

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-170-175

О некотором произведении SM-групп¹

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук

Грицук Дмитрий Владимирович — кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

Трофимук Александр Александрович — доктор физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (г. Брест, Беларусь).

e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Аннотация

Подгруппа A группы G называется тсс-подгруппой в G , если существует подгруппа Y группы G такая, что $G = AY$ и для любого $X \leq A$ и $Z \leq Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z \rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G . В этой статье доказано, что класс всех SM-групп замкнут относительно произведения тсс-подгрупп. Здесь SM-группой называется группа, у которой каждая субнормальная подгруппа перестановочна с каждой максимальной подгруппой.

Ключевые слова: факторизуемая группа, тсс-подгруппа, SM-группа.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Д. В. Грицук, А. А. Трофимук. О некотором произведении SM-групп // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 170–175.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-170-175

On some product of SM-groups

D.V. Gritsuk, A.A. Trofimuk

Gritsuk Dmitry Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, A. S. Pushkin Brest State University (Brest, Belarus).

e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

Trofimuk Alexander Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, A. S. Pushkin Brest State University (Brest, Belarus).

e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Abstract

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республика Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», № гос. рег. 20211467).

A subgroup A of a group G is called *tcc-subgroup* in G , if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \leq A$ and $Y \leq T$ there exists an element $u \in \langle X, Y \rangle$ such that $XY^u \leq G$. The notation $H \leq G$ means that H is a subgroup of a group G . In this paper we proved that the class of all SM-groups is closed under the product of tcc-subgroups. Here an SM-group is a group where each subnormal subgroup permutes with every maximal subgroup.

Keywords: factorizable group, tcc-subgroup, SM-group.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

D. V. Gritsuk, A. A. Trofimuk, 2024, "On some product of SM-groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 170–175.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1, 2].

Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *тотально перестановочными*, если $UV = VU$ для всех $U \leq A$ и $V \leq B$. Запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G .

А. Н. Скиба [3] обратил внимание на то, что в группе G две подгруппы A и B могут быть неперестановочными, но существует элемент $x \in G$ такой, что A и B^x перестановочны. Например, в разрешимой группе G силовские подгруппы G_p и G_q не всегда перестановочны, но всегда существует элемент $x \in G$ такой, что $G_p G_q^x = G_q^x G_p$. На основе этого факта А. Н. Скиба предложил называть подгруппы A и B *X -перестановочными*, если A перестановочна с B^x для некоторого $x \in X$, где X — некоторое непустое множество элементов группы. Если $X = \langle A, B \rangle$, то X -перестановочные подгруппы A и B называются *сс-перестановочными* подгруппами. Кроме того, если каждая подгруппа из A сс-перестановочна с каждой подгруппой из B , то подгруппы A и B называются *тотально сс-перестановочными*.

Напомним, что *добавлением* к подгруппе A в группе G называется подгруппа T такая, что $G = AT$. Если $A \cap T = 1$, то добавление T называется *дополнением*. Поскольку для каждой подгруппы A в группе G существует добавление, то вполне естественно исследовать перестановочность между подгруппами из A и подгруппами из добавления к A .

Используя понятие сс-перестановочности, в работе [4] было введено следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подгруппа A группы G называется *тсс-подгруппой* в G , если:

- (1) в G существует подгруппа Y такая, что $G = AY$;
- (2) подгруппа A *тотально сс-перестановочна* с подгруппой Y .

Подгруппу Y в дальнейшем будем называть *тсс-добавлением* к подгруппе A в группе G .

В теореме 1 установлена замкнутость насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей формацию сверхразрешимых групп $\mathfrak{U}$, относительно произведения тсс-подгрупп.

ТЕОРЕМА 1 ([5, теорема 2]). Пусть $G = AB$, где A и B — тсс-подгруппы группы G . Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 1 ([4, теорема 4.1]). Пусть A и B — тсс-подгруппы группы G и $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.

Из теоремы 1 и следствия 1 вытекают ключевые результаты теории тотально перестановочных и тотально сс-перестановочных подгрупп [6, 7, 8], вошедшие в монографии [2, 9].

Дж. Байдлмен и Х. Хайнекен в [10] исследовали *SM-группы*, т.е. группы, в которых каждая субнормальная подгруппа перестановочна с каждой максимальной подгруппой. Из [10,

теорема А] следует, что класс сверхразрешимых групп совпадает с классом всех разрешимых SM-групп. Заметим, что класс всех SM-групп является гомоморфом.

В настоящей работе получено развитие теоремы 1 и следствия 1 на случай SM-сомножителей. В частности, доказано, что класс всех SM-групп замкнут относительно произведения тсс-подгрупп.

2. Вспомогательные результаты

Запись $H \triangleleft G$ означает, что H — нормальная подгруппа группы G . Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G ; $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B .

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется замкнутым относительно фактор-групп или гомоморфом, когда выполняется требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ называется замкнутым относительно подпрямых произведений, когда выполняется требование: если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

ЛЕММА 1 ([4, лемма 3.1]). Пусть A — тсс-подгруппа группы G и Y — тсс-добавление к A в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) A — тсс-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \leq H$;
- (2) AN/N — тсс-подгруппа в G/N для каждой $N \trianglelefteq G$;
- (3) для каждой $A_1 \trianglelefteq A$ и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1 X^y \leq G$. В частности, $A_1 M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1 H \leq G$ для некоторой π -холодовой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;
- (4) $A_1 K \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой $A_1 \trianglelefteq A$;
- (5) если $T \trianglelefteq G$ такая, что $T \leq A$ и $T \cap Y = 1$, то $T_1 \trianglelefteq G$ для каждой $T_1 \trianglelefteq A$ такой, что $T_1 \leq T$;
- (6) если $T \trianglelefteq G$ такая, что $T \cap A = 1$ и $T \leq Y$, то $A_1 \leq N_G(T_1)$ для каждой $T_1 \trianglelefteq T$ и для каждой $A_1 \trianglelefteq A$.

ЛЕММА 2 ([5, лемма 5]). Пусть G — примитивная группа и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если G имеет собственную неединичную тсс-подгруппу A , то N абелева.

ЛЕММА 3 ([5, лемма 6]). Пусть A — собственная неединичная тсс-подгруппа примитивной группы G и Y — ее тсс-добавление в G , N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Если $N \cap A = 1$ и $N \leq Y$, то A — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$.

ЛЕММА 4 ([11, теорема 1, предложения 1-2]). Пусть $G = AB$ — произведение totally сс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда для минимальной нормальной подгруппы N группы G справедливы следующие утверждения:

- (1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;
- (2) если $N \leq A \cap B$ или $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p — простое число.

ЛЕММА 5 ([8, Теорема 4]). Пусть $G = AB$ является произведением totally сс-перестановочных подгрупп A и B . Тогда $[A, B] \leq F(G)$.

3. Произведение тсс-подгрупп, которые являются SM-группами

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа $G = AB$ — произведение тсс-подгрупп A и B . Если A и B — SM-группы, то G является SM-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что теорема неверна и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть N — неединичная нормальная в G подгруппа. Подгруппы $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ — тсс-подгруппы группы G/N по лемме 1 (2), $AN/N \simeq A/A \cap N$ и $BN/N \simeq B/B \cap N$ — SM-группы. Поэтому фактор-группа $G/N = (AN/N)(BN/N)$ является SM-группой по индукции.

Пусть H — субнормальная подгруппа группы G наименьшего порядка такая, что H не перестановочна с некоторой максимальной подгруппой M группы G .

Предположим, что $M_G \neq 1$. Тогда по доказанному выше G/M_G — SM-группа. Значит,

$$(HM_G/M_G)(M/M_G) \leq G/M_G,$$

ввиду выбора H . Поэтому $HM = HM_G M \leq G$, противоречие. Следовательно $M_G = 1$ и G — примитивная группа с примитиватором M .

Предположим, что в группе G существует две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . По [1, теорема 4.41] $N_1 = C_G(N_2)$ и $N_2 = C_G(N_1)$. По лемме 5 и [1, лемма 4.21 (3)]

$$[A, Y] \leq F(G) \leq C_G(N_1) \cap C_G(N_2) = N_2 \cap N_1 = 1.$$

Поэтому A и Y нормальны в G . По лемме 4

$$\{A \cap N_1, Y \cap N_1\} \subseteq \{1, N_1\}.$$

Если $N_1 \leq A \cap Y$ или $N_1 \cap A = N \cap Y = 1$, то по лемме 4 $|N_1| = p$ и $N_1 = N_2$, противоречие. Пусть $N_1 \leq A$ и $N_1 \cap Y = 1$. Тогда $Y \leq C_G(N_1) = N_2$ и $N_2 = Y$. Поскольку $A \leq C_G(Y)$, то $A \leq C_G(N_2) = N_1$ и $A = N_1$. Аналогично и для случая $N_1 \leq Y$ и $N_1 \cap A = 1$.

Таким образом, возможны следующие варианты: либо $A = N_1$ и $Y = N_2$, либо $A = N_2$, $Y = N_1$, либо $B = N_1$ и $X = N_2$, либо $B = N_2$, $X = N_1$. Если $A = B = N_1$ или $A = B = N_2$, то $G = N_1$ или $G = N_2$. Тогда G является SM-группой. Если $A = N_1$, $B = N_2$ или $A = N_2$, $B = N_1$, то $G = AB = N_1 \times N_2$. Тогда G — SM-группа. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N . По лемме 2 N абелева. Тогда по [1, теорема 4.41] $G = N \rtimes M$ и $N = C_G(N)$.

Очевидно, что $H \cap N$ субнормальная подгруппа G . Предположим, что $H \not\leq N$. Тогда

$$(H \cap N)M \leq G,$$

ввиду выбора H . Так как M — максимальная подгруппа в G , то либо $(H \cap N)M = G$, либо $(H \cap N)M = M$. Если $(H \cap N)M = G$, то $HM = G$, противоречие. Поэтому $H \cap N \leq M$. Так как $N \cap M = 1$, то $H \cap N = 1$. По [1, лемма 2.42, лемма 4.7] $N \leq N_G(H)$ и $[H, N] \leq H$. Тогда $[H, N] \leq H \cap N = 1$ и $H \leq C_G(N) = N$, противоречие. Значит, $H \leq N$. Очевидно, что $H \neq N$.

По лемме 4

$$\{A \cap N, Y \cap N\} \subseteq \{1, N\}.$$

Если $N \leq A \cap Y$ или $N \cap A = N \cap Y = 1$, то по лемме 4 $|N| = p$, где p — простое число. Значит, G сверхразрешима, а следовательно, G является SM-группой, противоречие.

Пусть $N \leq A$ и $N \cap Y = 1$. Тогда по лемме 1 (5) $N_1 \triangleleft G$, где N_1 — минимальная нормальная в A подгруппа такая, что $N_1 \leq N$. Значит, $N = N_1$. Очевидно, что $N < A$. Так как $G = NM$, то

$$A = A \cap NM = N \rtimes (A \cap M)$$

и $A \cap M$ — максимальная подгруппа группы A . Учитывая $H < N$, получим, что H субнормальна в A и $H(A \cap M) \leq G$, поскольку A — SM-группа. Следовательно,

$$A \cap M < H(A \cap M) < N(A \cap M) = A,$$

противоречие.

Тогда можно считать, что $N \leq Y \cap X$ и $N \cap A = 1 = N \cap B$, где X — тсс-добавление к подгруппе B в G . По лемме 3 A и B циклические. Тогда $G = AB$ сверхразрешима, а следовательно, G является SM-группой, противоречие.

Теорема доказана.

Очевидно, что если $G = AB$ — произведение totally перестановочных (totalno cс-перестановочных) подгрупп A и B , то A и B будут тсс-подгруппами в группе G . Обратное неверно, см. [4, пример 1.1]. Поэтому справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 2 ([11, теорема 3], [12, теорема В]). *Пусть $G = AB$ — произведение totally перестановочных (totalno cс-перестановочных) подгрупп A и B . Если A и B — SM-группы, то G — SM-группа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
2. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.
3. Скиба А. Н. H -перестановочные подгруппы // Изв. Гом. гос. ун-та имени Ф. Скорины. 2003. № 4. С. 37-39.
4. Trofimuk A.A. On the supersolubility of a group with some тсс-subgroups // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. 2150020 (18 pages).
5. Трофимук А. А. Замечание о произведении двух формационных тсс-подгрупп // Чебышевский сборник. 2021. Vol. 22, № 1. С. 495-501.
6. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. Vol. 68, №3-4. P. 433-449.
7. Asaad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. Vol. 53. P. 318-326.
8. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M. D. On conditional permutability and factorized groups // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2014. Vol. 193. P.1123-1138.
9. Guo W. Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 2015. 359 p.
10. Beidleman J. C., Heineken H. Pronormal and subnormal subgroups and permutability // Boll. Un. Mat. Ital. 2003. Vol. 6, № 8. P. 605-615.
11. Arroyo-Jorda M., Arroyo-Jorda P. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups // Journal of Algebra. 2017. Vol. 476. P. 395-414.
12. Beidleman J. C., Heineken H., Hauck P. Totally permutable products of certain classes of finite groups // J. Algebra. 2004. Vol. 276. P. 826-835.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. 2006. "Introduction to the Theory of Finite Groups and Their Classes", *Vysh. Shkola, Minsk*, [in Russian].
2. Ballester-Bolinches, A., "Esteban-Romero, R. & Asaad, M. 2010. "Products of finite groups", Walter de Gruyter, Berlin.
3. Skiba, A. N., 2003. " H -permutable subgroups", *Izv. Gom. state F. Skaryna University*, no. 4, pp. 37–39.
4. Trofimuk, A. A., 2021. "On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups", *Journal of Algebra and Its Applications*, 2150020 (18 pages).
5. Trofimuk, A. A., 2021. "A remark on a product of two tcc-subgroups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 495–501.
6. Guo, W., Shum, K. P. & Skiba, A. N., 2006. "Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 68, no. 3-4, pp. 433–449.
7. Asaad, M. & Shaalan, A., 1989. "On the supersolubility of finite groups", *Arch. Math.*, vol. 53, pp. 318–326.
8. Arroyo-Jorda, M., Arroyo-Jorda, P., Martinez-Pastor, A. & Perez-Ramos, M. D., 2014. "On conditional permutability and factorized groups", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 193, pp. 1123–1138.
9. Guo, W., 2015. *Structure theory for canonical classes of finite groups*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
10. Beidleman, J. C. & Heineken, H., 2003. "Pronormal and subnormal subgroups and permutability", *Boll. Un. Mat. Ital.*, vol. 6, no. 8, pp. 605–615.
11. Arroyo-Jorda, M. & Arroyo-Jorda, P., 2017. "Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups", *J. Algebra*, vol. 476, pp. 395–414.
12. Beidleman, J. C., Heineken, H. & Hauck, P., 2004. "Totally permutable products of certain classes of finite groups", *J. Algebra*, vol. 276, pp. 826–835.

Получено: 11.12.2023

Принято в печать: 21.03.2024