

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-205-214

Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости¹

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости.

Полагается, что скорость набегающего потока значительно меньше скорости звука. Часть поверхности сфероида совершает гармонические колебания, а остальная часть является абсолютно жесткой.

Задача решается в вытянутой сфероидальной системе координат. Получено приближенное аналитическое решение задачи, построенное с использованием потенциала скорости набегающего на тело потока и потенциала скорости акустического поля неподвижного излучателя.

Представлены результаты численных расчетов полярных диаграмм распределения акустического давления на поверхности сфероида при разных значениях отношения скорости потока к скорости звука и различной конфигурации сфероида.

Ключевые слова: акустическое излучение, сфероид, идеальная жидкость, потенциальное течение

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Акустическое излучение сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 205–214.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024 тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-205-214

Acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru

Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: tols1@mail.ru

Abstract

In the article the problem of the acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid is considered.

It is assumed that the velocity of the incoming flow is significantly lower than the speed of sound. Part of the surface of the spheroid makes harmonic vibrations and the rest part is absolutely rigid.

The problem is solved in a prolate spheroidal coordinate system. An approximate analytical solution of the problem was obtained with using the speed potential of the oncoming on the body flow and the speed potential of the stationary radiator acoustic field.

The results of numerical calculations of polar diagrams of the acoustic pressure distribution on the surface of a spheroid at different values of the ratio of the flow velocity to the speed of sound and different configurations of the spheroid are presented.

Keywords: acoustic radiation, spheroid, ideal fluid, potential flow

Bibliography: 12 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2024, “Acoustic radiation of a spheroid streamlined by a stationary flow of an ideal liquid”, *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.1, pp. 205–214.

1. Введение

Излучение звука вытянутыми и сплюснутыми эллипсоидами вращения — сфероидами рассматривалось в ряде работ, например, [1 - 5]. При этом исследовались акустические свойства неподвижных сфероидальных излучателей в идеальной жидкости, находящейся в состоянии покоя. В [1] решена задача об акустическом излучении вытянутого сфероида, поверхность которого колеблется произвольным образом. Получены аналитические выражения для акустического давления, скорости, импеданса излучения. Проведены численные расчеты для случая колебаний тонкого сфероида. В [2] с использованием сфероидальной геометрии анализируется акустическое излучение поршней эллиптического профиля. В [3] рассматривается излучение вытянутых и сплюснутых сфероидов. Определены направленность излучения и энергетические характеристики таких излучателей при произвольном распределении колебательной скорости на их поверхности. В [4, 5] исследуется акустическое поле, генерируемое колеблющимися с постоянной амплитудой участками поверхности абсолютно жесткого сфероида (вытянутого

[4] и сплюснутого [5]), имеющими форму колпачков и колец. Проведены численные расчеты акустического импеданса излучения.

В настоящей работе рассматривается задача об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сфероид, на который вдоль оси вращения набегаает стационарный поток идеальной сжимаемой жидкости. Жидкость характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c . Полагаем, что скорость потока много меньше скорости звука ($u \ll c$). Поэтому будем считать, что в результате обтекания сфероида потоком вихреобразование не происходит и поток является потенциальным.

Пусть осью вращения сфероида является ось z прямоугольной декартовой системы координат x, y, z с началом в центре сфероида, а поток набегаёт в направлении, противоположном оси z . Для определенности считаем сфероид вытянутым.

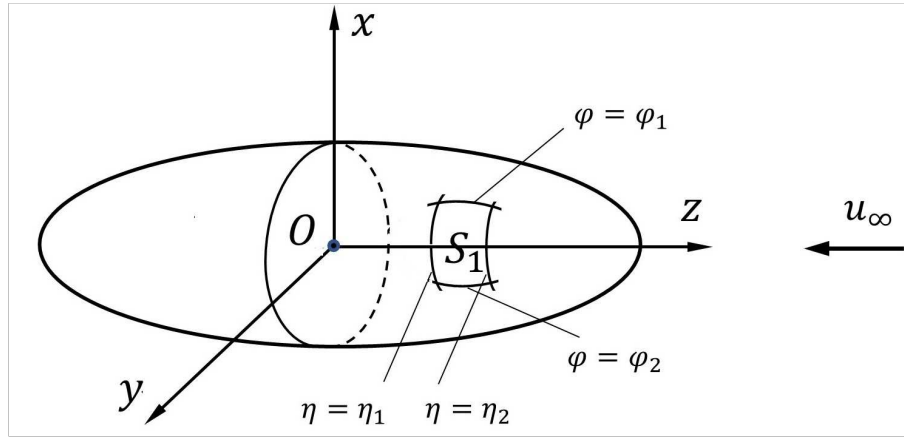


Рис. 1: Геометрия задачи

Свяжем с координатами x, y, z вытянутые сфероидальные координаты ξ, η, φ [6]

$$x = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \quad y = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \quad z = h\xi\eta$$

$$(1 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где h — половина межфокусного расстояния сфероида.

Уравнение поверхности сфероида в вытянутой сфероидальной системе координат записывается через радиальную сфероидальную координату в виде $\xi = \xi_0$. Поверхность $\xi = \xi_0$ является вытянутым эллипсоидом вращения с большой осью, равной $2h\xi_0$, и малой осью, равной $2h(\xi_0^2 - 1)^{1/2}$.

На поверхности сфероида S находится излучатель гармонических звуковых волн. Часть поверхности сфероида S_1 , ограниченная кривыми $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$, $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, пульсирует с нормальной колебательной скоростью постоянной амплитуды U

$$V_n = \begin{cases} U \exp(-i\omega t) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2, \end{cases} \quad (1)$$

а остальная часть поверхности сфероида S_2 является абсолютно жесткой (рис. 1). Здесь ω — круговая частота; t — время. Без ограничения общности будем полагать, что $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$

(соответствующим поворотом координатной системы x, y, z относительно оси z всегда можно получить разделение плоскостью xOz поверхности S_1 на две симметричные части).

Определим акустическое поле сфероидального излучателя.

3. Аналитическое решение задачи

Получим приближенное аналитическое решение задачи методом Блохинцева [7].

Согласно [7] распространения звука в стационарном потоке идеальной жидкости описывается уравнением

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{2}{c} (\nabla\Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t}) = 0. \quad (2)$$

Здесь Ψ — потенциал скорости акустического поля ($\mathbf{v} = \nabla\Psi$); Φ — потенциал скорости невозмущенного звуком потока ($\mathbf{u} = \nabla\Phi$). Уравнение (2) получено при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Положив $\Psi = \psi \exp(-i\omega t)$, из (1) получаем

$$\Delta\psi + k^2\psi + 2i\frac{k}{c}(\nabla\Phi \cdot \nabla\psi) = 0, \quad (3)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число.

Искомый потенциал скорости акустического поля ψ , являющийся решением уравнения (3), должен удовлетворять граничному условию на поверхности тела $v_n|_S = V_n|_S$, то есть

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = \begin{cases} U & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2 \end{cases} \quad (4)$$

и условию излучения на бесконечности [8].

Так как скорость потока $u \ll c$, то будем полагать, что жидкость является несжимаемой [7].

Потенциал Φ является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (5)$$

и должен удовлетворять граничному условию, которое заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости на поверхности абсолютно жесткого тела

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (6)$$

а в бесконечно удаленной точке (в координатной системе x, y, z) $\nabla\Phi = (0, 0, -u_\infty)$, где $-u_\infty$ — скорость потока на бесконечности.

Выражение для потенциала Φ имеет вид [9]

$$\Phi = hu_\infty \tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = -\eta \left[\xi - \left(\frac{1}{2} \xi \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - 1 \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0+1}{\xi_0-1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2-1} \right) \right]. \quad (7)$$

Приближенное аналитическое решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\psi = \psi_0 \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (8)$$

где ψ_0 — потенциал скорости акустического поля сфероидального излучателя в отсутствии потока.

Потенциал ψ_0 , являющийся решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_0 + k^2\psi_0 = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющий граничному условию (произвольное распределение колебательной скорости на поверхности сфероида)

$$\left. \frac{\partial\psi_0}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_0} = f(\eta, \varphi) \quad (10)$$

и условию излучения на бесконечности, в случае симметричных колебаний поверхности относительно плоскости xOz будем искать в виде

$$\psi_0 = U h \tilde{\psi}_0, \quad \tilde{\psi}_0 = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где $S_{mn}(q, \eta)$ и $R_{mn}^{(3)}(q, \xi)$ — угловая первого рода и радиальная третьего рода вытянутые сфероидальные функции; $q = kh$ — волновой размер сфероид; $f(\eta, \varphi)$ — функция распределения нормальной колебательной скорости на поверхности сфероид.

Подставим (11) в (10), учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$. Воспользовавшись условиями ортогональности косинусов и вытянутых угловых сфероидальных функций, находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi U N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{\xi_0^2 - 1} \right)^{1/2} f(\eta, \varphi) S_{mn}(q, \eta) \cos m\varphi d\eta d\varphi. \quad (12)$$

Здесь $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$ — коэффициент Ламе координаты ξ ; $N_{mn}(q)$ — норма угловых сфероидальных функций; δ_{0m} — символ Кронекера.

Подставляя выражение (8) в уравнение (3) и принимая во внимание (5) и (9), убеждаемся, что (8) удовлетворяет (3) при пренебрежении членами порядка u^2/c^2 .

Подставим (8) в граничное условие (4). С учетом условий (6) и (10) находим, что (8) удовлетворяет условию (4) тогда, когда

$$f(\eta, \varphi) = \begin{cases} U \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) & \text{на } S_1, \\ 0 & \text{на } S_2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), находим

$$A_{mn} = \frac{(2 - \delta_{0m})}{2\pi N_{mn}(q) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi_0) (\xi_0^2 - 1)^{1/2}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{mn}(q, \eta) \exp(ikc^{-1}\Phi|_{\xi=\xi_0}) d\eta \times \\ \times \begin{cases} (\varphi_2 - \varphi_1)/2 & \text{при } m = 0, \\ (\sin m\varphi_2 - \sin m\varphi_1)/m & \text{при } m \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

Согласно [7] акустическое давление в каждой точке пространства определяется по формуле

$$p = \rho [i\omega\psi_0 - (\nabla\Phi \cdot \nabla\psi_0)] \exp(-ikc^{-1}\Phi), \quad (15)$$

которую с учетом (7) и (11) перепишем в виде

$$p = \rho c U \left[iq\tilde{\psi}_0 - h^2 \frac{u_\infty}{c} (\nabla\tilde{\Phi} \cdot \nabla\tilde{\psi}_0) \right] \exp\left(-iq \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}\right). \quad (16)$$

Учитывая, что в системе координат ξ, η, φ $\nabla = \frac{1}{H_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

где $H_\xi = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}$, $H_\eta = h \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2}$, $H_\varphi = h [(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]$ — коэффициенты Ламе, имеем

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla \tilde{\psi}_0) = & \frac{1}{h^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ -(\xi^2 - 1)\eta \left[1 - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \right. \\ & \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)'}(q, \xi) \cos m\varphi - \\ & - (1 - \eta^2) \left[\xi - \left(\frac{1}{2} \xi \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1 \right) / \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right) \right] \times \\ & \left. \times \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} S'_{mn}(q, \eta) R_{mn}^{(3)}(q, \xi) \cos m\varphi \right\}. \end{aligned}$$

На поверхности сфероида акустическое давление определяется по формуле

$$p = \rho c U \left[i q \tilde{\psi}_0|_{\xi=\xi_0} + \frac{2u_\infty(1 - \eta^2)}{c(\xi_0^2 - \eta^2) \left((\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right)} \frac{\partial \tilde{\psi}_0}{\partial \eta} \Big|_{\xi=\xi_0} \right] \exp \left(-i q \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} \right), \quad (17)$$

где

$$\tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0} = 2\eta \left[(\xi_0^2 - 1) \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - 2\xi_0 \right]^{-1}.$$

Волновые сфероидальные функции представляются следующими разложениями [5, 10 – 12]:

$$S_{mn}(q, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} {}' d_r^{mn}(q) P_{m+r}^m(\eta), \quad (18)$$

$$N_{mn}(q) = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{{}'(2m+r)! [d_r^{mn}(q)]^2}{(2m+2r+1)r!},$$

$$R_{mn}^{(3)} = \left[\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{{}'(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) \right]^{-1} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^{m/2} \sum_{r=0,1}^{\infty} {}' i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} d_r^{mn}(q) h_{m+r}(q\xi). \quad (19)$$

Здесь $P_n^m(\eta)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; $h_m(q\xi)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка m ; штрих над знаком суммы указывает на то, что суммирование производится по четным r , если $(n - m)$ четное, и по нечетным r , если $(n - m)$ нечетное.

Коэффициенты $d_r^{mn}(q)$ находятся из рекуррентного соотношения [10 – 12]

$$\alpha_r d_{r+2}^{mn}(q) + [\beta_r - \lambda_{mn}(q)] d_r^{mn}(q) + \gamma_r d_{r-2}^{mn}(q) = 0, \quad r \geq 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} q^2; \\ \beta_r &= (m+r)(m+r+1) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} q^2; \end{aligned}$$

$$\gamma_r = \frac{r(r-1)}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} q^2; \quad d_{-2}^{mn} = d_{-1}^{mn} = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{mn}(q)$ параметра разделения λ уравнения Гельмгольца в вытянутой сфероидальной системе координат являются решениями трансцендентного уравнения, имеющего вид непрерывной дроби [6, 11].

Соотношения (20) связывают коэффициенты $d_r^{mn}(q)$, имеющие индексы r одной и той же четности. Для сходимости ряда (18) необходимо, чтобы при $r \rightarrow \infty$ отношение $\frac{d_{r+2}^{mn}(q)}{d_r^{mn}(q)}$ убывало как $q^2/4r^2$ [12].

Система (20) определяет коэффициенты $d_r^{mn}(q)$ с точностью до множителя, который задается нормировкой вытянутых угловых сфероидальных функций. При нормировке Фламмера [6] имеют место соотношения [11, 12]

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r/2}(r+2m)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r+2m}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m)/2}(n+m)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, \quad (21)$$

когда $(n-m)$ — четное, и

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(r-1)/2}(r+2m+1)!}{2^r \left(\frac{r-1}{2}\right)! \left(\frac{r+2m+1}{2}\right)!} d_r^{mn}(q) = \frac{(-1)^{(n-m-1)/2}(n+m+1)!}{2^{n-m} \left(\frac{n-m-1}{2}\right)! \left(\frac{n+m+1}{2}\right)!}, \quad (22)$$

когда $(n-m)$ — нечетное.

4. Численные исследования

По формуле (17) были проведены расчеты полярных диаграмм распределения акустического давления $|p|/\rho c U$ на поверхности сфероида. При расчетах полагалось $\xi_0 = 1.02$ и $\xi_0 = 1.1$ (что соответствует отношению большой оси к малой, равному 5.1 и 2.4 соответственно), волновой размер сфероида $q = 1$. Поверхность S_1 задана параметрами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\eta_2 = 1$, а значение η_1 полагалось равным 0 и 0.5. S_1 представляет собой колпачок в носовой части сфероида, в основании которого лежит окружность, образованная пересечением гиперболоида вращения $\eta = \eta_1$ с поверхностью сфероида $\xi = \xi_0$. Сфероид находится в воде ($\rho = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с), $u_\infty/c = 0, 0.1, 0.2$.

Для рассматриваемой области S_1 задача является осесимметричной ($m = 0$). Тогда будем иметь

$$\tilde{\psi}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{0n} S_{0n}(q, \eta) R_{0n}^{(3)}(q, \xi),$$

где

$$A_{0n} = \frac{1}{2(\xi_0^2 - 1)^{1/2} N_{0n}(q) R_{0n}^{(3)'}(q, \xi_0)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\xi_0^2 - \eta^2)^{1/2} S_{0n}(q, \eta) \exp\left(iq \frac{u_\infty}{c} \tilde{\Phi}|_{\xi=\xi_0}\right) d\eta.$$

При проведении расчетов для нахождения собственных значений $\lambda_{0n}(q)$ использовалось степенное разложение [9]

$$\lambda_{mn}(q) = \sum_{s=0}^{\infty} l_{2s} q^{2s},$$

где коэффициенты l_{2s} приведены в [9].

Процесс вычисления коэффициентов $d_r^{0n}(q)$ был организован следующим образом. Выбиралось достаточно большое значение $r = N$ и полагалось $\frac{d_{N+2}^{0n}(q)}{d_N^{0n}(q)} = q^2/4N^2$. Затем из системы (20) последовательно находились коэффициенты $d_N^{0n}(q), d_{N-2}^{0n}(q), d_{N-4}^{0n}(q), \dots, d_0^{0n}(q)$ или $d_1^{0n}(q)$ (при четном и нечетном N соответственно), выраженные через коэффициент $d_{N+2}^{0n}(q)$. Последний определялся из (21) или (22). В результате были вычислены две последовательности коэффициентов $d_r^{0n}(q)$ по четным и нечетным значениям индекса r . При расчетах выбиралось $N = 100$ ($N = 101$) и $N = 200$ ($N = 201$), что приводит к практически одинаковым значениям быстро убывающих коэффициентов $d_r^{0n}(q)$. Вытянутые сфероидальные функции рассчитывались по формулам (18) и (19).

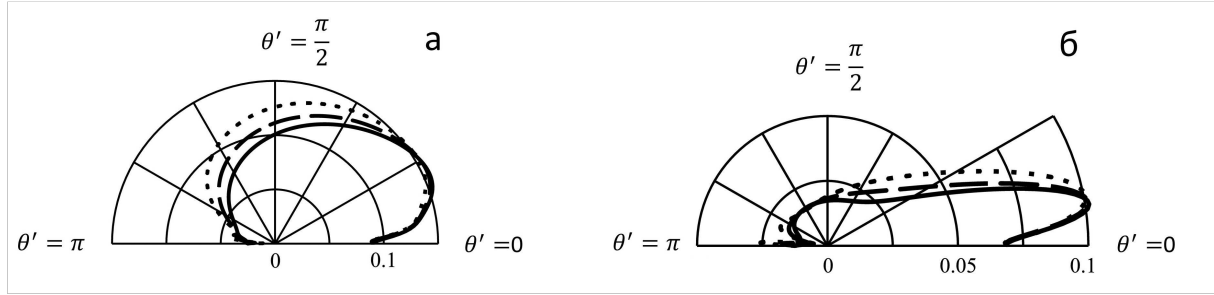


Рис. 2: Распределение акустического давления на поверхности сфероида $\xi_0 = 1.02$, а — $\eta_1 = 0$, б — $\eta_1 = 0.5$

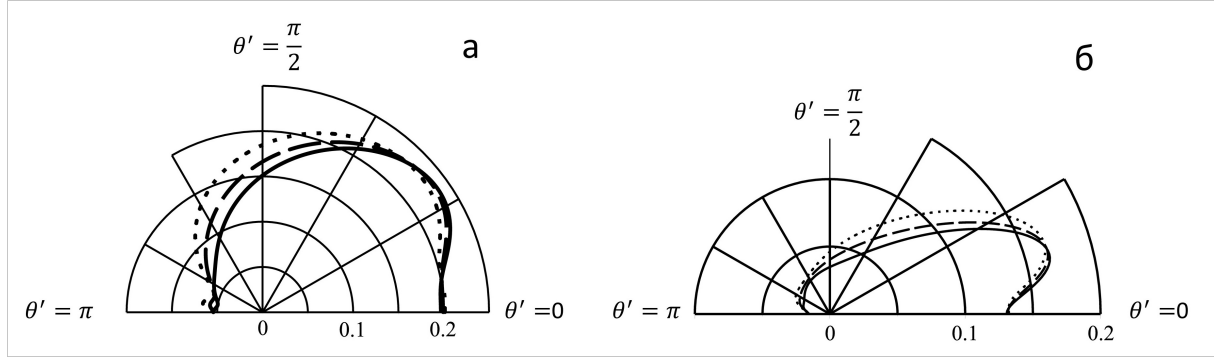


Рис. 3: Распределение акустического давления на поверхности сфероида $\xi_0 = 1.1$, а — $\eta_1 = 0$, б — $\eta_1 = 0.5$

На рис. 2 и рис. 3 представлены полярные диаграммы распределения акустического давления на поверхности сфероида при $\xi_0 = 1.02$ и $\xi_0 = 1.1$ соответственно. Величины $|p|/\rho c U$ откладывались на лучах θ' , проведенных из начала системы координат в расчетные точки кривой, образованной пересечением сфероидальной поверхности $\xi = \xi_0$ и плоскости xOz . Сферическая координата θ' связана со сфероидальными координатами соотношением $\text{tg } \theta' = \frac{[(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2}}{\xi_0 \eta}$. Отсюда получаем следующее соотношение между углом наблюдения

θ' и координатой η , используемое при проведении расчетов: $\eta = \frac{\cos \theta' \sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi_0^2 - \cos^2 \theta'}}$. На рисунках сплошные линии соответствуют случаю $u_\infty/c = 0$, штриховые — $u_\infty/c = 0.1$, пунктирные — $u_\infty/c = 0.2$.

Как видно из полярных диаграмм на характер распределения акустического давления по поверхности движущегося сфероида существенно влияют размер и расположение колеба-

щейся части поверхности тела, конфигурация сфероида и значение отношения u_∞/c .

5. Заключение

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение задачи об акустическом излучении сфероида, обтекаемого стационарным потоком идеальной жидкости, скорость которого значительно меньше скорости звука. Полученное решение можно распространить на случай сплюснутого сфероидального излучателя, если провести формальную замену ξ на $i\xi$ и h на $-ih$, переводящую вытянутую сфероидальную систему в сплюснутую. В пределе, когда фокусное расстояние стремится к нулю ($h \rightarrow 0$), обе сфероидальные координатные системы сводятся к сферической системе координат r, θ, φ . Таким образом, найденное решение позволяет исследовать акустические поля излучателей, обтекаемых стационарным потоком идеальной жидкости, форма поверхности которых изменяется в широком диапазоне от иглы ($\xi_0 = 1$ в вытянутой сфероидальной системе координат) до диска ($\xi_0 = 0$ в сплюснутой сфероидальной системе координат).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chertock G. Sound radiation from prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 7. P. 871 – 876.
2. Silbiger A. Radiation from circular pistons of elliptical profile // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. Vol. 33. No. 11. P. 1515 – 1522.
3. Андебур В.А. Акустические свойства сфероидальных излучателей // Акустический журн. 1969. Т.15. № 4. С. 512 – 522.
4. Van Buren A.L. Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1971. Vol. 50. No. 5. Part 2. P. 1343 – 1356.
5. Baier R.V. Acoustic radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles // J. Acoust. Soc. Amer. 1972. Vol. 51. No. 5. Part 2. P. 1705 – 1716.
6. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 140 с.
7. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа 2003. 840 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
11. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.

REFERENCES

1. Chertock, G. 1961, “Sound radiation from prolate spheroids”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 33, no. 7, pp. 871 – 876.
2. Silbiger, A. 1961, “Radiation from circular pistons of elliptical profile”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 33, no. 11, pp. 1515 – 1522.
3. Andebura, V. A. 1969, “Acoustic properties of spheroidal emitters”, *Acoust. journal*, vol. 15, no. 4, pp. 512 – 522, [in Russian].
4. Van Buren, A. L. 1971, “Acoustic radiation impedance of caps and rings on prolate spheroids”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 50, no. 5, part 2, pp. 1343 – 1356.
5. Baier, R. V. 1972, “Acoustic radiation impedance of caps and rings on oblate spheroidal baffles”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 51, no. 5, part 2, pp. 1705 – 1716.
6. Flammer, C. 1957, “Spheroidal Wave Functions”, *Stanford University Press, Stanford*, 220 p. 840 p., [in Russian].
7. Blohintsev, D. I. 1981, “Acoustics of an inhomogeneous moving medium”, *Nauka , Moscow*, 208 p., [in Russian].
8. Shenderov, E. L. 1972, “Wave problems of underwater acoustics”, *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p. [in Russian].
9. Loystanskii, L. Ė. 2003, “Mechanics of fluid and gas”, *Drofa , Moscow*, 840 p., [in Russian].
10. Abramowitz, M., Stegun I. A. 1965, “Handbook of Mathematical Functions”, *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.
11. Ivanov, E. A. 1968, “Diffraction of electromagnetic waves by two bodies”, *Nauka i tekhnika, Minsk*, 584 p., [in Russian].
12. Komarov, I. V., Ponomarev, L. I., Slavyanov, S. Yu. 1976, “Spheroidal and Coulomb’s spheroidal functions”, *Nauka , Moscow*, 320 p., [in Russian].

Получено: 30.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024