

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-184-191

О совместных приближениях значений некоторых гипергеометрических функций

П. Л. Иванов

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

В статье предлагается эффективное построение совместных приближений для некоторых гипергеометрических функций специального вида и их производных по параметру. Предложенное построение используется для получения оценки снизу числовой линейной формы от значений таких функций; при этом некоторые из параметров функций могут быть иррациональными.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, эффективная конструкция, совместные приближения, линейные формы

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванов. О совместных приближениях значений некоторых гипергеометрических функций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 184–191.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-184-191

On simultaneous approximations of some hypergeometric functions

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

In this paper we propose effective construction of simultaneous approximations for some hypergeometric functions of a special type and their derivatives with respect to parameter. This construction is made use of for the achievement of the lower estimates of numerical linear forms of the values of such functions. Some parameters of these functions can be irrational.

Keywords: hypergeometric functions, effective construction, simultaneous approximations, linear forms

Bibliography: 10 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2024, “On simultaneous approximations of some hypergeometric functions”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 184–191.

1. Введение

Рассмотрим функции

$$F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\beta+x} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x}, \quad (1)$$

где $k = 1, \dots, t$, $l = 0, 1$, $j = 1, 2$; $\vartheta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Предположим, что

$$\lambda_k + \vartheta - \beta \text{ и } \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \quad (2)$$

не являются целыми рациональными числами, а все числа λ_k рациональны, $j = 1, 2$, $k, k_1, k_2 = 1, \dots, t$, $k_1 \neq k_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и пусть $\beta \in \mathbb{I}$. Будем считать также, что выполнены все сделанные выше предположения относительно параметров функций (1). Тогда для любого ненулевого числа $\xi \in \mathbb{I}$ выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^t \sum_{l=0}^1 \sum_{j=1}^2 h_{klj} F_{klj}(\xi) \right| > H^{-8t-1-\epsilon}, \quad (3)$$

где h_0, h_{klj} — произвольный нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$, причём число $H = \max_{k,l,j} |h_{klj}|$ достаточно велико (нижняя граница зависит от параметров функций (1) и от числа ϵ).

Формулировка этой теоремы опубликована в [9]. В предшествующих работах (см., например, [1], [2]), относящихся к данной тематике, параметр, по которому производилось дифференцирование, входил либо только в числитель, либо только в знаменатель общего члена соответствующих рядов. Для функций, рассматриваемых в данной статье, ранее предлагались конструкции аппроксимаций Паде первого рода (см. [3]), но такие аппроксимации не позволяют получать арифметические результаты в случае иррациональных параметров.

Аналогичные оценки, которые можно было бы получить с помощью известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля (в его классической форме), возможны лишь для случая рациональных параметров, и в этом последнем случае они оказываются менее точными. О применении метода Зигеля для исследования арифметической природы продифференцированных по параметру гипергеометрических функций см. [4, гл. 7, § 3; замечания к гл. 3].

2. Конструкция совместных приближений

Построение эффективной конструкции совместных приближений проведем в более общем случае по сравнению с тем, что требуется для доказательства теоремы 1.

Пусть

$$F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x}, \quad (4)$$

где $b(x) = (x + \beta_m)$, $k = 1, \dots, t$, $l = 0, 1, \dots, \tau - 1$, $j = 1, \dots, m + 1$; τ — некоторое натуральное число; $\vartheta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Предположим, что

$$\lambda_k + \vartheta - \beta_j \text{ и } \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \quad (5)$$

не являются целыми рациональными числами, а все числа λ_k рациональны, $j = 1, \dots, m$, $k, k_1, k_2 = 1, \dots, t$, $k_1 \neq k_2$.

Пусть $T = t\tau$, и пусть при натуральном n

$$N_1 = \left[\frac{n}{T} \right], \quad u = m + 1, \quad N_2 = \left[\frac{n}{uT} \right] - 1,$$

Пусть, далее,

$$P(z) = \sum_{s=0}^n z^s p_s \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-s} b(x) \quad (6)$$

— многочлен с неопределенными коэффициентами p_s . Рассмотрим произведение

$$P(z)F_{klj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{klj\nu} z^{\nu},$$

для которого запишем и преобразуем коэффициент $c_{klj\nu}$ при $n \leq \nu \leq n + N_2$; имеем

$$\begin{aligned} c_{klj\nu} &= \sum_{s=0}^n p_s \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-s} b(x) \cdot (\nu - s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + x} = \\ &= \prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{b(x)} \sum_{\mu=0}^l \binom{l}{\mu} \sum_{s=0}^n p_s C_{kl\mu}(s) \frac{\partial^{\mu}}{\partial \lambda_k^{\mu}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{kl\mu}(s) &= (\nu - s)^{j-1} \times \\ &\times \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} b(x-s) \frac{\partial^{l-\mu}}{\partial \lambda_k^{l-\mu}} \left(\prod_{x=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=\nu+1}^{n+N_2} (\lambda_k + x - s) \prod_{x=n+1}^{\nu} (\lambda_k + \vartheta + x - s) \right), \end{aligned}$$

т.е. $C_{kl\mu}(s)$ — многочлен степени не выше N_1 . Таким образом, для построения совместных приближений с порядком нуля, лишь на константу отличающимся от максимально возможного, достаточно подобрать коэффициенты многочлена $P(z)$ так, чтобы равенство

$$\sum_{s=0}^n p_s C(s) \frac{\partial^{\mu}}{\partial \lambda_k^{\mu}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0$$

выполнялось при $\mu = 0, \dots, \tau - 1$ для любого многочлена $C(s)$, степень которого не выше N_1 . Совместные приближения при этом имеют вид

$$r_{klj}(z) = P_{klj}(z) + P(z)F_{klj}(z), \quad \text{где } P_{klj}(z) = - \sum_{s=0}^{n-1} c_{kljs} z^s, \quad (7)$$

и порядок нуля при $z = 0$ функции r_{klj} будет не меньше, чем $n + N_2$.

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ — неотрицательное целое число. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} &= \sum_{s=0}^n \frac{K_s(\zeta)}{\zeta + n - s} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} + \\ &+ \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=0}^n \frac{z + n - x}{\zeta + n - x}, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$K_s(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0, \\ \frac{\alpha+1}{\zeta+\alpha+n-s+1}, & \text{если } s = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Равенство (8) можно доказать по индукции. При этом удобнее доказывать индукцией по q , $0 \leq q \leq n$, более общее равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} &= \sum_{s=0}^q \frac{K_s(\zeta)}{\zeta + n - s} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^{s-1} \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} + \\ &+ \frac{1}{\zeta - z} \prod_{x=1}^{n-q} \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} \prod_{x=0}^q \frac{z + n - x}{\zeta + n - x}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$\alpha \notin \mathbb{Z}, \quad (9)$$

и пусть $R(z)$ – многочлен степени не выше n . Положим при $s = 0, 1, \dots, n$,

$$v_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_s(\zeta) R(\zeta) d\zeta}{\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \alpha + x)}, \quad (10)$$

где Γ – простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур, который охватывает все нули многочлена $\prod_{x=0}^n (\zeta + n - x)$, а все нули многочлена

$$\prod_{x=1}^n (\zeta + \alpha + x) \quad (11)$$

лежат в его внешности; такой контур существует в силу условия (9). Тогда тождественно по z выполняется равенство

$$R(z) = \sum_{s=0}^n v_s \prod_{x=0}^{s-1} (z + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (z + \alpha + x) \quad (12)$$

Доказательство. Пусть сначала z лежит внутри контура Γ . Умножим обе части (8) на $R(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрируем получившееся равенство по контуру Γ . При этом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \prod_{x=1}^n \frac{z + \alpha + x}{\zeta + \alpha + x} d\zeta = Q(z),$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z} \prod_{x=0}^n \frac{z + n - x}{\zeta + n - x} d\zeta = 0.$$

Первое из этих равенств очевидно, а второе справедливо потому, что контур интегрирования охватывает все полюсы подынтегральной функции, и степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя. Из сделанных замечаний следует, что после указанной выше процедуры мы получим равенство (12), в котором коэффициенты v_s вычисляются по формулам (10). Мы доказали (12) для z , лежащих внутри Γ . Ясно, что в этом случае (12) будет справедливо и при всех прочих z . Лемма доказана.

В равенстве (12) положим

$$R(z) = \prod_{k=1}^t \prod_{\sigma=0}^{N_1-1} (\zeta - \lambda_k - N_2 + \sigma)^\tau, \quad (13)$$

$\alpha = \vartheta + N_1 - N_2$. Тогда, если $\vartheta \notin \mathbb{Z}$, то выполняется равенство

$$\frac{R(z)}{\prod_{x=1}^n (z + x)} = \sum_{s=0}^n w_s \prod_{x=1}^{n-s} \frac{z + \vartheta + N_1 - N_2 + x}{z + x}, \quad (14)$$

где числа w_s вычисляются по формуле (10) при указанных $R(\zeta)$ и α .

ЛЕММА 3. Пусть $\vartheta \notin \mathbb{Z}$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^n w_s \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + N_1 - \sigma + x}{\lambda_k + N_2 - \sigma + x} = 0, \quad (15)$$

$k = 1, \dots, t$, $l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1$, $\sigma = 0, 1, \dots, N_1 - 1$.

Доказательство. Если продифференцировать равенство (14) l раз, $0 \leq l \leq \tau - 1$ по z и подставить $z = \lambda_k + N_2 - \sigma$, то мы получим требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $\lambda - \alpha \notin \mathbb{Z}$, то многочлены

$$G_\sigma(z) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} (z + \lambda - x) \prod_{x=1}^{N_1-\sigma} (z + \alpha + x), \quad \sigma = 0, 1, \dots, N_1,$$

образуют базис пространства многочленов степени не выше N_1 .

Доказательство. Достаточно проверить, что определитель

$$|G_\sigma(z)|_{\sigma, z=0,1,\dots,N_1}$$

отличен от нуля. Определитель более общего вида вычислен в [5, лемма 1, с. 193]. Из доказанной там формулы следует требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При $1 \leq k \leq t$, $0 \leq l \leq \tau - 1$ выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^n g_s B(s) \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0, \quad (16)$$

где $B(s)$ – произвольный многочлен степени не выше N_1 .

Доказательство. Индукция по l . Пусть $l = 0$. Заметим, что при $0 \leq \sigma \leq N_1$ выполняется равенство

$$\prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + N_1 - \sigma + x}{\lambda_k + N_2 - \sigma + x} = B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x},$$

где

$$B_\sigma(s) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} \frac{\lambda_k + N_2 + n - s - x}{\lambda_k + N_2 - x} \prod_{x=1}^{N_1-\sigma} \frac{\lambda_k + \vartheta + n - s + x}{\lambda_k + \vartheta + x}.$$

Отсюда и из (15) при $l = 0$ получаем, что

$$\sum_{s=0}^n w_s B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} = 0. \quad (17)$$

Из (17) в силу леммы 4 следует, что (16) верно при $l_k = 0$ для любого многочлена степени не выше N_1 . Пусть (при фиксированном k) равенство (16) верно для производных в левой части этого равенства порядков $0, 1, \dots, l_k - 1$, при некотором l_k , $1 \leq l_k \leq \tau_k - 1$, при любом многочлене $B(s)$ степени не выше N_1 . Преобразуем (16); имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=0}^n w_s \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(B_\sigma(s) \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} \right) = \sum_{\mu=0}^{l-1} \binom{l}{\mu} \sum_{s=0}^n \frac{\partial^{l-\mu} B_\sigma(s)}{\partial \lambda_k^{l-\mu}} \times \\ &\quad \times \frac{\partial^\mu}{\partial \lambda_k^\mu} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x} + \sum_{s=0}^n B_\sigma(s) \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda_k + N_2 + x}. \end{aligned}$$

В последнем выражении двойная сумма равна нулю по предположению индукции (т.к. степень $B_\sigma(s)$ не может увеличиться при дифференцировании по λ_k), а тогда равна нулю и последняя сумма, и индуктивный переход завершается так же, как и начало индукции. Лемма доказана.

3. Замечания о доказательстве теоремы

В предыдущем разделе было установлено, что требуемые совместные приближения (7) будут построены, если в равенстве (6) положить $p_s = w_s$,

$$w_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_s(\zeta) \prod_{k=1}^t \prod_{\sigma=0}^{N_1-1} (\zeta - \lambda_k - N_2 + \sigma)^\tau d\zeta}{\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \vartheta + N_1 + N_2 + x)}, \quad (18)$$

где контур интегрирования Γ охватывает все нули многочлена $\prod_{x=0}^s (\zeta + n - x)$ от ζ , а все нули многочлена $\prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \vartheta + N_1 + N_2 + x)$ лежат в его внешности. Рассуждая как при доказательстве [3, лемма 2, с. 186], нетрудно доказать, что общий наименьший знаменатель чисел w_s , $s = 0, 1, \dots, n$, оценивается сверху величиной e^γ , где через γ обозначена постоянная, зависящая от параметров функций (4). Очевидно, аналогичная оценка будет верна и для коэффициентов многочленов (6). Для доказательства теоремы важно также получить и оценку общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{klj}(z)$, определяемых последним из равенств (7). Здесь потребуются дополнительные соображения. Для коэффициента c_{kljs} многочлена $P_{klj}(z)$ при z^s имеем, очевидно, формулу

$$\begin{aligned} c_{kljs} &= - \sum_{r=0}^s p_r \prod_{x=N_2+1}^{N_2+n-r} b(x) (s-r)^{j-1} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{1}{b(x)} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\lambda + x} = \\ &= - \sum_{r=0}^s p_r \frac{\prod_{x=s+1}^{N_2+n} b(x-r)}{\prod_{x=1}^{N_2} b(x)} (s-r)^{j-1} \frac{\partial^l}{\partial \lambda_k^l} \prod_{x=1}^{s-r} \frac{\lambda_k + \vartheta + x}{\vartheta_k + x} \end{aligned}$$

Основная проблема здесь в оценке общего наименьшего знаменателя дробей

$$\prod_{x=s+1}^{N_2+n} b(x-r) \prod_{x=1}^{s-r} \frac{1}{b(x)}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad 0 \leq r \leq s. \quad (19)$$

Привлекая соображения, изложенные в статье [6], можно доказать, что модуль общего наименьшего знаменателя чисел (19) в случае функции (1) оценивается сверху при любом $\epsilon > 0$ величиной $(n!)^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. При этом общим наименьшим знаменателем некоторого множества чисел из поля $\mathbb{I}$ называется наименьшее по модулю отличное от нуля целое число из этого поля, после умножения на которое все числа из упомянутого множества становятся целыми в поле $\mathbb{I}$. Дальнейшие рассуждения, доказывающие неравенство (3), стандартны. Их можно скопировать с доказательства лемм 4 и 5 работы [1]; схема соответствующих рассуждений была впервые предложена в [7]. Существенную роль в этих рассуждениях играет линейная независимость над полем рациональных дробей функций (4); по этому поводу см. работу [8]. Более подробно доказательство теоремы 1 не рассматриваем.

4. Заключение

Рассмотренной теоремой возможности применения предложенной эффективной конструкции совместных приближений не исчерпываются. Можно, например, попробовать рассмотреть случай, когда некоторые из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ иррациональны. Возможно, новые результаты удастся получить также и в случае, когда в правой части равенства (4) дробь $1/b(x)$ заменяется на $a(x)/b(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П. Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование, **12** (2012), С. 135–143.
2. Иванков П. Л. Об использовании теории делимости в квадратичных полях для получения оценок некоторых линейных форм // Наука и образование, **11** (2013), С. 129–138.
3. Иванков П. Л. О дифференцировании по параметру гипергеометрических функций специального вида // Известия вузов. Математика, **12** (2019), С. 71–81.
4. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // Наука, М., 1987.
5. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика **1:1** (1995), С. 191–206.
6. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал, **17:6** (1976), С. 1220–1235.
7. Chudnovsky, D. W., Chudnovsky G.W. Applications of Pade approximation to diophantine inequalities of G-functions // Lecture Notes in Math., v. 1135 (1985), pp. 9–51.
8. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник, **20:4** (2020), С. 155–166.
9. Иванков П. Л. Эффективная конструкция совместных приближений для гипергеометрических функций специального вида // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессоров Б.М.Бредихина, В.И.Нечаева и С.Б.Стечкина, Тула 2020, С. 255–256.

REFERENCES

1. Ivankov, P. L., 2012. “On the use of joint approximations for studying the arithmetic nature of values of hypergeometric functions”, *Science and Education*, **12**, pp. 135–143.
2. Ivankov, P. L., 2013. “On the use of divisibility theory in quadratic fields to On the use of the theory of divisibility in quadratic fields for obtaining estimates of some linear forms”, *Science and Education*, **11**, pp. 129–138.
3. Ivankov, P. L., 2019. “On differentiation on the parameter of hypergeometric functions of the of special kind”, *Izvestiya Vuzov. Mathematics*, **12**, pp. 71–81.
4. Shidlovsky, A. B., 1987. “Transcendental numbers”, *Nauka, M.*.
5. Ivankov, P. L., 1995. “On linear independence of values of some functions”, *Fundamental and Applied Mathematics*, **1:1**, pp. 191–206.
6. Galochkin, A. I., 1976. “On arithmetic properties of values of some integer hypergeometric functions”, *Siberian Mathematical Journal*, **17:6**, pp. 1220–1235.
7. Chudnovsky, D. W., Chudnovsky, G. W., 1985. “Applications of Pade approximation to diophantine inequalities of G-functions”, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1135, pp. 9–51.

8. Ivankov, P. L., 2020. “On linear independence of values of some hypergeometric functions over an imaginary quadratic field”, *Chebyshevskii Sbornik*, **20**:4, pp. 155–166.
9. Ivankov, P. L., 2020. “Efficient construction of joint approximations for hypergeometric functions of special kind”, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history. Proceedings of the XVIII International Conference on the 100-th Anniversary of the Birth of Professors B. M. Bredikhin, V. I. Nechaev and S. B. Stechkin, Tula*, pp. 255–256.

Получено: 29.06.2023

Принято в печать: 21.03.2024