

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 1.

УДК 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-164-169

О взаимной простоте элементов последовательности Битти

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Аннотация

В заметке рассматриваются два приложения доказанной авторами асимптотической формулы для числа значений последовательности Битти в арифметической прогрессии с растущей разностью: получены асимптотические формулы для количества элементов последовательности Битти, взаимно простых с (возможно, растущим) натуральным числом a , а также для количества пар взаимно простых элементов двух последовательностей Битти. Сформулируем основные результаты.

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то для количества $S_{\alpha,a}(N)$ элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a , справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O\left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3)\right),$$

где $\tau(a)$ — число натуральных делителей числа a , $\sigma(a)$ — сумма делителей числа a .

Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ — иррациональные числа и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывных дробей чисел α и β ограничены, то для количества $S_{\alpha,\beta}(N)$ пар взаимно простых элементов последовательностей Битти $[\alpha m]$, $1 \leq m \leq N$, и $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Ключевые слова: последовательность Битти, взаимно простые числа, асимптотическая формула.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. О взаимной простоте элементов последовательности Битти // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 1, с. 164–169.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 1.

UDC 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-1-164-169

On coprime elements of the Beatty sequence

A. V. Begunts, D. V. Goryashin

Begunts Alexander Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: alexander.begunts@math.msu.ru

Goryashin Dmitry Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: dmitry.goryashin@math.msu.ru

Abstract

This note discusses two applications of the asymptotic formula obtained by the authors for the number of values of the Beatty sequence in an arithmetic progression with increasing difference: asymptotic formulas are obtained for the number of elements of the Beatty sequence that are coprime to the (possibly growing) natural number a , as well as for the number of pairs of coprime elements of two Beatty sequences. Here are the main results.

Let $\alpha > 1$ be an irrational number and N be a sufficiently large natural number. Then if the partial quotients of the continued fraction of the number α are limited, then for the number $S_{\alpha,a}(N)$ of elements of the Beatty sequence $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, coprime to the number a , the following asymptotic formula holds

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O\left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3)\right),$$

where $\tau(a)$ is the number of divisors of a and $\sigma(a)$ is the sum of the divisors of a .

Let $\alpha > 1$ and $\beta > 1$ be irrational numbers and N be a sufficiently large natural number. Then if the incomplete quotients of continued fractions of the numbers α and β are bounded, then for the number $S_{\alpha,\beta}(N)$ of pairs of coprime elements of Beatty sequences $[\alpha m]$, $1 \leq m \leq N$, and $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, the following asymptotic formula holds

$$S_{\alpha,\beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Keywords: Beatty sequence, coprime numbers, asymptotic formula.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2024, "On coprime elements of the Beatty sequence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 1, pp. 164–169.

1. Введение

В данной заметке рассматриваются два приложения доказанной авторами (см. [1]) асимптотической формулы для числа значений последовательности Битти (см., например, [2]) в арифметической прогрессии с растущей разностью: получены асимптотические формулы

для количества элементов последовательности Битти, взаимно простых с (возможно, растущим) натуральным числом a , а также для количества пар взаимно простых элементов двух последовательностей Битти.

Известно (см. задачу 19 к гл. II книги [3]), что среди первых N натуральных чисел доля взаимно простых с данным натуральным числом a асимптотически эквивалентна $\frac{\varphi(a)}{a}$, где $\varphi(a)$ — функция Эйлера. Действительно, пользуясь равенством

$$\sum_{k|m} \mu(k) = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mu(k)$ — функция Мёбиуса, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ (a,n)=1}} 1 &= \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{k|(a,n)} \mu(k) = \sum_{k|a} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \sum_{k|a} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O(1) \right) = \\ &= N \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} + O \left(\sum_{k|a} 1 \right) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O(\tau(a)). \end{aligned}$$

Ответ на аналогичный вопрос для последовательности Битти, соответствующей иррациональному числу с ограниченными неполными частными, даёт следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то для количества $S_{\alpha,a}(N)$ элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a , справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha,a}(N) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O \left(\min(\sigma(a) \ln^3 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3) \right),$$

где $\tau(a)$ — число натуральных делителей числа a , $\sigma(a)$ — сумма делителей числа a .

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и β — вещественное число из промежутка $[0; \alpha)$, a и d — целые числа, $2 \leq d \leq \sqrt{x/2}$, $0 \leq a < d$, x — достаточно большое натуральное число. Обозначим через

$$N_d(x) = N(x; \alpha, \beta; d, a) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ [\alpha n + \beta] \equiv a \pmod{d}}} 1$$

число значений последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, $1 \leq n \leq x$, принадлежащих арифметической прогрессии $(a + kd)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то справедлива асимптотическая формула

$$N_d(x) = \frac{x}{d} + O \left(d \ln^3 \frac{x}{d^2} \right).$$

Доказательство леммы проводится так же, как в работе [1], при этом для величины остатка $R_d(x) = N_d(x) - \frac{x}{d}$ получается оценка

$$R_d(x) \ll d \ln^3 L + \frac{x}{dL} \ln L,$$

где $L \geq 2$ — параметр. Выбирая $L = \frac{x}{d^2}$, получаем утверждение леммы.

Утверждением леммы 1 мы будем пользоваться при условии $d \leq \sqrt{x/2}$, а для больших значений d — применять следующую простейшую оценку.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 1$. Тогда величина $N_d(x)$ удовлетворяет неравенству

$$N_d(x) \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\alpha > 1$, каждому числу n , для которого выполнено равенство $[\alpha n + \beta] = ld + a$, соответствует ровно одно натуральное число l , причём $l \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}$. Отсюда следует требуемое.

Перейдём к доказательству теоремы 1. Рассмотрим величину

$$S_{\alpha,a}(N) = |\{n \mid 1 \leq n \leq N, ([\alpha n], a) = 1\}|,$$

равную количеству элементов последовательности Битти $[\alpha n]$, $1 \leq n \leq N$, взаимно простых с числом a . Тогда, применяя равенство (1) и леммы 1 и 2, получаем

$$\begin{aligned} S_{\alpha,a}(N) &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ ([\alpha n], a) = 1}} 1 = \sum_{1 \leq n \leq N} \sum_{k \mid ([\alpha n], a)} \mu(k) = \sum_{k \mid a} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \\ &= \sum_{\substack{k \mid a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O\left(k \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) \right) + \sum_{\substack{k \mid a \\ k > \sqrt{N/2}}} O\left(\frac{N}{k}\right) = N \sum_{k \mid a} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(\ln^3 N \sum_{\substack{k \mid a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} k\right) + \\ &+ O\left(\sum_{\substack{k \mid a \\ k > \sqrt{N/2}}} k\right) = N \sum_{k \mid a} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(\ln^3 N \sum_{k \mid a} k\right) = N \frac{\varphi(a)}{a} + O(\sigma(a) \ln^3 N). \end{aligned}$$

Получим вторую оценку остаточного члена. Разобьём сумму по делителям

$$S_{\alpha,a}(N) - N \frac{\varphi(a)}{a} = \sum_{k \mid a} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right)$$

на две, соответствующие условиям $k \leq \sqrt{N/2}$ и $k > \sqrt{N/2}$. Тогда для первой суммы по лемме 1 будем иметь

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\substack{k \mid a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right) \right| \ll \sum_{\substack{k \mid a \\ k \leq \sqrt{N/2}}} k \ln^3 \frac{N}{k^2} = \\ &= \sum_{\substack{k \mid a \\ k \leq \sqrt{N} \ln^{-3} N}} k \ln^3 N + \sum_{\substack{k \mid a \\ \sqrt{N} \ln^{-3} N < k \leq \sqrt{N/2}}} k \ln^3 \frac{N}{k^2} \ll \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^3, \end{aligned}$$

а для второй суммы по лемме 2 получаем

$$\left| \sum_{\substack{k \mid a \\ k > \sqrt{N/2}}} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\alpha n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 - \frac{N}{k} \right) \right| \ll \sum_{\substack{k \mid a \\ k > \sqrt{N/2}}} \frac{N}{k} \ll \sqrt{N} \tau(a).$$

Теорема 1 доказана.

Отметим, что при малых значениях a (меньше по порядку, чем $\sqrt{N}$) более сильной является первая оценка остаточного члена, а при больших значениях a — вторая.

Известно также (см. задачу 21 к гл. II книги [3]), что среди всех пар натуральных чисел, каждое из которых не превосходит N , доля взаимно простых асимптотически эквивалентна $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ (m, n) = 1}} 1 &= \sum_{1 \leq m, n \leq N} \sum_{k | (m, n)} \mu(k) = \sum_{k \leq N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ m \equiv 0 \pmod{k}, \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \sum_{k \leq N} \mu(k) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \right)^2 = \\ &= \sum_{k \leq N} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O(1) \right)^2 = N^2 \sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k^2} + O(N \ln N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O(N \ln N), \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k \leq N} \frac{\mu(k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} - \sum_{k > N} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ответ на аналогичный вопрос для пар членов последовательностей Битти содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ — иррациональные числа и N — достаточно большое натуральное число. Тогда если неполные частные непрерывных дробей чисел α и β ограничены, то для количества $S_{\alpha, \beta}(N)$ пар взаимно простых элементов последовательностей Битти $[\alpha t]$, $1 \leq t \leq N$, и $[\beta n]$, $1 \leq n \leq N$, справедлива асимптотическая формула

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2} (\ln \ln N)^6\right).$$

Докажем теорему 2. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \geq \beta$. Рассмотрим число пар взаимно простых элементов последовательностей Битти

$$S_{\alpha, \beta}(N) = |\{(m, n) \mid 1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N, ([\alpha m], [\beta n]) = 1\}|.$$

Тогда ввиду тождества (1) имеем

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta}(N) &= \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ ([\alpha m], [\beta n]) = 1}} 1 = \sum_{1 \leq m, n \leq N} \sum_{k | ([\alpha m], [\beta n])} \mu(k) = \sum_{k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m, n \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}, \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 = \\ &= \sum_{k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1. \end{aligned}$$

Разобьём внешнюю сумму по k на две суммы, соответствующие условиям $k \leq \sqrt{\alpha N/2}$ и $\sqrt{\alpha N/2} < k \leq \alpha N$. Для первой из них, применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 &= \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \left(\frac{N}{k} + O\left(k \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) \right)^2 = \\ &= \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \mu(k) \left(\frac{N^2}{k^2} + O\left(N \ln^3 \frac{N}{k^2}\right) + O\left(k^2 \ln^6 \frac{N}{k^2}\right) \right) = \end{aligned}$$

$$= N^2 \sum_{k \leq \sqrt{\alpha N/2}} \frac{\mu(k)}{k^2} + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^3\right) + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^6\right).$$

Для второй суммы применим оценки каждой из внутренних сумм из леммы 2:

$$\left| \sum_{\sqrt{\alpha N/2} < k \leq \alpha N} \mu(k) \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ [\alpha m] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ [\beta n] \equiv 0 \pmod{k}}} 1 \right| \leq \sum_{k > \sqrt{\alpha N/2}} \frac{\alpha \beta N^2}{k^2} \ll N^{3/2}.$$

Окончательно получаем

$$S_{\alpha, \beta}(N) = \frac{6}{\pi^2} N^2 + O\left(N^{3/2}(\ln \ln N)^6\right).$$

Теорема 2 доказана.

Отметим также, что для случая почти всех $\alpha > 1$ в смысле меры Лебега можно доказать аналог теоремы 1 с оценкой остаточного члена $O\left(\min(\sigma(a) \ln^4 N, \sqrt{N} \tau(a) (\ln \ln N)^4)\right)$. Помимо того, асимптотические формулы теорем 1 и 2 справедливы и для неоднородных последовательностей Битти $[\alpha n + \delta]$, где $\delta \in (0; \alpha)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. О значениях последовательности Битти в арифметической прогрессии // Чебышевский сборник. **21**. Вып. 1. 2020. 361–367. doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-364-367
2. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. **18**. Вып. 4. 2017. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел // М.: Наука, 1981. 176 с.

REFERENCES

1. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2020, “On the values of Beatty sequence in an arithmetic progression”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 364–367. doi: 10.22405/2226-8383-2018-21-1-364-367
2. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2017, “Topical problems concerning Beatty sequences”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Vinogradov, I. M., 1981, “Fundamentals of Number Theory”, *Nauka, Moscow*, 176 pp.

Получено: 14.11.2023

Принято в печать: 21.03.2024