

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 519.1

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КВАЗИ-МЕТРИКАМИ

М. М. Деза (Париж, Франция), Е. И. Деза (г. Москва),
М. Дютур Сикирич (Загреб, Хорватия)

Аннотация

В данной работе рассмотрены проблемы, связанные с построением и исследованием конусов и многогранников конечных квази-метрик, которые являются несимметричными аналогами классических метрик.

Во введении рассмотрена история вопроса, приведены примеры использования метрик и квазиметрик в математике и ее приложениях, в том числе задачи, связанные с проблемой максимального разреза.

В первом разделе даны определения конечных метрики и полуметрики, а также их важнейших частных случаев: разреза, мультиразреза и гиперсемиметрики; построены конусы и многогранники указанных объектов; исследованы их свойства. Рассмотрены связи конуса разрезов с метрическими l_1 -пространствами. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов, которые состоят из перестановок и так называемых свичингов; именно преобразование свичинга служит основанием для выбора неравенств, определяющих соответствующий многогранник.

Во втором разделе рассмотрены конечные квази-метрики и квази-полуметрики, которые являются несимметричным аналогом конечных метрик и полуметрик; даны определения ориентированного разреза и ориентированного мультиразреза — важнейших частных случаев квази-полуметрики; введены понятия взвешиваемой квази-метрики и родственной ей частичной метрики; построены конусы и многогранники указанных объектов; исследованы их свойства. Рассмотрены связи ориентированных разрезов с квази-метрическим l_1 -пространством. Особое внимание уделено симметриям построенных конусов, которые состоят из перестановок и ориентированных свичингов; как и в симметричном случае, преобразование ориентированного свичинга служит основанием для выбора неравенств, определяющих соответствующий многогранник. Рассмотрены разные подходы к построению конуса и многогранника несимметричных гиперполуметрик.

В последнем разделе представлены результаты вычислений, посвященных конусам и многогранникам квази-полуметрик, ориентированных разрезов, ориентированных мультиразрезов, взвешиваемых квази-метрик и частичных метрик на 3, 4, 5 и 6 точках. Указаны размерность объекта, число

экстремальных лучей (вершин) и их орбит, число гиперграней и их орбит, диаметры скелетона и реберного графа построенных конусов и многогранников.

Ключевые слова: Полуметрика, разрез, и мультиразрез, гиперполуметрика, конусы и многогранники полуметрик, разрезов и гиперполуметрик, квази-полуметрика, ориентированные разрез и мультиразрез, взвешиваемая метрика, частичная метрика, конусы квази-полуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, взвешиваемых и частичных метрик, многогранники квази-полуметрик, ориентированных разрезов и мультиразрезов, взвешиваемых и частичных метрик.

Библиография: 15 названий.

POLYHEDRAL STRUCTURES ASSOCIATED WITH QUASI-METRICS

M. M. Deza (Paris, France), E. I. Deza (Moscow),
M. Dutour Sikirić (Zagreb, Croatia)

Abstract

In this paper the problems of construction and description of cones and polyhedra of finite quasi-metrics are considered. These objects are asymmetrical analogs of classical finite metrics.

The introduction presents the historical background and examples of applications of metrics and quasi-metrics. In particular, the questions connected with maximum cut problem are represented.

In the first section definitions of finite metrics and semi-metrics are given, and also their major special cases are considered: cuts, multicut and hyper-semimetrics. Cones and polyhedrons of the specified objects are constructed; their properties are investigated. Connections of the cut cone with metric l_1 -spaces are indicated. The special attention is paid to symmetries of the constructed cones which consist of permutations and so-called switchings; transformation of a switching serves the basis for a choice of the inequalities defining the corresponding polyhedron.

In the second section finite quasi-metrics and quasi-semimetrics are considered. They are asymmetrical analogs of the usual finite metrics and semimetrics. Definition of the oriented cuts and oriented multicuts are given: they are the most important special cases of the quasi-semimetrics. Concept of weightable quasi-metrics and related to them partial metrics is introduced. Cones and polyhedrons of these objects are constructed; their properties are investigated. Connections of the oriented cut cone with quasi-metric l_1 -space are considered. The special attention is paid to symmetries of the constructed cones, which consist of permutations and oriented switchings; as well as in symmetric case, transformation of the oriented switching serves the basis for a choice of the inequalities defining the corresponding polyhedron. Different

approaches to creation of a cone and a polyhedron of asymmetrical hypersemimetrics are considered.

In the last section results of the calculations devoted to cones and to polyhedrons of quasi-semimetrics, the oriented cuts, the oriented multicuts, weighed quasimetrics and partial metrics for 3, 4, 5 and 6 points are considered. In fact, the dimension of an object, the number of its extreme rays (vertices) and their orbits, the number of its facets and their orbits, the diameters of the skeleton and the the ridge graph of the constructed cones and polyhedrons are specified.

Keywords: Semi-metrics, cut and multicut, hypersemimetric, cones and polyhedra of semimetrics, cuts and hypersemimetrics, quasi-semimetrics, oriented cut and multicut, weightable metric, partial metric, cones of quasi-semimetrics, of oriented cuts and oriented multicuts, of weightable and partial metrics, polyhedra of quasi-semimetrics, of oriented cuts and multicuts, of weightable and partial metrics.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Метрики и их аналоги играют большую роль как непосредственно в математической науке, так и в ее многочисленных приложениях. В частности, к центральным объектам дискретной математики принадлежат метрический и разрезной конусы. Так, разрезной конус на n точках состоит из всех n -точечных полуметрических подпространств пространства l_1 [8]. Родственная *проблема максимального разреза*, состоящая в нахождении для данного графа разреза максимального веса, является одной из наиболее значимых в комбинаторной оптимизации и имеет множество применений, в том числе в статистической механике.

Представляют значительный интерес и другие полиэдральные конструкции, связанные с конечными метриками, их аналогами и обобщениями: квази-метриками (несимметричный случай), m -метриками (многомерный случай) и т.д. В данной статье мы рассматриваем вопросы, касающиеся конусов и многогранников конечных квази-метрик, ориентированных разрезов и других несимметричных объектов, родственных метрикам, в том числе анализируем результаты машинных вычислений, полученные для таких конусов и многогранников небольших размеров.

2. Метрики и их компаньоны: классический случай

Метрикой на n точках называется функция $d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$; $d_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$; $d_{ij} = d_{ji}$ (симметричность); $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$ (неравенства треугольника).

При построении полиэдральных конструкций понятие метрики слишком ограничивает наши возможности, и значительно удобнее пользоваться его ослабленным аналогом — понятием полуметрики.

Полуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$ и неравенствам треугольника $d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk}$. Коротко говоря, полуметрика — это метрика, позволяющая расстояние "ноль" между несовпадающими точками.

Среди множества различных полуметрик особую роль играют так называемые разрезы и мультиразрезы.

Разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой разрез является полуметрикой (но не метрикой).

Мультиразрезом (точнее, m -мультиразрезом) на n точках для разбиения

$$\bigcup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$$

называется функция $\delta_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a \neq b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что 2-мультиразрезы совпадают с разрезами. Более того, любой мультиразрез можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации разрезов:

$$\delta_{S_1, \dots, S_m} = \sum_{i=1}^m \delta_{S_i, \overline{S_i}}.$$

Число всех мультиразрезов на n точках представляет собой *число Белла* $B(n)$, то есть число всех разбиений n -множества.

Еще одним интересным классом полуметрик являются гиперполуметрики.

Гиперполуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$d : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $d_{ii} = 0$ и *гиперметрическим неравенствам*

$$H(b, d) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{ij} \leq 0 \text{ для всех } b \in \mathbb{Z}^n, \sum_i b_i = 1.$$

Поскольку вектора b вида $(1, 1, -1, 0^{n-3})$ превращают гиперметрические неравенства в неравенства треугольника, то любая гиперполуметрика является специальным случаем полуметрики.

Центральным разделом теории конечных полуметрик являются задачи комбинаторной оптимизации, решаемые полиэдральным методом, ведущим к построению соответствующих конусов и многогранников.

Метрическим конусом на n точках MET_n называется множество всех полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Метрическим многогранником на n точках $METP_n$ называется множество всех полуметрик $d \in MET_n$, удовлетворяющих *неравенствам периметра*

$$d_{ik} + d_{ij} + d_{jk} \leq 2.$$

Разрезным конусом (или *конусом разрезов*) на n точках CUT_n называется коническая оболочка (множество всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами) всех $2^{n-1} - 1$ ненулевых разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Следует заметить, что разрезный конус CUT_n представляет собой множество n -точечных l_1 -полуметрик, то есть полуметрик, изометрически вложимых в пространство $l_1 = (\mathbb{R}^m, \|x - y\|_1)$ с l_1 -нормой

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^m |z_i|.$$

В пространстве меры величине $\|x - y\|_1$ соответствует $\mu(A \Delta B)$, где A, B - множества, представляющие x и y [8].

Разрезным многогранником (многогранником разрезов) на n точках $CUTP_n$ называется выпуклая оболочка всех 2^{n-1} разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Гиперметрическим конусом на n точках HYP_n называется множество всех гиперполуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Гиперметрическим многогранником на n точках HYP_n называется множество гиперполуметрик $d \in HYP_n$ [5], удовлетворяющих *обобщенным гиперметрическим неравенствам*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j d_{i,j} \leq s(s+1), \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 2s+1, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

(Заметим, что обычные гиперметрические неравенства, определяющие HYP_n , являются частным случаем обобщенных гиперметрических неравенств при $s = 0$.)

Поскольку метрический многогранник $METP_n$ получается при использовании наборов b вида $(1, 1, -1, 0^{n-3})$ и $(1, 1, 1, 0^{n-3})$, то имеет место очевидное включение $HYP_n \subseteq METP_n$.

Метрики были введены в начале 20-го века Фреше и Хаусдорфом. Первое исследование конечных метрик принадлежит Блюменталю. Работы, связанные с разрезами, появились в конце 80-х годов 20-го века. Обширная библиография и детальный обзор имеющийся в этой области литературы дан в [8].

Конусы MET_n и CUT_n представляют собой полноразмерные конусы в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поскольку любой разрез является полуметрикой, то выполняется очевидное включение $CUT_n \subseteq MET_n$ с равенством лишь для $n = 3, 4$. Поскольку любой мультиразрез представляет собой неотрицательную линейную комбинацию разрезов, то говорить о

конусе мультиразрезов смысла не имеет: коническая оболочка множества мультиразрезов является частью конуса CUT_n .

Полная группа симметрий конусов CUT_n и MET_n представляет собой группу $Sym(n)$ для $n \neq 4$ и группу $Sym(4) \times Sym(3)$ для $n = 4$. Многогранники $CUTP_n$ и $METP_n$ инвариантны, помимо перестановок, относительно так называемого *свичинга* $U_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, осуществляющегося по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 - d_{ij}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ d_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В целом это дает группу порядка $2^{n-1} \times n!$. Для $n \neq 4$ это полная группа симметрий. Для $n = 4$ полная группа симметрий представляет собой $Aut(K_{4,4})$, то есть имеет порядок $2^3 \times 144$.

Следует заметить, что свичинг неравенства треугольника приводит к неравенству периметра; свичинг гиперметрического неравенства приводит к обобщенному гиперметрическому неравенству. Именно этот факт послужил основанием для выбора неравенств, определяющих метрический и гиперметрический многогранники.

3. Квази-метрики и их компаньоны: несимметричный случай

Одним из возможных обобщений (полу)метрик и (мульти)разрезов являются квази-(полу)метрики и ориентированные (мульти)разрезы, соответственно, представляющие собой аналогичные, но несимметриченные конструкции.

Квази-метрикой на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ii} = 0$; $q_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$; $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$ (*ориентированные неравенства треугольника*). Другими словами, квази-метрика, в отличие от метрики, не всегда удовлетворяет условию симметричности $d_{ij} = d_{ji}$.

Квази-полуметрикой q на n точках называется функция $q : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ii} = 0$ и ориентированным неравенствам треугольника $q_{ik} \leq q_{ij} + q_{jk}$. Таким образом, квази-полуметрика - это "несимметричная полуметрика", или, что то же, "несимметричная метрика, позволяющая значение ноль на несовпадающих точках".

Нас интересует важный специальный случай квази-полуметрик, являющийся несимметричным аналогом разрезов и мультиразрезов.

Ориентированным разрезом на n точках для множества $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ называется функция $\delta'_S : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S, j \notin S, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко проверить, что любой ориентированный разрез является квази-полуметрикой (но не квази-метрикой).

Ориентированным мультиразрезом (точнее, *ориентированным m -мультиразрезом*) для ориентированного разбиения $\cup_{i=1}^m S_i = \{1, \dots, n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ на

m частей $S_1, \dots, S_m$ называется функция $\delta'_{S_1, \dots, S_m} : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по закону

$$\delta'_{S_1, \dots, S_m}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S_a, j \in S_b, \text{ и } a < b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что ориентированные 2-мультиразрезы совпадают с ориентированными разрезами: $\delta'_S = \delta'_{\overline{S}}$. Однако, в отличие от классического симметричного случая, не каждый ориентированный мультиразрез (даже в простейшем случае $n = 3$) можно представить в виде линейной комбинации ориентированных разрезов.

Число всех ориентированных мультиразрезов на n точках представляет собой *число Фубини* (*упорядочное число Белла*) $p'(n)$, то есть число всех упорядоченных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$; оно равно

$$\sum_{\pi \in \text{Sym}(n)} 2^{D(\pi)},$$

где $D(\pi) := |\{i \leq n : a_i > a_{i+1}\}|$ для перестановки $\pi = (a_1, \dots, a_n) \in \text{Sym}(n)$.

Для нашего исследования представляет интерес еще один специальный класс квази-полуметрик — так называемые взвешиваемые квази-полуметрики.

Взвешиваемой квази-полуметрикой на n точках называется квази-полуметрика q на $\{1, \dots, n\}$, для которой существует *весовая функция* $w : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $q_{ij} + w_i = q_{ji} + w_j$.

Легко видеть, что квази-полуметрика q является взвешиваемой если и только если она обладает свойством *3-симметрии*, то есть, для различных $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$q_{ij} + q_{jk} + q_{ki} = q_{ik} + q_{kj} + q_{ji}.$$

В [4] доказано, что свойство 3-симметрии равносильно свойству k -симметрии ($k \geq 3$): сохранению сумм расстояний при изменении направления обхода k -угольника.

В свою очередь, взвешиваемые квази-полуметрики оказываются тесно связаны с еще одним обобщением классического случая — так называемыми *частичными полуметриками*: объектами, сохранившими симметричность, но потерявшими свойство превращаться в ноль на паре (i, i) .

Частичной полуметрикой на n точках называется симметричная функция

$$p : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющая условиям $0 \leq p_{ii} \leq p_{ij}$ и *жестким неравенствам треугольника*

$$p_{ik} \leq p_{ij} + p_{jk} - p_{jj}.$$

Очевидно, что $q = ((q_{ij}))$ является взвешиваемой квази-полуметрикой тогда и только тогда, когда $q + w = ((q_{ij} + w_i))$ есть частичная полуметрика. С другой стороны, $p = ((p_{ij}))$ является частичной полуметрикой тогда и только тогда, когда $((p_{ij} - p_{ii}))$ является взвешиваемой квази-полуметрикой.

Как и в классическом симметричном случае, интерес представляют полиэдральные конструкции, связанные с квази-полуметриками.

Квази-метрическим конусом на n точках $QMET_n$ называется множество всех квази-полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Квази-метрическим многогранником на n точках $QMETP_n$ называется множество квази-полуметрик $q \in QMET_n$, для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ удовлетворяющих неравенствам периметра

$$q_{ki} + q_{ij} + q_{jk} \leq 2.$$

Конусом ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUT_n$ называется коническая оболочка всех $p'(n) - 1$ ненулевых ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$. Пользуясь формулой $\delta_{S_1, \dots, S_m} = \delta'_{S_1, \dots, S_m} + \delta'_{S_m, \dots, S_1}$, мы получаем, что

$$CUT_n = \{q + q^T : q \in OMCUT_n\}.$$

Многогранником ориентированных мультиразрезов на n точках $OMCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех $p'(n)$ ориентированных мультиразрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Конусом ориентированных разрезов на n точках $OCUT_n$ называется коническая оболочка всех $2^n - 2$ ненулевых ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Многогранником ориентированных разрезов на n точках $OCUTP_n$ естественно назвать выпуклую оболочку всех 2^n ориентированных разрезов на $\{1, \dots, n\}$.

Поскольку в несимметричном случае ориентированный мультиразрез может и не быть линейной комбинацией ориентированных разрезов, то конусы $OMCUT_n$ и $OCUT_n$ не совпадают.

Конус $OCUT_n$ представляет собой множество всех n -точечных l_1 -квази-полуметрик, то есть квази-полуметрик, вложимых в квази-метрическое пространство $(\mathbb{R}^m, \|x - y\|_{or,1})$ с ориентированной l_1 -нормой

$$\|z\|_{or,1} = \sum_{i=1}^m \max(z_i, 0).$$

На пространстве меры величине $\|x - y\|_{or,1}$ соответствует $\mu(B \setminus A)$, где множества B, A представляют x, y [6].

Конусом взвешиваемых квази-полуметрик на n точках $WQMET_n$ называется множество всех взвешиваемых квази-полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Многогранником взвешиваемых квази-полуметрик на n точках $WQMETP_n$ называется множество $WQMET_n \cap QMETP_n$.

Конусом частичных полуметрик на n точках $PMET_n$ называется множество всех частичных полуметрик на $\{1, \dots, n\}$.

Выпуклым телом частичных полуметрик $PMETP_n$ называется множество частичных полуметрик $p \in PMET_n$, удовлетворяющих для всех $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ условиям $p_{ij} \leq 1 + p_{ii}$ и неравенствам периметра

$$p_{ij} + p_{jk} + p_{ki} \leq 2 + p_{ii} + p_{jj} + p_{kk}.$$

В $PMETP_n$ элементы p_{ij} ограничены элементами p_{ii} , но величины p_{ii} не ограничены; таким образом, $PMETP_n$ не является многогранником. Однако мы можем получить многогранник, добавляя неравенства $\sum_i p_{ii} \leq 1$; вершины полученного многогранника - это вершины $METP_n$ вместе с экстремальными лучами конуса $PMET_n$.

Квази-полуметрики изучались в [6, 3, 4, 9]. Частичные полуметрики были введены в [13]; они используются для работы с частично определяемыми/вычисляемыми объектами в семантике вычислений: положительность $p(x, x)$ означает, что объект x еще не полностью определен, в то время как числовое значение $p(x, x)$ показывает, как много информации нужно еще вычислить.

Конусы $QMET_n$ и $OMCUT_n$ являются полномерными конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$, конусы $WQMET_n$ и $OCUT_n$ имеют размерность $\binom{n+1}{2} - 1$, а конус $PMET_n$ имеет размерность $\binom{n+1}{2}$.

Кроме очевидных строгих включений

$$WQMET_n \subset QMET_n \text{ и } OCUT_n \subset OMCUT_n,$$

мы имеем, с равенством только для $n = 3$, включения

$$OMCUT_n \subseteq QMET_n \text{ и } OCUT_n \subseteq WQMET_n.$$

В [7] показано, что конусы $WQMET_n$ и $OCUT_n$ (определенные на множестве $\{1, \dots, n\}$) есть проекции конусов MET_{n+1} и CUT_{n+1} (определенных на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$), соответственно, на подпространство, ортогональное к $\delta_{\{0\}}$. Так, $WQMET_n$ состоит из всех $((d_{ij} + d_{i0} - d_{j0}))$, где $d = ((d_{ij}))$ есть полуметрика на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$; при этом соблюдения неравенств $d_{i0} + d_{j0} - d_{ij} \geq 0$ не требуется.

Более того, квази-гиперметрический конус на n точках $WQHYP_n$ может быть определен как такая проекция для HYP_{n+1} ; в этом случае имеет место включение

$$OCUT_n \subseteq WQHYP_n \subseteq WQMET_n$$

с равенством $WQHYP_n \subseteq WQMET_n$ только для $n = 3$ и равенствами $OCUT_n = WQHYP_n$ только для $3 \leq n \leq 5$. (См. данные для $WQHYP_5$ в таблице 1.)

Экстремальные лучи конуса $QMET_n$ исследовались в [6]. Здесь было доказано, что они не являются симметричными и имеют по меньше мере $n - 1$ нулей, то есть не могут быть расстояниями на ориентированном графе. Ориентированные мультиразрезы соответствуют экстремальным лучам конуса $QMET_n$. Кроме того, расщепление экстремального луча вновь дает экстремальный луч.

В [6] была представлена и таблица несмежности гиперграней конуса $QMET_n$; было сделано предположение о том, что во всех остальных случаях гипергранни смежны, откуда следует, что диаметр скелетона дуального конуса $QMET_n^*$ равен 2. Диаметр скелетона $QMET_n$ равен 3 для $n = 4, 5$.

Существует предположение, что диаметры $OCUT_n$ и $OMCUT_n$ равны 1 и 2, соответственно. Более того, если $f \geq 0$ определяет гипергрань $OMCUT_n$, то нулевое расширение f в $OMCUT_{n+1}$ останется гипергранью, как и в классическом случае конуса разрезов CUT_n .

Группа $Sym(n)$ всех перестановок на n точках является группой симметрий конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$. Но существует и другая симметрия, называемая *реверселем*. Для осуществления операции реверселя нужно поставить в соответствие каждому лучу q луч q^T , определенный как $q_{ij}^T = q_{ji}$. (Другими словами, в матричных терминах реверсель соответствует транспонированию матриц.) Из этого факта следует, что группа $Z_2 \times Sym(n)$ также является группой симметрий для конусов $QMET_n$ и $OMCUT_n$.

Мы предполагаем, что это их полная группа симметрий. Для конуса $OCUT_n$ этот факт доказан в [6].

Для многогранника $QMETP_n$ можно определить ориентированный аналог операции свичинга на $METP_n$. Для данной квази-полуметрики $q \in QMETP_n$ и данного множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ назовем *ориентированным свичингом* операцию

$$U_S(q) : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

осуществляемую по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 - q_{ji}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ q_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Она, вместе с перестановками $Sym(n)$ и реверселем, образует группу порядка $2^n n!$. Мы предполагаем, что эта группа является полной группой симметрий для многогранников $QMETP_n$ и $WQMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$).

Таблица 1: Число экстремальных лучей и гиперграней в некоторых квази-метрических конусах для $3 \leq n \leq 6$

Конус	Разм.	Число экст. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$OCUT_3 = WQMET_3$	5	6(2)	9(2)	1; 2
$OCUT_4 = QHYP_4$	9	14(3)	30(3)	1; 2
$OCUT_5$	14	30(4)	130(6)	1; 3
$OCUT_6$	20	62(5)	16,460(61)	1; 3
$QHYP_5$	14	70(6)	90(4)	2; 2
$WQMET_4$	9	20(4)	24(2)	2; 2
$WQMET_5$	14	190(11)	50(2)	2; 2
$WQMET_6$	20	18,502(77)	90(2)	3; 2
$OMCUT_3 = QMET_3$	6	12(2)	12(2)	2; 2
$OMCUT_4$	12	74(5)	72(4)	2; 2
$OMCUT_5$	20	540(9)	35,320(194)	2; 3
$QMET_4$	12	164(10)	36(2)	3; 2
$QMET_5$	20	43,590(229)	80(2)	3; 2

При появлении операции ориентированного свичинга возникает ситуация, требующая несколько изменить определения многогранников ориентированных разрезов и мультиразрезов. Именно, в этих условиях кажется естественным определить многогранник ориентированных разрезов $OCUTP_n$ как выпуклую оболочку всех ориентированных разрезов и их образов относительно ориентированных свичингов. Аналогично, $OMCUTP_n$ можно определить как выпуклую оболочку всех ориентированных мультиразрезов и их образов относительно ориентированных свичингов. Мы предполагаем, что определенный таким образом многогранник $OCUTP_n$ имеет ровно 2^{2n-2} вершин, что значительно больше, чем $2^n - 2$ - число экстремальных лучей в $OCUT_n$. Оба этих многогранника имеют ту же группу симметрий, что и $QMETP_n$.

Группа $Sym(n)$ является группой симметрий для конуса частичных метрик $PMET_n$. Мы предполагаем, что $Sym(n)$ является полной симметрической группой для $PMET_n$ (проверено для $n \leq 9$). Однако $PMETP_n$ имеет и дополнительные симметрии. Для данной частичной метрики $p \in PMET_n$ и данного множества $S \subset \{1, \dots, n\}$ определим p -свичинг $U_S(p) : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ по закону

$$(i, j) \mapsto \begin{cases} 1 + p_{ii} + p_{jj} - p_{ji}, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ p_{ij}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы предполагаем, что, вместе с $Sym(n)$, данная операция определяет полную группу симметрий для $PMETP_n$ (проверено для $n \leq 9$).

4. Численные данные для несимметричного случая

В этом параграфе мы анализируем полученную с помощью вычислительной техники информацию о поведении "ориентированных" конусов и многогранников на n точках при малых значениях n .

Таблица 2: Число вершин и гиперграней в некоторых квази-метрических многогранниках для $3 \leq n \leq 6$

Многогранник	Разм.	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)
$OCUTP_3 = WQMETP_3$	5	16(2)	16(2)
$OCUTP_4 = WQMETP_4$	9	64(3)	40(2)
$OCUTP_5$	14	256(3)	1,056(5)
$OCUTP_6$	20	1,024(4)	1,625,068(97)
$WQMETP_5$	14	2,656(8)	80(2)
$WQMETP_6$	20	1,933,760(120)	140(2)
$OMCUTP_3 = QMETP_3$	6	22(3)	20(2)
$OMCUTP_4$	12	136(5)	1,160(9)
$OMCUTP_5$	20	1,016(7)	?(?)
$QMETP_4$	12	544(8)	56(2)
$QMETP_5$	20	1,155,136(392)	120(2)

В таблицах 1 и 2, представлены результаты вычислений для малых квази-метрических конусов и многогранников, соответственно; орбиты даны относительно $Sym(n)$ для конусов и относительно $Sym(n) \times Z_2$ для многогранников.

В таблицах 3 и 4 рассмотрены имеющиеся данные по конусу и многограннику частичных метрик. Орбиты конуса $PMET_n$ рассмотрены относительно $Sym(n)$, в то время как орбиты тела $PMETP_n$ - относительно группы (порядка $2^{n-1}n!$), порожденной свичингами и перестановками. Однако оба этих объекта имеют 3 орбиты гиперграней и, вероятно, реберный граф диаметра 2.

Таблица 3: Число экстремальных лучей и гиперграней в конусе $PMET_n$ для $3 \leq n \leq 6$

Конус	Разм.	Число экстр. лучей (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$PMET_3$	6	13(5)	12(3)	3; 2
$PMET_4$	10	62(11)	28(3)	3; 2
$PMET_5$	15	1,696(44)	55(3)	3; 2
$PMET_6$	21	337,092(734)	96(3)	3; 2

Таблица 4: Число вершин и гиперграней в теле $PMETP_n$ для $3 \leq n \leq 6$

Тело	Разм.	Число вершин (орбит)	Число гиперграней (орбит)	Диам.
$PMETP_3$	6	17(4)	19(3)	2; 2
$PMETP_4$	12	97(6)	44(3)	2; 2
$PMETP_5$	20	7953(24)	85(3)	3; 2
$PMETP_6$	12	5090337(427)	146(3)	?; 2

5. Заключение

Помимо рассмотренных в статье несимметричных аналогов классического симметричного случая метрик, разрезов, мультиразрезов и других родственных конструкций, интерес представляют многомерные аналоги классического двумерного случая: m -метрики ($m \geq 3$; случай $m = 2$ соответствует обычной метрике), m -суперметрики и др.

Построение и исследование соответствующих конусов и многогранников на малом числе точек можно провести по той же схеме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charikar M., Makarychev K., Makarychev V. Directed metrics and directed graph partitioning problem // Proc. of 11-th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2006. P. 51–60.
2. Deza M. M., Deza E. I. Encyclopedia of Distances / 3-rd edition. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 716 p.
3. Deza M. M., Deza E. I. Cones of partial metrics // Contrib. Discrete Math. 2011. № 6(1). P. 26–47.
4. Deza M. M., Deza E. I., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics // Proceedings of the International Conference on Algebra 2010. NJ: World Sci. Publ., 2012. P. 177–197.

5. Deza M. M., Dutour Sikirić M. The hypermetric cone on 8 vertices and some generalizations // Preprint at *arxiv:arXiv:1503.04554*. 2013. Aviable at: <http://arxiv.org/abs/1503.04554>.
6. Deza M. M., Dutour M., Panteleeva E. I. Small cones of oriented semi-metrics // Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics & Related Areas. 2002. Vol. 22. P. 199–225.
7. Deza M. M., Grishukhin V. P., Deza E. I. Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts // Mathematics of Distances and Applications. Sofia: ITHEA, 2012. P. 31–53.
8. Deza M. M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 517 c.
9. Deza M. M., Panteleeva E. I. Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra // European Journal of Combinatorics. 2000. № 21(6). P. 777–795.
10. Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rend. Circolo mat. Palermo. 1906. Vol. 22. PP. 1–74.
11. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
12. Hitzler P. Generalized Metrics and Topology in Loic Programming Semantics // PhD Thesis. National University of Ireland: Univ. College Cork, 2001.
13. Matthews S. G. Partial metric topology (Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)) // Ann. New York Acad. Sci. 1994. Vol. 728. P. 183–197.
14. Seda A. K. Quasi-metrics and the semantic of logic programs // Fundamenta Informaticae. 1997. Vol. 9. P. 97–117.
15. Wilson W. A. On quasi-metric spaces // American J. of Math. 1931. Vol. 53. P. 575–681.

REFERENCES

1. Charikar, M., Makarychev, K. & Makarychev, V. 2006, "Directed metrics and directed graph partitioning problem", *Proc. of 11-th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 51–60.
2. Deza, M. M. & Deza, E. I. 2014, "Encyclopedia of Distances", 3-rd edition, *Springer-Verlag, Berlin*. 716 p.
3. Deza, M. M. & Deza, E. I. 2011, "Cones of partial metrics", *Contrib. Discrete Math.*, no. 6(1), pp. 26–47.
4. Deza, M. M., Deza, E. I. & Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", *Proceedings of the International Conference on Algebra 2010, World Sci. Publ., NJ*, pp. 177–197.

5. Deza, M. M. & Dutour Sikirić, M. 2013, "The hypermetric cone on 8 vertices and some generalizations", Preprint at *arxiv:arXiv:1503.04554*, Aviable at: <http://arxiv.org/abs/1503.04554>.
6. Deza, M. M., Dutour, M. & Panteleeva, E. I. 2002, "Small cones of oriented semi-metrics", *Forum for Interdisciplinary Mathematics Proceedings on Statistics, Combinatorics & Related Areas*, vol. 22, pp. 199–225.
7. Deza, M. M., Grishukhin, V. P. & Deza, E. I. 2012, "Cones of weighted quasi-metrics, weighted quasi-hypermetrics and of oriented cuts", *Mathematics of Distances and Applications, ITEA, Sofia*, pp. 31–53.
8. Deza, M. M. & Laurent, M. 1997, "Geometry of cuts and metrics", *Springer-Verlag, Berlin*. 517 p.
9. Deza, M. M. & Panteleeva, E. I. 2000, "Quasi-semi-metrics, oriented multi-cuts and related polyhedra", *European Journal of Combinatorics*, no. 21(6), pp. 777–795.
10. Fréchet, M. 1906, "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rend. Circolo mat. Palermo*, vol. 22, pp. 1–74.
11. Hausdorff, F. 1914, "Grundzüge der Mengenlehre", *Leipzig*.
12. Hitzler, P. 2001, "Generalized Metrics and Topology inLoic Programming Semantics", PhD Thesis, *National University of Ireland, Univ. College Cork*.
13. Matthews, S. G. 1994, "Partial metric topology", *Ann. New York Acad. Sci.*, vol. 728, pp. 183–197.
14. Seda, A. K. 1997, "Quasi-metrics and the semantic of logic programs", *Fundamenta Informaticaem*, vol 29, pp. 97–117.
15. Wilson, W. A. 1931, "On quasi-metric spaces", *American J. of Math.*, vol. 53, pp. 575–681.

Ecole Normale Supérieure.

Московский педагогический государственный университет.

Поступило 14.04.2015