

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-176-183

Устранение максимальных скачков

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова

Жуков Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Иванова Ольга Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).

e-mail: olgaiv80@mail.ru

Аннотация

Данная статья продолжает цикл работ, посвящённых явным конструкциям расширений Галуа полных дискретно нормированных полей характеристики 0 с полем вычетов простой характеристики p , см. [5], [6], [7], [8], [4], [10] а также обзор [9].

В статье доказано, что любое p -расширение Галуа полного дискретно нормированного поля, содержащего первообразный корень p -й степени из единицы, можно вложить в башню расширений Артина–Шрайера, и получена оценка на высоту башни. Этот результат показывает, что любое такое расширение можно вложить в расширение Инабы, т. е. в расширение, задаваемое конструкцией из работы [2]; при этом также получается оценка для порядка матрицы в соответствующем уравнении Инабы.

Также доказано, что p -расширение Галуа такого поля можно разложить в башню расширений Галуа степени p , в которой несколько верхних этажей имеют максимальный скачок ветвления, а нижние этажи являются расширениями Артина–Шрайера.

Ключевые слова: дискретно нормированное поле, скачок ветвления, уравнение Артина–Шрайера.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова. Устранение максимальных скачков // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.1, с. 176–183.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 512.623

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-176-183

Elimination of maximal jumps

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova

Zhukov Igor Borisovich — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).

e-mail: i.zhukov@spbu.ru

Ivanova Olga Yur'evna — candidate of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg).

e-mail: olgaiv80@mail.ru

Abstract

This article continues a series of papers devoted to explicit constructions of Galois extension of complete discrete valuation fields of characteristic 0 with the residue field of prime characteristic p , see [5], [6], [7], [8], [4], [10] and a survey article [9].

It is proved that any p -extension of a complete discrete valuation field containing a primitive p th root of unity can be embedded into a tower of Artin-Schreier extensions; an estimate for the height of this tower is obtained. This result also shows that such an extension can be embedded into Inaba extension, i. e., an extension obtained by the construction from [2]; an estimate for the order of the corresponding matrix is also obtained.

Next, it is proved that any Galois p -extension of such field can be decomposed into a tower of Galois extensions of degree p such that several upper levels have the maximal ramification jump whereas the lower ones are Artin-Schreier extensions.

Keywords: discrete valuation field, ramification jump, Artin-Schreier equation

Bibliography: 12 titles.

For citation:

I. B. Zhukov, O. Yu. Ivanova, 2024, "Elimination of maximal jumps", *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.1, pp. 176–183.

1. Обозначения и предварительные сведения

Через p будем обозначать фиксированное простое число.

Для дискретно нормированного поля K обозначим через v_K его нормирование. Униформирующей поля K будем называть такой элемент π , что $v_K(\pi) = 1$. Если $\text{char } K = 0$, а $\text{char } \bar{K} = p$, обозначим через e_K число $v_K(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть L/K — расширение Галуа дискретно нормированных полей, $|L : K| = p$, и σ — порождающий элемент группы $\text{Gal}(L/K)$. Число

$$h(L/K) = \min \left\{ v_L \left(\frac{\sigma a}{a} - 1 \right) \mid v_L(a) \geq 0, a \neq 0 \right\}$$

называется скачком ветвления расширения L/K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть K — дискретно нормированное поле, L — его конечное сепарабельное расширение. Глубиной ветвления расширения L/K называется

$$d(L/K) = \frac{1}{e_L} \min \left\{ v_L \left(\frac{\text{Tr}_{L/K} a}{a} \right) \mid a \in L^* \right\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $K \subset M \subset L$ — дискретно нормированные поля, M/K и L/M — конечные сепарабельные расширения. Тогда

$$d(L/K) = d(L/M) + d(M/K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1], лемма 2-4. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$. Конечное расширение L/K называется

- неразветвленным, если $e_{L/K} = 1$, и расширение $\bar{L}/\bar{K}$ сепарабельно;
- свирепым, если $e_{L/K} = 1$, и расширение $\bar{L}/\bar{K}$ чисто несепарабельно;
- вполне разветвленным, если $e_{L/K} = |L : K|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Уравнением Артина–Шрайера называется уравнение вида

$$X^p - X - a = 0.$$

Расширение L/K будем называть расширением Артина–Шрайера, если $L \neq K$, и L получено из K присоединением некоторого корня некоторого уравнения Артина–Шрайера, такого, что $a \in K$.

ЛЕММА 2. Пусть K — полное дискретно нормированное поле,

$$\text{char } K = 0, \quad \text{char } \bar{K} = p,$$

и L/K — расширение Галуа степени p , такое, что $h(L/K) < \frac{e_L}{p-1}$. Тогда L/K является расширением Артина–Шрайера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [11] и [3], а также §3 в [9]. ■

ЛЕММА 3. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, K содержит первообразный корень p -й степени из единицы ζ , элемент π является униформирующей поля K . Пусть L/K — циклическое расширение степени p . Тогда существует $x \in L$, такой, что $L = K(x)$, $x^p \in K$, и выполнено одно из условий:

- 1) $x^p = u\pi^s$, где $v_K(u) = 0$, $p \nmid s$;
- 2) $x^p = u$, где $v_K(u) = 0$, $u \notin \bar{K}^p$;
- 3) $x^p = 1 + u\pi^s$, где $v_K(u) = 0$, $0 < s < \frac{pe_K}{p-1}$, $p \nmid s$;
- 4) $x^p = 1 + u\pi^{ps}$, где $0 < s < \frac{e_K}{p-1}$, $\bar{u} \notin \bar{K}^p$;
- 5) $x^p = 1 + u(1 - \zeta)^p$, где $\bar{u} \notin \{y^p - u \mid y \in \bar{K}\}$.

В случаях 1) и 3) расширение вполне разветвлённое, в случаях 2) и 4) свирепое, в случае 5) неразветвлённое.

В случаях 1) и 2) выполнено $h(L/K) = \frac{e_L}{p-1}$, $d(L/K) = 1$ в случаях 3) и 4) выполнено $0 < h(L/K) < \frac{e_L}{p-1}$, $0 < d(L/K) < 1$, в случае 5) выполнено $h(L/K) = 0$, $d(L/K) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1], лемма 2-16. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $K \subset L$ — дискретно нормированные поля, и L/K — расширение Галуа полей степени p . Будем называть его максимально разветвленным, если $d(L/K) = 1$.

2. Вложение расширения в башню расширений Артина–Шрайера

Здесь и далее до конца статьи мы предполагаем, что K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, и K содержит первообразный корень p -й степени из единицы.

ЛЕММА 4. Пусть L/K — расширение Галуа степени p , и $h(L/K) = \frac{e_L}{p-1}$. Предположим, что $e_K \neq p-1$ или расширение L/K вполне разветвлено. Тогда существует расширение Галуа F/K степени p такое, что

$$h(FL/F) < \frac{e_{FL}}{p-1}, \quad h(F/K) < \frac{e_F}{p-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 расширение L/K не является неразветвленным.

Случай 1: расширение L/K свирепое. В этом случае существует $t \in K$, такой, что

$$v_K(t) = 0, \quad L = K(\sqrt[p]{t}).$$

Пусть π — произвольная униформизирующая поля K . Обозначим через u произвольный корень уравнения $u^p = 1 + \pi^p t$. Докажем, что подойдет $F = K(u)$.

Расширение F/K свирепое, и $h(F/K) = \frac{e_F}{p-1} - 1$. Элемент π является униформизирующей поля F . Положим $t_1 = \pi^{-1}(u - 1)$. Тогда

$$v_F(t_1) = 0, \quad \bar{t}_1 \notin \bar{F}^p.$$

Имеем

$$t = \frac{(1 + \pi t_1)^p - 1}{\pi^p} = t_1^p + p\pi^{1-p}t_1 + a,$$

и

$$FL = F\left(\sqrt[p]{tt_1^{-p}}\right) = F\left(\sqrt[p]{1 + p\pi^{1-p}t_1^{-p} + a}\right),$$

где $v_L(a) > v_L(p\pi^{1-p})$. Приеним лемму 3. Число $v_L(p\pi^{1-p})$ положительно. Если оно не кратно p , то расширение FL/F — вполне разветвлённое, а если кратно p — свирепое; в обоих случаях скачок меньше, чем $\frac{e_{FL}}{p-1}$.

Случай 2: Расширение L/K вполне разветвлённое. В этом случае существует униформизирующая π поля K , такая, что $L = K(\sqrt[p]{\pi})$. Обозначим через u произвольный корень уравнения $u^p = 1 + \pi$ и докажем, что подойдёт $F = K(u)$. Расширение F/K вполне разветвлённое, и $h(F/K) = \frac{e_F}{p-1} - 1$. Элемент $\pi_1 = u - 1$ является униформизирующей поля F . Имеем

$$\pi = (1 + \pi_1)^p - 1 = \pi_1^p + p\pi_1 + a,$$

$$FL = F\left(\sqrt[p]{\pi\pi_1^{-p}}\right) = F\left(\sqrt[p]{1 + p\pi_1^{1-p} + b}\right),$$

где $v_F(a) > v_F(p\pi_1)$, $v_F(b) > v_F(p\pi_1^{1-p})$. Далее, $p \nmid v_F(p\pi_1^{1-p})$, следовательно, по лемме 3, выполнено $h(FL/F) < \frac{e_{FL}}{p-1}$. ■

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любого p -расширения Галуа L/K существует поле E , такое, что $K \subset L \subset E$, расширение E/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и $|E : K| \leq p|L : K|^2$.

2) Если $e_K \neq p - 1$ или существует поле K' , такое, что $K \subset K' \subset L$, и расширение K'/K вполне разветвлено, то существует поле E , удовлетворяющее описанным условиям, для которого выполнено $|E : K| \leq |L : K|^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем второе утверждение, а затем первое.

2) Используем индукцию по $|L : K|$. Выберем поле K_0 так, что

$$K \subset K_0 \subset L, \quad |K_0 : K| = p,$$

и в случае $e_K = p - 1$ расширение K_0/K вполне разветвлено. По леммам 4 и 2 существует поле K_1 , совпадающее с K_0 , или являющееся расширением K_0 степени p , такое, что расширение K_1/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера. Положим $L_1 = LK_1$. Поле K_1 удовлетворяет условию 2), поэтому к расширению L_1/K_1 можно применить индукционное предположение. Поле E , подходящее для расширения L_1/K_1 подойдет и для расширения L/K .

1) Обозначим через K_1 произвольное поле, полученное из K вполне разветвленным расширением Артина-Шрайера, и положим $L_1 = K_1L$. Для расширения L_1/K_1 выполнены условия 2). Применим к нему доказанное утверждение. Построенное поле E удовлетворяет условию теоремы для расширения L/K . ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия в пункте 2) являются существенными, как нетрудно видеть из примера $K = \mathbb{Q}_p(\{\zeta_p\})$, $L = K(\sqrt[p]{t})$. Действительно, у L/K нет свирепых расширений Артина-Шрайера, откуда следует, что не существует расширения E/K степени p^2 , удовлетворяющего условиям теоремы.

3. Вложение расширения в расширение Инабы

Уравнением Инабы с матрицей A называется уравнение $X^{(p)} = AX$, где X, A — унитарные матрицы, то есть верхнетреугольные матрицы, у которых все элементы главной диагонали равны 1, и через $X^{(p)}$ обозначена матрица, полученная из X возведением всех элементов в степень p .

Расширением Инабы поля K будем называть расширение, полученное присоединением всех элементов некоторой матрицы X , удовлетворяющей уравнению Инабы с некоторой матрицей A , элементы которой принадлежат полю K .

Известно, что башню расширений Артина-Шрайера можно вложить в расширение Инабы, а именно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть поля

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n = L$$

таковы, что K_{i+1}/K_i — расширения степени p , заданные уравнениями Артина-Шрайера. Тогда существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K , заданные матрицами порядка $p^{n-1} + 2$ и $p^{n-1} + 1$ соответственно, такие, что $M_IL = L_I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8], теорема 3.3. ■

Из этой теоремы и теоремы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть K — полное дискретно нормированное поле, $\text{char } K = 0$, $\text{char } \bar{K} = p$, и K содержит первообразный корень p -й степени из единицы. Пусть L/K — расширение Галуа степени p^n . Тогда:

- 1) существуют расширения Инабы L_I/K и M_I/K , заданные матрицами порядка $p^{2n} + 2$ и $p^{2n} + 1$ соответственно, такие, что $M_IL = L_I$;
- 2) если $e_K \neq p - 1$ или существует поле K' такое, что $K \subset K' \subset L$, и расширение K'/K вполне разветвлено, то существуют описанные расширения Инабы, заданные матрицами порядка $p^{2n-1} + 2$ и $p^{2n-1} + 1$ соответственно.

4. Подрасширение, являющееся башней расширений Артина-Шрайера

ЛЕММА 5. Пусть L/K — расширение Галуа степени p^2 . Тогда существует поле M такое, что $K \subset M \subset L$, $|L : M| = |M : K| = p$, и выполнено одно из двух условий:

- 1) $h(M/K) < \frac{e_M}{p-1}$;
- 2) $h(M/K) = \frac{e_M}{p-1}$, $h(L/M) = \frac{e_L}{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае циклического расширения L/K утверждение следует из неравенства Хиро, см [1], лемма 4-1. В случае нециклического расширения утверждение леммы вытекает из предложения 3.8 в [12]. ■

Из этой леммы получается следующий результат:

ТЕОРЕМА 4. Пусть L/K — p -расширение Галуа. Тогда существует поле M , такое, что $K \subset M \subset L$, расширение M/K раскладывается в башню расширений Артина-Шрайера, и у расширения L/M все промежуточные расширения Галуа степени p максимально разветвлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|L : K| = p^n$. Тогда существует набор полей M_i такой, что

$$K = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = L,$$

M_{i+1}/M_i — расширение Галуа степени p при всех i . Для каждого такого набора положим

$$N(M_1, \dots, M_n) = \sum x_i(n-i),$$

где $x_i = 1$, если расширение M_{i+1}/M_i является максимально разветвленным, и $x_i = 0$ в противном случае. Будем рассматривать набор $M_1, \dots, M_n$, для которого величина $N(M_1, \dots, M_n)$ принимает наименьшее возможное значение.

Докажем, что ни для какого i не могут выполняться условия

$$h(M_{i+1}/M_i) = \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}, \quad h(M_{i+2}/M_{i+1}) < \frac{e_{M_{i+2}}}{p-1}.$$

Предположим, что они выполняются. Применим к расширению M_{i+2}/M_i лемму 5. Пусть M' — промежуточное поле из этой леммы. Если бы оно удовлетворяло условию 1), то замена поля M_{i+1} на поле M' уменьшила бы значение величины $N(M_1, \dots, M_n)$. Следовательно, M' удовлетворяет условию 2). По лемме 1 выполнено

$$d(M_{i+2}/M_{i+1}) + d(M_{i+1}/M_i) = d(M_{i+2}/M') + d(M'/M_i)$$

По лемме 3 в правой части оба слагаемых равны 1, а в левой — одно слагаемое меньше 1, второе не превосходит 1. Противоречие. Получаем, что для некоторого s все при $i < s$ выполнено $h(M_{i+1}/M_i) < \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}$, и при $i \geq s$ выполнено $h(M_{i+1}/M_i) = \frac{e_{M_{i+1}}}{p-1}$.

Докажем, что поле M_s подойдет в качестве M . По лемме 2 расширения M_{i+1}/M_i являются расширениями Артина-Шрайера при $i < s$, следовательно, расширение M/K удовлетворяет условию. Предположим, что расширение L/M не удовлетворяет условию. Тогда существуют поля F, E , такие, что

$$M \subset F \subset E \subset L, \quad |E : F| = p, \quad d(E/F) < 1.$$

Разложим расширения M/F и L/E в башни расширений степени p . Получим, что расширение L/M разложено в башню из $n-s$ расширений степени p , причем по лемме 3 глубина хотя бы одного подрасширения меньше 1, а остальных — не больше 1. По лемме 1 из этого следует, что $d(L/M) < n-s$. С другой стороны, применяя леммы 3 и 1 к башне из полей M_i , получаем, что $d(L/M) = n-s$. ■

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hyodo, O. Wild ramification in the imperfect residue field case/ O. Hyodo// Adv. Stud. Pure Math. - 1987. - Vol. 12 - P. 287-314.
2. Inaba, E. On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p / E. Inaba//Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. - 1961. - Vol. 12 - P. 26-36.
3. Востоков, С.В., Жуков, И.Б., Фесенко И.Б. К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции/ С.В. Востоков, И.Б. Жуков, И.Б. Фесенко // Алгебра и анализ. - 1990. - Т. 2 - № 4. - С. 91-118.
4. Иванова, О. Ю. Задание свирепого циклического расширения уравнением Инабы/ О. Ю. Иванова//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 2022. -Т. 513 - С. 74-84.

5. Востоков, С. В., Жуков И. Б. Некоторые подходы к построению абелевых расширений для p -адических полей/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков// Труды С.-Петерб. мат. общ. - 1995 - Т.3 - С. 194-214.
6. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Расширения Инабы полных полей характеристики 0/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб. - 2019 - Т. 20 - № 3 - С. 124-133.
7. Жуков, И. Б., Лысенко, Е. Ф. Построение циклического расширения степени p^2 полного поля/ И. Б. Жуков, Е. Ф. Лысенко//Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2017. - Т. 455 - С. 52-66.
8. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. О расширениях Инабы двумерных локальных полей смешанной характеристики/ И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 2022. - Т. 513 - С. 57-73.
9. Жуков, И. Б., Иванова, О. Ю. Явные конструкции расширений полных полей характеристики 0// И. Б. Жуков, О. Ю. Иванова// Чебышёвский сб., в печати
10. Zhukov, I. Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields// in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs - 2000. Vol. 3 - P. 117-122.
11. MacKenzie, R. E., Whaples, G. Artin-Schreier equations in characteristic zero// R. E. MacKenzie, G. Whaples// Amer. J. Math. 1956 Vol. 78, P. 473-485.
12. Востоков, С. В., Жуков, И. Б., Пак, Г. К. Расширения с почти максимальной глубиной ветвления/ С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак// Записки научных семинаров С.-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) - 1999. - Т. 265 - С. 77-109.

REFERENCES

1. Hyodo, O., 1987, "Wild ramification in the imperfect residue field case", *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 12, pp. 287-314.
2. Inaba, E., 1961, "On matrix equations for Galois extensions of fields with characteristic p ", *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, vol. 12, pp. 26-36.
3. Fesenko, I. B., Vostokov, S. V., Zhukov I. B. 1990, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions", *Algebra i Analiz* vol. 2, № 4. pp. 91-118.
4. Ivanova, O. Yu. 2022 "Construction of a cyclic ferocious extension by means of an Inaba equation", *J. Math. Sci.*, vol. 513, № 4. pp. 74-84.
5. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B. 1995, "Some approaches to the construction of abelian extensions for p -adic fields", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, vol. III, pp. 157-174, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 166, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
6. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. 2019 "Inaba extensions of complete fields of characteristic 0" *Chebyshevskii sbornik* vol. 20, № 3, pp. 124-133

7. Zhukov, I. B., Lysenko, E. F. 2018, “Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field”, *J. Math. Sci.*, vol. 234(2), pp. 148–157
8. Zhukov I. B., Ivanova, O. Yu. 2022 “On Inaba extensions for two-dimensional local fields of mixed characteristic”, *J. Math. Sci.*, vol. 513, № 4, pp. 57-73.
9. Zhukov, I. B., Ivanova, O. Yu. “Explicit constructions of extensions of complete fields of characteristic 0” *Chebyshevskii sbornik*, to appear.
10. Zhukov, I., 2000, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, in book: Fesenko, I., Kurihara, M. (eds.) *Invitation to Higher Local Fields. Geometry and Topology Monographs*, vol. 3, pp. 117-122.
11. MacKenzie, R. E., Whaples, G., 1956, “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *Amer. J. Math.*, vol. 78, pp. 473-485.
12. Vostokov, S. V., Zhukov, I. B., Pak, G. K. 1999, “Extensions with almost maximal depth of ramification”, *J. Math. Sci.*, vol. 112, № 3, pp. 4285-4302

Получено: 13.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024