4}{64BD}\leqslant h\leqslant \frac{96y^2M^4}{BD^3}} \tau^7(h) \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3, найдём

$$\begin{aligned}
W_B^4(D) &\ll y^2\mathscr{L}^2 \cdot \frac{y^2M^4}{BD^3}\mathscr{L}^{2^{14}-1} \cdot \frac{yBD^3}{M^4} \sum_{\frac{M^4}{64BD}\leqslant h\leqslant \frac{96y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll \\
&\ll y^5\mathscr{L}^{2^{14}+1} \sum_{\frac{M^4}{64BD}\leqslant h\leqslant \frac{96y^2M^4}{BD^3}} \min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$ и $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \leqslant 0.5q$.

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} > 0.5q$, разбивая интервал изменения h на не более $\ll \dfrac{y^2M^4}{qBD^3}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g+q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, найдем

$$W_B^4(D) \ll y^5\mathscr{L}^{2^{14}+1} \cdot \frac{y^2M^4}{qBD^3}\sum_{h=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right) \ll$$
$$\ll \frac{y^7M^4}{qBD^3}\left(\frac{yBD^3}{M^4} + q\ln q\right)\mathscr{L}^{2^{14}+1} \ll \left(\frac{y^8}{q} + \frac{y^7M^4}{BD^3}\right)\mathscr{L}^{2^{14}+2} \ll$$
$$\ll y^8\left(\frac{1}{q} + \frac{M^4}{y}\right)\mathscr{L}^{2^{14}+2} = \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\left(\frac{\mathscr{L}^{2^{14}+8A+8}}{q} + \frac{M^4}{y\mathscr{L}^{-2^{14}-8A-8}}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.$$

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3} \leqslant 0.5q$, воспользовавшись утверждением б) леммы 2, получим

$$W_B^4(D) \ll y^5\mathscr{L}^{2^{14}+1}\sum_{h\leqslant 0.5q}\frac{1}{\|\alpha h\|} \ll y^5q\mathscr{L}^{2^{14}+2} =$$
$$= \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}} \cdot \frac{q}{y^3\mathscr{L}^{-2^{14}-8A-8}} \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.$$

4. Заключение

Работа посвящена выводу нетривиальных оценок коротких кубических двойных сумм вида

$$W = \sum_{M<m\leq 2M} a(m) \sum_{\substack{U<u\leq 2N \\ x-y<mu\leqslant x}} e(\alpha(mu)^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1,$$

в которых имеется «длинная» сплошная сумма в множестве точек второго класса

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР. 1952.
2. Haselgrove C.B. Some theorems in the analytic theory of number // J. London Math.Soc. 26 (1951), pp. 273–277. doi: 10.1112/jlms/s1-26.4.273
3. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5–23.
4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math., 1990, v.2, pp. 138–147.
5. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser., 1991, v. 7, No 3, pp. 135–170. doi: 10.1007/BF02583003
6. Liu J. Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Mh Math, 1999, 127: pp. 27–41. doi: 10.1007/s006050050020
7. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459. № 2. С. 156–157. doi: 10.7868/S0869565214320085

8. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 11. С. 853–860.

9. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. 2011. Серия 1: Математика. Механика. № 3. С. 56–60.

10. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука. 1983. 2-е изд. 240 с.

11. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука. 1976. 122 с.

12. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391–393.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1985, "Selected work", *Berlin–New York: Springer-Verlag*, 401 p.

2. Haselgrove C.B. 1951, "Some theorems in the analitic theory of number", *J. London Math.Soc.*, 26, 273–277. doi: 10.1112/jlms/s1-26.4.273

3. Statulyavichus V. 1955, "On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers", *Vilnius, Uchenie trudi universiteta, Ser. mat. fiz. i khim. nauk*, no 3, pp. 5–23.

4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao, 1990, "On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)", *Chinese Ann. of Math.,* vol.2, pp. 138–147.

5. Zhan T. 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica, new ser.,* vol. 7, No 3, 135–170. doi: 10.1007/BF02583003

6. Liu J. Y., Zhan T. 1999, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals I.", *Mh. Math*, 127: 27–41. doi:10.1007/s006050050020

7. Rakhmonov Z. Kh., Rakhmonov F. Z. 2014, "Sum of Short Exponential Sums over Prime Numbers", Doklady Mathematics, vol. 90, No. 3, pp. 1–2. doi:10.1134/S1064562414070138

8. Rakhmonov F. Z. 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 66, no 3, pp. 129–132. doi: 10.3103/S0027132211030107

9. Rakhmonov Z. Kh., Rakhmonov F. Z. 2013, "The sum of short double trigonometric sums", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no. 11, pp. 853–860.

10. Karatsuba A. A. 1993, "Basic Analytic Number Theory", *Springer-Verlag Berlin Heidlberg*, 223 pp.

11. Vinogradov I. M. 1976, "Special Variants of the Method of Trigonometric Sums", *Moscow: Nauka,* 122 p.

12. Mardjhanashvili K. K. 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391-393.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан.

Получено 09.12.2015 г.
Принято в печать 10.03.2016 г.